Ex. 1 - prob 3.3

(a) $U = xy$ is MRS diminishing? (quando aumenta $x \to$ MRS diminuisce)

$MU_x = y$, $MU_y = x$ => le utilità sono dipendenti tra loro

$MRS = \frac{MU_x}{MU_y} = y/x$

(per capire se crescente/decre, si guarda derivata seconda rispetto x)

$\frac{d^2U}{dx^2} = 0$ => MU COSTANTE

se $U > 0 \to$ MU crescente $< \to$ DEC $= \to$ COSTANTE

(b) $U(x,y) = x^2 y^2$

$MU_x = 2xy^2$ $MU_y = 2yx^2$ $MRS = y/x$

$\frac{d^2U}{dx^2} = 2y$ => positivo, mai zero se $y \neq 0$ => MU decrescente

(c) $U(x,y) = \ln x + \ln y$

$MU_x = 1/x$ $MU_y = 1/y$ $MRS = y/x$

$\frac{d^2U}{dx^2} = -\frac{1}{x^2}$ => negativo sempre < 0 => MU decrescente

- Problem 3.4 - convexity analisys (convesso = A e B stessa utilità)

(a) $U(x,y) = \min(x,y)$ if $U = k$ -> l'utilità è data dal bene in quantità minore => COMPLEMENTARI

$\min(x,y) = k$

- test punto medio -

punto $A = (k, y_1)$ punto medio $= \left(\frac{k + x_2}{2}, \frac{y_1 + k}{2}\right) \geq k$

$B = (x_2, k)$

(b) $U(x,y) = \max(x,y)$ (qui l'utilità è data dal bene in quantità maggiore)

$\max(x,y) = k$ al consumatore non interessa l'equilibrio bensì avere tanto di almeno 1 dei 2 beni

punto $A = (k, 0)$

$B = (0, k)$ $M = \left(\frac{k}{2}, \frac{k}{2}\right)$ MA $\frac{k}{2} < k$ = la combinazione è peggiore

=> il consumatore vuole o tutto x o y

non combinazione bilanciata NO CONVESSE

[nel caso convesso curve "L" verso l'origine qui "⅂"]

(c) $U(x,y) = x + y$ (consumatore 1 unità di un bene + 1 dell'altro, sempre allo stesso tasso
sono perfetti sostituti

$x + y = k$

$M = \left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}\right) = k$ => CONVESSE

- 3.10 -

$U(x,y) = x^{\alpha} y^{\beta}$; $MRS = \frac{\alpha}{\beta}\left(\frac{y}{x}\right)$

(a) il risultato dipende dal fatto che $\alpha + \beta = 1$
=> la funzione di utilità è scritta anche come $= x^{\alpha} y^{1-\alpha}$ $\equiv \alpha + (1-\alpha) = 1$]
avendo $MRS = \frac{\alpha}{\beta} \cdot \frac{y}{x}$ => $\alpha + \beta$ non compare mai, MRS è identico
+ MRS non dipende mai da $\alpha + \beta = 1$

(b) Se $y = x$ come dipende MRS da α e β
$MRS = \frac{\alpha}{\beta} \cdot \frac{y}{x}$ se $\frac{y}{x} = 1$; $MRS = \frac{\alpha}{\beta}$

=> quando il consumatore, consuma le stesse quantità di x e y
MRS è solo il rapporto tra i pesi α e β
Se $\alpha > \beta$ -> $MRS > 1$
$<$ -> $MRS < 1$
$=$ -> $MRS = 1$

n.b. i pesi misurano quanto i beni sono importanti nell'utilità
se $\alpha > \beta$ dico: x pesa di più, consumatore valuta di aumentare x
quindi è disposto a rinunciare ad y per avere più di x

- Come si vede nel grafico?Con α > β: Le curve di indifferenza sono più ripide; il consumatore vuole relativamente più x; la pendenza (in valore assoluto) è maggiore di 1 lungo la bisettrice
Se α = β:curva simmetrica rispetto alla bisettrice
Se α < β: curva più "piatta"

