Ex 8 — 9.2 PRODUCTION FUNCTION

$q = KL - 0.8K^2 - 0.2L^2$

(a) TOTAL PRODUCT E AVERAGE PRODUCT ($k = 10$)

1. sostituire cap

$q = 10L - 0.8(10^2) - 0.2L^2$

$TPL(L) = 10L - 80 - 0.2L^2$ (parabola concava)

2. $AP = q/L$ [AP misura quanto output produce ogni unità di lavoro]

$AP = 10 - \frac{80}{L} - 0.2L$

3. max AP (per trovare il massimo deriviamo)

$\frac{d(AP)}{dL} = \frac{80}{L^2} - 0.2 = 0$

$L = 20$ => AP è massimo con $L = 20$

4. Output prodotto a quel punto

$q = 10(20) - 80 - 0.2(20)^2$; $q = 40$

(b) MP [misura quanto aumenta output aggiungendo 1 unità di L]

$MP = \frac{\partial q}{\partial L} = k - 0.4L$; con $k = 10$ => $MP = 10 - 0.4L = 0$

$L = 25$ => fino a qui il lavoro aumenta la produzione, dopo 25 riduce la produzione

(c) $k\uparrow = 20$

$q = 20L - 0.80(20^2) - 0.2L^2$

$AP = \frac{20L - 320 - 0.2L^2}{L}$;

$\frac{d(AP)}{dl} = \frac{320}{L^2} - 0.2 = 0$

=> $l = 40$

$MP = k - 0.4L$;

$20 - 0.4l = 0$

$L = 50$

(d) returns to scale (dobbiamo vedere cosa succede se raddoppiamo gli input)

$q = kl - 0.8k^2 - 0.2L^2$

$q(2k, 2L) = (2k)(2L) - 0.8(2k)^2 - 0.2(2L)^2 = 4kl - 3.2k^2 - 0.8L^2$

$2q = 2kl - 1.6k^2 - 0.4L^2$

=> $q(2k, 2L) \neq 2q$ - termini quadratici crescono più velocemente, quindi la produzione cresce meno che proporzionalmente

N.B

$f(tk, tl) > tf(k, l)$ => CRESCENTI

$f(tk, tl) < tf(k, l)$ => DECRESCENTI

se termini quadratici negativi $-k^2$

- 9.3

$q = 0.1 k^{0.2} l^{0.8}$; $r = 50$ $w = 50$ $I = 10\,000$ $q = 10$

(a) caso $k = l$

1. sostituisci nella funzione

$q = 0.1 k^{0.2} k^{0.8}$; $q = 0.1 k$

con $q = 10$

$10 = 0.1 k$; $k = 100 = l$

2. costo totale

$C = 50k + 50l$ => $C = 10\,000$

(b) caso: $\frac{MP_k}{r} = \frac{MP_l}{w}$ poiché $r = w$; $MP_k = MP_l$

1. MP

$MP_k = \frac{\partial q}{\partial k} = 0.02 k^{-0.8} l^{0.8}$ $MP_l = 0.08 k^{0.2} l^{-0.2}$

2. $MP_k = MP_l$

$0.02 k^{-0.8} l^{0.8} = 0.08 k^{0.2} l^{-0.2}$ => $l = 4k$

3. sostituisci

$10 = 0.1 k^{0.2} (4k)^{0.8}$; $k \approx 33$ => $l \approx 132$

4. costo $C = 50(33) + 50(132) \approx 8250$

(c) $C = 8250$; più stools?

$8250 / 10 = 825$; $10\,000 / 825 \approx 12.1$ => SAM può produrre 2 bar stool in più

(d) KEEP = 10 stools

SAM vuole 10 BAR STOOLS

- se usa metodo sbagliato spende 10 000
- se usa il metodo corretto ne produce 10 solo con 8250

Carla - vuole 10 stools ma aumento qualità

↳ isoquanto NORM sceglie il punto tangente (costo minimo)

Carla sceglie un altro punto sull'isoquanto ma più caro

— 9.5 —

$q = f(k,l) = Ak^{\alpha} l^{\beta}$

(a) show that : $f_k > 0$; $f_l > 0$; $f_{kk} < 0$; $f_{ll} < 0$; $f_{kl} = f_{lk} > 0$

$f_k = \frac{\partial f}{\partial k} = A\alpha k^{\alpha-1} l^{\beta}$ => tutti i segni positivi quindi >0

$f_l = \frac{\partial f}{\partial l} = A\beta k^{\alpha} l^{\beta-1} > 0$

$f_{kk} = A\alpha(\alpha-1)k^{\alpha-2} l^{\beta}$ ma $(\alpha-1) < 0$ quindi $f_{kk} < 0$

$f_{ll} = A\beta(\beta-1)k^{\alpha} l^{\beta-2}$ $f_{ll} < 0$

$f_{kl} = A\alpha\beta k^{\alpha-1} l^{\beta-1}$ SIMMETRIA DERIVATE $f_{kl} = f_{lk}$

