Politecnico di Milano
Dipartimento di Scienze e Tecnologie Aerospaziali

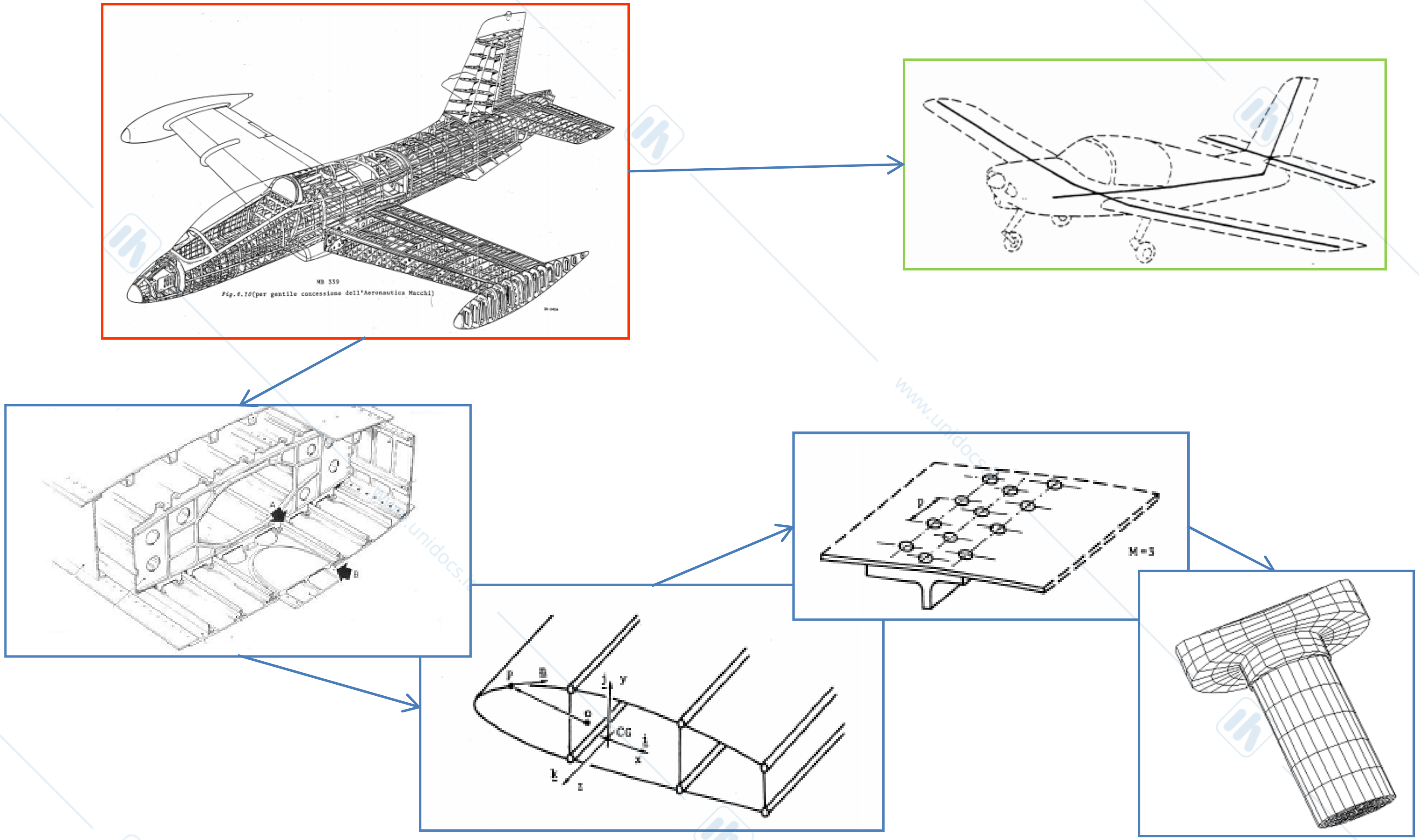
ELEMENTI FINITI: INTRODUZIONE

Corso: Strutture Aerospaziali (L.M. 270)