(c) FUNZIONE CON LIVELLO DI SUSSISTENZA
$U(x,y) = (x - x_0)^{\alpha} (y - y_0)^{\beta}$ x_0 e y_0 - livelli minimi di sussistenza
OMOTETICA? una funzione lo è se le sue curve di indifferenza sono versioni ingrandite l'una dell'altra. (1) trasformazione monotona di una funzione omogenea
(2) oppure MRS dipende solo dal rapporto y/x
=> $MRS = \frac{\alpha\, y - y_0}{\beta\, x - x_0}$ NON dipende da y/x quindi non è proporzionale radialmente dall'origine
NON OMOTETICA

a) CES OMOTETICA

$U(x,y) = \alpha \frac{x^\sigma}{\sigma} + \beta \frac{y^\sigma}{\sigma}$

una funzione omogenea di qualsiasi grado è omotetica

MRS: $\frac{\alpha}{\beta}\left(\frac{x}{y}\right)^{\sigma-1}$ => $U(tx,ty) = \alpha\frac{(tx)^\sigma}{\sigma} + \frac{\beta(ty)^\sigma}{\sigma} = t^\sigma U(x,y)$ -> omogeneo di grado σ

↳ dipende solo dal rapporto x/y

(b) CONTROLLO CASI SPECIALI

$\sigma = 1$ - PERFETTI SOSTITUTI

MRS $= \frac{\alpha}{\beta}$ [costante]

$U = \alpha x + \beta y$

$\sigma = 0$ - ottieni Cobb-Douglas

$U = x^\alpha y^\beta$ -> MRS $= \frac{\alpha}{\beta} \cdot \frac{y}{x}$

(c) DIMOSTRA MRS DECRESCENTE PER TUTTI I VALORI $\sigma < 1$

MRS decrescente = MRS diminuisce quando x aumenta (concetto convessità)

MRS $= \frac{\alpha}{\beta}\left(\frac{x}{y}\right)^{\sigma-1}$ se $\sigma < 1$ = $\sigma - 1 < 0$ ESPONENTE NEGATIVO

↳ ho esponente NEG = DECRESCENTE

REGOLA MATEMATICA $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$ ergo funzione ↓ quando a ↑

(d) SE CONSUMI STESSA QUANTITÀ $x = y$, MRS dipende solo da α e β

MRS $= \frac{\alpha}{\beta}\left(\frac{x}{y}\right)^{\sigma-1}$; MRS $= \frac{\alpha}{\beta}$ -> quando ti trovi sulla bisettrice (consumi $x=y$)

il parametro σ sparisce, conta solo i pesi

$\alpha > \beta$ = x è più importante

$<$ = y

(e) QUANTO CAMBIA MRS VICINO $x = y$ con i casi ($\frac{\alpha}{\beta} = 1$ x semplificare)

CASO 1: $\sigma = 1$

$\sigma - 1 = 0$

MRS $= \left(\frac{x}{y}\right)^0 = 1$

↳ sempre 1, curve di indifferenza = RETTE perfetti sostituti

CASO 2: $\sigma = 0.5$

$\sigma - 1 = 0.5$

MRS $= \left(\frac{x}{y}\right)^{-0.5}$

- primo valore $y/x = 0.9$ -

MRS $= (1.11)^{-0.5} \approx 0.95$

- secondo valore $= 1.1$ -

MRS ≈ 1.05

-> no perfetti sostituti
curve: convesse

=> Conclusioni vicino $x = y$

con $\sigma = 1$ -> MRS non cambia

$\sigma = 0.5$ -> MRS cambia con piccole variazioni

-> il cambiamento MRS misura quanto curva è piegata

2. Utility Maximization – 4.1

$U(t,s) = \sqrt{ts}$

(a) $p_t = 0.10$ $\quad p_s = 0.25$ $\quad I = 1$ $\quad$ maximize U?