=> prodotti marginali positivi – prodotti marginali decrescenti, input complementari (derivata incrociata positiva)

(b) Elasticità dell'output rispetto agli input $e_{q,k} = \alpha$ & $e_{q,l} = \beta$ $e_{qk} = \frac{\partial q}{\partial k} \cdot \frac{k}{q}$

1. APPLICA ELASTICITÀ:

$e_{qk} = (A\alpha k^{\alpha-1} l^{\beta}) \cdot \frac{k}{Ak^{\alpha} l^{\beta}}$ — semplifica ⟶ $e_{qk} = \alpha$

$e_{ql} = f_l \cdot \frac{l}{q} = (A\beta k^{\alpha} l^{\beta-1}) \frac{l}{Ak^{\alpha} l^{\beta}} = \beta$

=> gli esponenti sono le elasticità dell'output rispetto input cioè +1% capitale -> + 0.3 output
-> + 0.7 output

(c) SCALE ELASTICITY $e_{qt} = \frac{\partial f(tk,tl)}{\partial t} \cdot \frac{t}{f(tk,tl)}$ $t=1$

1. calcolare $f(tk, tl)$

sostituiamo $f(tk, tl) = A(tk)^{\alpha}(tl)^{\beta}$ => $At^{\alpha+\beta} k^{\alpha} l^{\beta}$

2. derivare rispetto a t

$\frac{\partial f(tk,tl)}{\partial t} = Ak^{\alpha} l^{\beta} \frac{d}{dt}(t^{\alpha+\beta}) = Ak^{\alpha} l^{\beta}(\alpha+\beta)t^{\alpha+\beta-1}$

3. applicare formula elasticità

$e_{qt} = \frac{\partial f(tk,tl)}{\partial t} \cdot \frac{t}{f(tk,tl)} = [Ak^{\alpha} l^{\beta}(\alpha+\beta)t^{\alpha+\beta-1}] \cdot \frac{t}{At^{\alpha+\beta} k^{\alpha} l^{\beta}} = \alpha+\beta$

4. valutazione in $t=1$ $e_{q,t} = \alpha+\beta$ -> valore non cambia, quindi sono costanti

(d) QUASI - CONCAVE

↳ una f è quasi concava se: gli insiemi di livello superiore sono convessi cioè isoquanti convessi

=> per una Cobb-Douglas con esponenti positivi è sempre vero

(e) CONCAVE for $\alpha+\beta \leq 1$ but no for $\alpha+\beta > 1$

una funzione è concava se la Hessiana è negativa

$f_{kk} < 0$; $f_{ll} < 0$; $f_{kl} = f_{lk} > 0$

$\det(H) = f_{kk} f_{ll} - f_{kl} = A^2 k^{2\alpha-2} l^{2\beta-2} \alpha\beta(1-\alpha-\beta)$ [tutti positivi tranne $1-\alpha-\beta$]

quindi Hessiana neg. solo se $1-\alpha-\beta \geq 0$ => $\alpha+\beta \leq 1$

se $\alpha+\beta > 1$ -> $\det(H) < 0$ -> NON CONCAVA

9.6

$q = [k^\rho + l^\rho]^{1/\rho}$ dove $\rho \neq 0$

(a) show that $MP_k = (q/l)^{1-\rho}$ and $MP_l = (q/l)^{1-\rho}$

$MP_k = \frac{\partial q}{\partial k} = (k^\rho + l^\rho)^{1/\rho - 1} k^{\rho-1}$ — riscrivi in funzione di q $\rightarrow$ $MP_k = \left(\frac{q}{k}\right)^{1-\rho}$

$MP_l = \frac{\partial q}{\partial l} = (q/l)^{1-\rho}$

(b) show $RTS = (l/k)^{1-\rho}$ and $\sigma = 1/1-\rho$

$RTS = \frac{MP_k}{MP_l} = \left(\frac{l}{k}\right)^{1-\rho}$ $\qquad (l/k)^{1-\rho} = (l/k)^{1/\sigma} \Rightarrow \sigma = \frac{1}{1-\rho}$

(c) output elasticities

$e_{q,k} = \frac{\partial q}{\partial k} \cdot \frac{k}{q} = \frac{k^\rho}{k^\rho + l^\rho}$ $\qquad e_{q,l} = \frac{l^\rho}{k^\rho + l^\rho}$ $\qquad \Rightarrow e_{q,k} + e_{q,l} = \frac{k^\rho + l^\rho}{k^\rho + l^\rho} = 1$

(costant returns to scale)

(d) prove that $q/l = \left(\frac{\partial q}{\partial l}\right)^\sigma$ & $\ln\left(\frac{q}{l}\right) = \sigma \ln\left(\frac{\partial q}{\partial l}\right)$

$MP_l = \left(\frac{q}{l}\right)^{1-\rho} \Rightarrow (MP_l)^\omega = (q/l)^{(1-\rho)\omega \equiv 1} \equiv q/l$

$\ln(q/l) = \ln(MP_l)^\omega = \omega \ln(MP_l)$