Gennaio 2017

INTRODUZIONE

Fase di studio - Esempio

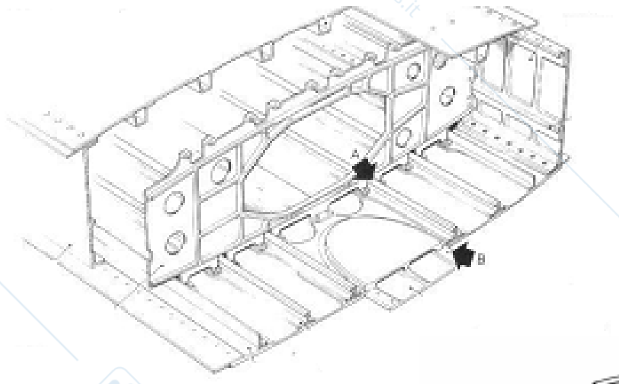


References:
G. Ghiringhelli, dispense del corso di *Progetto di strutture aeronautiche e spaziali* , sito: www.aero.polimi.it
V. Giavotto, *Strutture aeronautiche*, Città studi edizioni, 1995
M. Lanz, lucidi del corso di *Costruzioni aeronautiche*, sito: www.aero.polimi.it
T. H. G. Megson, *Aircraft Structures for Engineering Students*, Elsevier, 2007

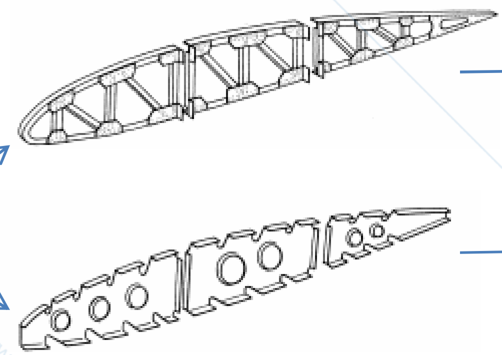
Introduzione

Elementi Finiti
- Discretizzazione
- Funzioni di forma
- PLV
- Matrici di rigidezza
- Esempio

INTRODUZIONE



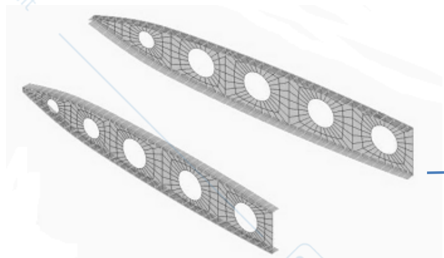
Analisi preliminari sulla centina



Strutture reticolari

Centina (struttura a semiguscio)