1. utilità marginali

$U = (\sqrt{ts})^{1/2} = ts$

$MRS = \frac{MU_t}{MU_s} = \frac{s}{t}$

2. condizioni di ottimo

$\frac{s}{t} = \frac{0.10}{0.25} = 0.4 \; ; \quad s = 0.4t$

3. vincolo di bilancio

$0.10t + 0.25s = 1$

$0.10t + 0.25(0.4t) = 1$

$t = 5 \; ; \quad s = 2$

4. utilità $\quad U = \sqrt{5 \cdot 2} = \sqrt{10}$

(b) $p_t \uparrow = 0.40$ $\quad U = \sqrt{10}$; $I = ?$

1. condizioni di ottimo

$\frac{s}{t} = \frac{0.40}{0.25} = 1.6t$

2. Manteniamo stessa utilità

$\sqrt{ts} = \sqrt{10} \equiv ts = 10$

$t(1.6t) = 10$

$t = 2.5 \; ; \quad s = 4$

3. nuovo reddito

$I = 0.40(2.5) + 0.25(4) = 2$

4.2

(a) $I = 600$ $\quad P_F = 40$ $\quad P_C = 8$, quantità?

$U = w_F^{2/3} \, w_C^{1/3}$ => Cobb-Douglas con esponenti diversi

nel nostro caso $\alpha + \beta = 1$

quindi $w_F^* = \frac{2}{3} \frac{I}{P_F} = 10$

$w_C^* = \frac{1}{3} \frac{I}{P_C} = 25$

N.B

PER UNA FUNZIONE $U = x^{\alpha} y^{\beta}$

DOMANDE OTTIME

$x^* = \frac{\alpha}{\alpha+\beta} \frac{I}{p_x}$

$y^* = \frac{\beta}{\alpha+\beta} \frac{I}{p_y}$

(b) $p_F \downarrow = 20$; max U?

$w_F = 20$ $\quad w_C = 25$ $\quad$ W_F – il consumo raddoppia per prezzo dimezza

(c) Dove è più alto l'U? $U_{(A)} = 13.6$ $\quad U_{(B)} = 21.5$ => utilità maggiore è meglio

COME DARE VALORE MONETARIO ALL' AUMENTO DI U? VARIAZIONE COMPENSATIVA

$e(p, U) = U^0 \cdot \alpha^{-\alpha} \cdot \beta^{-\beta} \cdot p_x^{\alpha} \cdot p_y^{\beta} \approx 379$, $\quad VC = 379 - 600 = -221$ -> miglioramento di benessere

reddito necessario per raggiungere vecchia utilità con i nuovi p

4.3

$U(c,b) = 20c - c^2 + 18b - 3b^2$

(a) quantità? Costo non conta

1. FOC $\frac{dU}{dc} = 20 - 2c = 0$; $c = 10$ $\frac{d^2U}{dc} = -2$

$\frac{dU}{db} = 18 - 6b = 0$; $b = 3$ $\frac{d^2U}{db} = -6$

la funzione è concava poiché sono negativi = MASSIMO GLOBALE

(b) $c + b = 5$ [PROBLEMA DI MASSIMIZZAZIONE CON VINCOLO]

1. $\mathcal{L}$ $\mathcal{L} = 20c - c^2 + 18b - 3b^2 + \lambda(5 - c - b)$

FOC $20 - 2c - \lambda = 0$ $18 - 6b - \lambda = 0$ $5 - c - b = 0$

$\lambda = 20 - 2c$ $\lambda = 18 - 6b$

$20 - 2c = 18 - 6b$

$c - 3b = 1$

$c + b = 5 \rightarrow c = 5 - b$: $(5 - b) - 3b = 1$

$b = 1$; $c = 4$

4.4

$U(x,y) = \sqrt{x^2 + y^2}$ $p_x = 3$ $p_y = 4$ $I = 50$, max U^2 ?

(a) $3x + 4y = 50$; $y = \frac{50 - 3x}{4}$; $x^2 + \left(\frac{50 - 3x}{4}\right)^2$;

$\frac{df}{dx} = 2x + \frac{1}{16} \cdot 2(50 - 3x)(-3)$; $x = 6$; $3(6) + 4y = 50$

$y = 8$

(derivata 1° = 0 quindi punto stazionario) $\Rightarrow U = 10$

VERIFICA ESTREMI VINCOLO

$y = \frac{50}{4} = 12.5$ $x = 0$ $x = \frac{50}{3} = 16.67$ $y = 0$

$U = 12.5$ $U = \sqrt{(16,67)^2} \approx 16.67$

(b) INTERPRETAZIONE GRAFICA

$f''(x) > 0 \rightarrow$ punto di minimo

-CES-

$$U = \sum x_i^{\frac{\sigma-1}{\sigma}}$$

(a) FOC

vincolo di Bilancio $\sum p_i x_i = w$

$$\mathcal{L} = \sum x_i^{\frac{\sigma-1}{\sigma}} - \lambda\left(\sum p_i x_i - w\right)$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_i} = \frac{\sigma-1}{\sigma} x_i^{-1/\sigma} - \lambda p_j = 0$$

$$x_j^{-1/\sigma} = \frac{\sigma}{\sigma-1} \lambda p_j$$

(b) ELASTICITÀ DELLA DOMANDA RISPETTO AL PREZZO

$$x_j = \left(\frac{\sigma-1}{\sigma \lambda p_j}\right)^{\sigma}$$

$$\varepsilon_j = \frac{dx_j}{dp_j} \cdot \frac{p_j}{x_j} = -\sigma$$ => elasticità costante tipico CES

(c) DOMANDA CON INDICE DEI PREZZI

$$P = \left(\sum_{i=1}^{N} p_i^{1-\sigma}\right)^{\frac{1}{1-\sigma}}$$ => sostituendolo nel vincolo =>

$$x_j = p_j^{-\sigma} \cdot \frac{I}{P^{1-\sigma}}$$

4.11

$$U(x,y) = \frac{x^\sigma}{\sigma} + \frac{y^\sigma}{\sigma} \quad ; \quad \frac{x}{y} = \left(\frac{p_x}{p_y}\right)^{1/\sigma-1}$$

(a) max U

1 Lagrange $\quad \mathcal{L} = \frac{x^\sigma}{\sigma} + \frac{y^\sigma}{\sigma} - \lambda(p_x x + p_y y - I)$

2. Derivate $\quad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x} = x^{\sigma-1} - \lambda p_x = 0; \quad \lambda = \frac{x^{\sigma-1}}{p_x}$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial y} = y^{\sigma-1} - \lambda p_y = 0; \quad \lambda = \frac{y^{\sigma-1}}{p_y}$$

3. Uguaglia $\quad \frac{x^{\sigma-1}}{p_x} = \frac{y^{\sigma-1}}{p_y}$ → risolvi per rapporto x/y = $\frac{x}{y} = \left(\frac{p_x}{p_y}\right)^{1/\sigma-1}$

↳ il consumatore sceglie x e y in proporzione ai prezzi elevati a $1/\sigma-1$

(b) GOODS ALLOCATION $\sigma = 0$

$$\frac{x}{y} = \left(\frac{p_x}{p_y}\right)^{1/0-1} = \frac{p_y}{p_x}$$

vincolo $x = y \cdot (p_y/p_x)$ $\quad p_x \cdot \frac{p_y}{p_x} y + p_y y = I$

$$y^* = \frac{I}{2p_y} \; ; \; x^* = \frac{I}{2p_x}$$ → il consumatore divide il reddito a metà, caso classico Cobb-D.