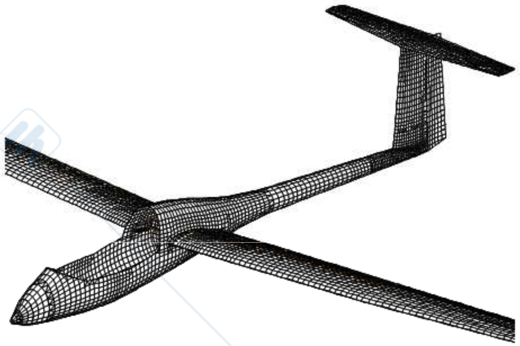
Analisi di dettaglio

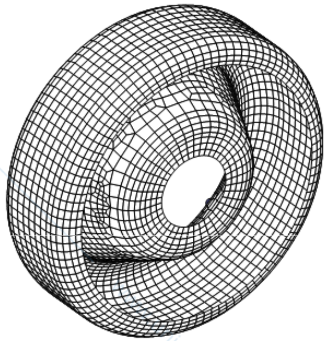


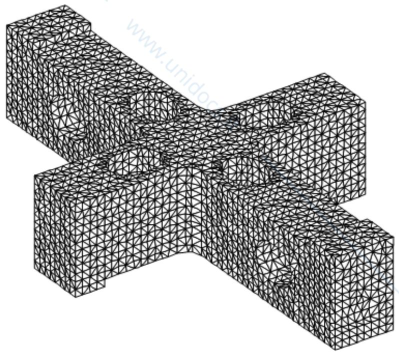
Metodo degli Elementi Finiti

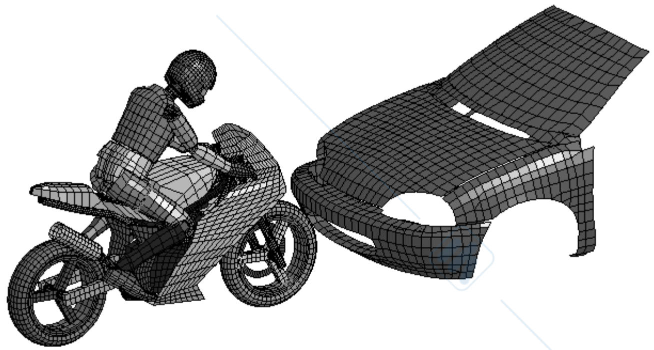
ELEMENTI FINITI

Il metodo degli Elementi Finiti è un metodo applicabile ad un qualunque continuo descrivibile tramite equazioni differenziali soggetti a condizioni al contorno arbitrarie e consente di effettuare una semplificazione sia della geometria del continuo (approccio ingegneristico) sia delle equazioni (approccio matematico)









References:
G. Ghiringhelli, dispense del corso di *Progetto di strutture aeronautiche e spaziali*, sito: www.aero.polimi.it
M. Anghileri: lucidi e dispense del corso di Sicurezza Passiva di Strutture, sito: www.aero.polimi.it

Elementi Finiti

Vantaggi:
- applicato a diverse problematiche lineari e non lineari
- elaborare modelli molto complessi (forma qualsiasi, essere caricata e/o vincolata in modo arbitrario)
- possono essere utilizzati contemporaneamente elementi differenti in forma, proprietà fisiche e dei materiali

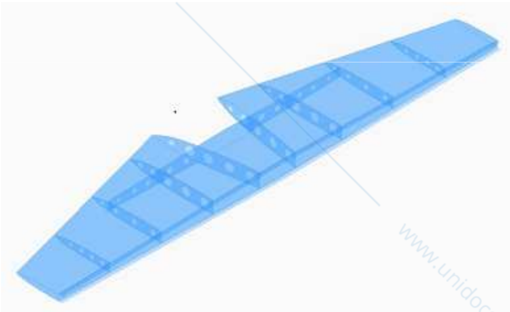
Svantaggi:
- complessità nella realizzazione del modello
- elevato numero di risultati
- non univocità della modellazione
- consapevole utilizzo di un codice ad elementi finiti e degli obiettivi che si vuole raggiungere
- costo computazionale
- sottostima dei possibili errori

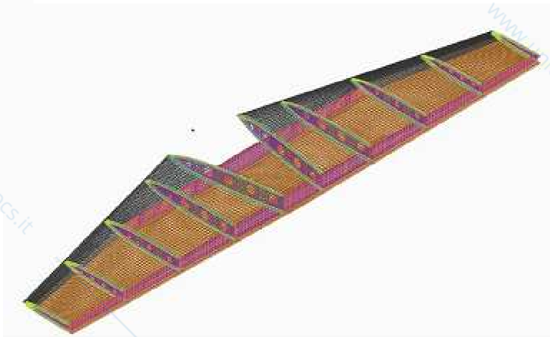
References:
G. Ghiringhelli, dispense del corso di *Progetto di strutture aeronautiche e spaziali*, sito: www.aero.polimi.it
M. Anghileri: lucidi e dispense del corso di Sicurezza Passiva di Strutture, sito: www.aero.polimi.it