(c) I? se vario σ? con $p_x X / p_y y$

$$\frac{p_x X}{p_y y} = \frac{p_x}{p_y} \cdot \left(\frac{p_x}{p_y}\right)^{1/\sigma-1}$$

SE $\sigma = 0$ → cobb Douglas

$\sigma > 1$ → spesa si concentra sul bene costoso

$\sigma < 1$ → più facilmente sostituibili // più economico

(d) CONTROLLA PROPRIETÀ DI OMOGENEITÀ

funzione indiretta di Utilità : $V(p_x, p_y, I) = U(x^* y^*)$

U è omogenea di grado δ : $U(\alpha x, \alpha y) = \alpha^{\delta} U(x, y)$

quindi se $\cdot \alpha \equiv V(\alpha p_x, \alpha p_y, \alpha I) = U(\alpha x^*, \alpha y^*) = \alpha^{\delta} U(x^*, y^*)$

quando moltiplichiamo prezzi e reddito con stesso fattore non cambia → grado 0 (rapporto ottimale x/y)

funzione di Spesa : $E(\alpha p_x, \alpha p_y, U) = \alpha E(p_x, p_y, U)$ → conferma omogeneità di grado 1

Ex 3 – Pr. 5.4

$U(x,y) = x^{0.3} y^{0.7}$ → Cobb - Douglas

a) uncompensated demand function ? (marshalliana)

$\max\ x^{0.3} y^{0.7}$

s.v $p_x X + p_y Y = I$

N.B.

per une Cobb-D. le domande marshalliane sono:

$x^* = \frac{\alpha}{\alpha+\beta} \frac{I}{p_x}$ $\qquad y^* = \frac{\beta}{\beta+\alpha} \cdot \frac{I}{p_y}$

qui $a+b = 1$ quindi : $x^M = 0.3 \frac{I}{p_x}$ $\quad y^M = 0.7 \frac{I}{p_y}$ ⇒ il consumatore spende 30% del reddito in x, 70% in y

- INDIRECT UTILITY FUNCTION

$V(p_x, p_y, m) = U(x^M, y^M) = \left(0.3 \frac{I}{p_x}\right)^{0.3} \left(0.7 \frac{I}{p_y}\right)^{0.7} \to V = 0.3^{0.3}\, 0.7^{0.7} \frac{I}{p_x^{0.3} p_y^{0.7}}$

→ livello max di utilità dato da P e I; versione di fU in funzione di p e I

- EXPEDITURE FUNCTION - reddito minimo necessario per raggiungere utilità u

$\min\ p_x X + p_y Y$

s.v $x^{0.3} y^{0.7} = u$

1. imposta lagrange $\mathcal{L} = p_x X + p_y Y + \lambda(u - x^{0.3} y^{0.7})$
2. FOC $\quad p_x = \lambda\, 0.3\, x^{-0.7} y^{0.7}$

   $\quad p_y = \lambda\, 0.7\, x^{0.3} y^{-0.3}$
3. rapporto ottimo x/y (condizione tangenza MRS = rapporto prezzi)

   $\frac{p_x}{p_y} = \frac{0.3}{0.7} \frac{y}{x} \Rightarrow \frac{x}{y} = \frac{0.3}{0.7} \frac{p_y}{p_x}$
4. SOSTITUISCI NEL VINCOLO

   sappiamo che : $x = \frac{0.3}{0.7} \frac{p_y}{p_x} y \to \left(\frac{0.3}{0.7} \frac{p_y}{p_x} y\right)^{0.3} y^{0.7} = u$

   separiamo i P : $\left(\frac{0.3}{0.7}\right)^{0.3} \left(\frac{p_y}{p_x}\right)^{0.3} y = u$

   risolvi per Y : $u\left(\frac{0.7}{0.3}\right)^{0.3} \left(\frac{p_x}{p_y}\right)^{0.3}$; $x = \frac{0.3}{0.7} \frac{p_y}{p_x} y$
5. CALCOLA SPESA MINIMA : $e = p_x X + p_y Y$

   → sostituendo x e y : $e = \frac{u\, p_x^{0.3}\, p_y^{0.7}}{0.3^{0.3}\, 0.7^{0.7}}$

N.B

x Cobb-Douglas $e(p_x, p_y, u) = \frac{u\, p_x^{\alpha}\, p_y^{\beta}}{\alpha^{\alpha} \beta^{\beta}}$

(b) COMPENSATED DEMAND FUNCTION (good x)

1. Scrivi funzione di spesa $e = \dfrac{u\, p_x^{0.3}\, p_y^{0.7}}{0.3^{0.3}\, 0.7^{0.7}}$

2. LEMMA DI SHEPHARD

$\dfrac{de}{dp_x} = x^H(p_x, p_y, u)$ -> la derivata di e rispetto p_x dà la domanda compensata di x
la funzione nasce da un problema di minimizzazione, la derivata misura quanto deve aumentare la spesa minima se $p_x \uparrow$

$$x^H = \frac{0.3\, u\, p_y^{0.7}}{0.3^{0.3}\, 0.7^{0.7}}\, p_x^{-0.7}$$

↳ dipende da u, no reddito; se $p_x \uparrow$ $x^H \downarrow$, u costante
≠ marshalliana: dipende da I

(c) Slutsky Equation $= \dfrac{\partial x^H}{\partial p_x} = \underbrace{\dfrac{\partial x^H}{\partial p_x}}_{\text{effetto sost.}} - \underbrace{x^H \dfrac{\partial x^H}{\partial m}}_{\text{reddito}} =$

-> hicksiana
-> marshalliana

1. CALCOLA LATO SINISTRO

$x^H = 0.3\, I\, p_x^{-1}$

$\dfrac{\partial x^H}{\partial p_x} = -0.3\, I\, p_x^{-2} = -\dfrac{0.3\, I}{p_x^2}$ } EFFETTO PREZZO TOTALE

2. CALCOLA SECONDO PEZZO

$\dfrac{\partial x^H}{\partial I} = \dfrac{0.3}{p_x}$

3. EFFET. SOSTITUZIONE

$\dfrac{\partial x^H}{\partial p_x} = -0.7\, C\, p_x^{-1.7}$

$x^H = 0.3\, \dfrac{I}{p_x}$

$x^H = x^H$

5.5

$U(x,y) = xy + y$

(a) MARSHALLIANA E CURVE

1. max $y(x+1)$

SV $p_x X + p_y y = I$

dal vincolo: $y = \frac{I - p_x X}{p_y}$ $\longrightarrow$ $U = \left(\frac{I - p_x X}{p_y}\right)(x+1) = Ix + I - p_x X^2 - p_x X$

$\longrightarrow f(x)' = I - 2p_x X - p_x = 0$

2. FOC $x^M = \frac{I - p_x}{2p_x}$ $\hookrightarrow$ C.E $I > p_x$

3. TROVA y $y = \frac{I - p_x X}{p_y}$; sostituisci x^M $\longrightarrow$ $y^M = \frac{I + p_x}{2p_y}$

– CURVE –

	SE $I \uparrow$	$p_y \uparrow$	$p_x \uparrow$
x	$\frac{\partial x^M}{\partial I} = \frac{1}{2p_x} > 0$	x non dipende	$\frac{\partial x^M}{\partial p_x} = -\frac{I}{2p_x^2}$
y	$\frac{\partial y^M}{\partial I} = \frac{1}{2p_y} > 0$	//	y non ne dipende
	BENE NORMALE	//	

[quando $I \uparrow$ quantità di domanda $\uparrow$]

(b) EXPEDITURE FUNCTION

min $p_x X + p_y y$

SV $y(x+1) = u$

$y = \frac{u}{x+1}$; $e = p_x X + p_y \frac{u}{x+1}$; $(x+1)e = p_x X(x+1) + p_y u$