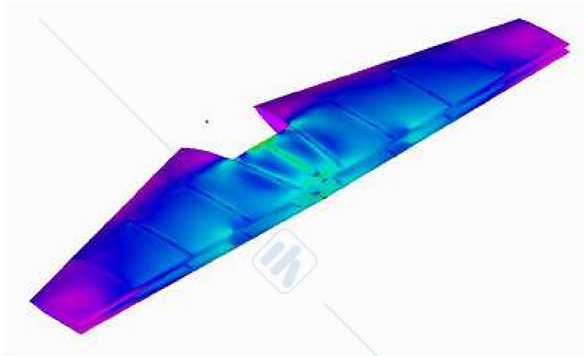
ELEMENTI FINITI

I principali step da sequire per effetuare una analisi agli elementi finiti sono i seguenti:

- Discretizzazione del continuo in un numero finito di elementi
- Discretizzazione del campo incognito (spostamenti) tramite interpolazione di funzioni che ne descrivono l'andamento in punti specifici (nodi)
- Interpolazione delle incognite (funzioni di forma)
- Soluzione del sistema di equazioni
- Calcolo sforzi e deformazioni in ciascun elemento

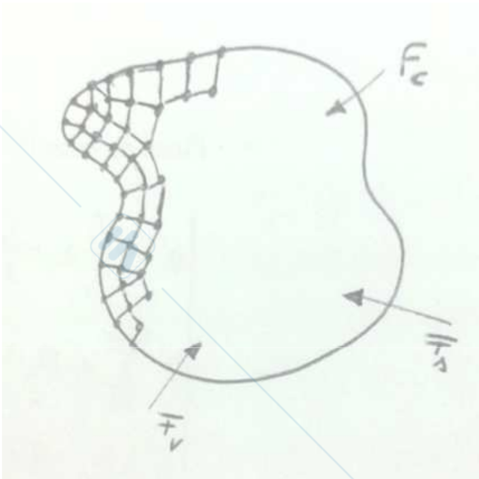






ELEMENTI FINITI

Discretizzazione del continuo



Il continuo è suddiviso in piccole porzioni (elementi) in numero finito (problema più rigido del sistema reale) nei cui nodi si andrà a valutare lo spostamento (incognite del problema agli spostamenti associato).

$$\{f\}=[k]\{s\}$$ Legame costitutivo

Spostamento di un punto generico

Spostamento nodale

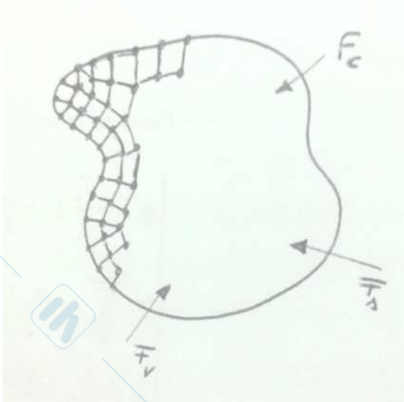
$$\{s\}_j = [N(x_1, x_2, x_3)]_j \, \{u\}_j$$

Funzioni di forma

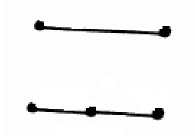
References:
C. Bisagni, dispense del corso di *Instabilità di strutture*, sito: www.aero.polimi.it
G. Ghiringhelli, dispense del corso di *Progetto di strutture aeronautiche e spaziali* , sito: www.aero.polimi.it
V. Giavotto, *Strutture aeronautiche*, Città studi edizioni, 1995

ELEMENTI FINITI

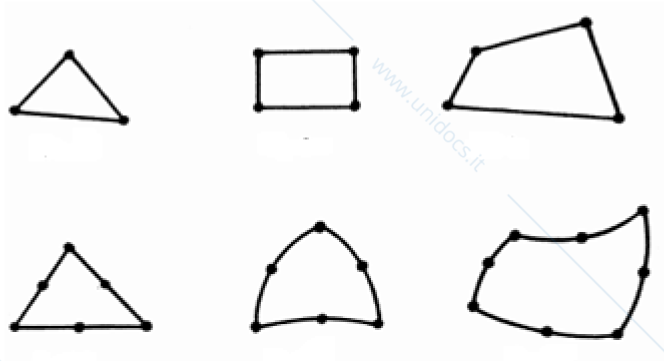
Discretizzazione del continuo



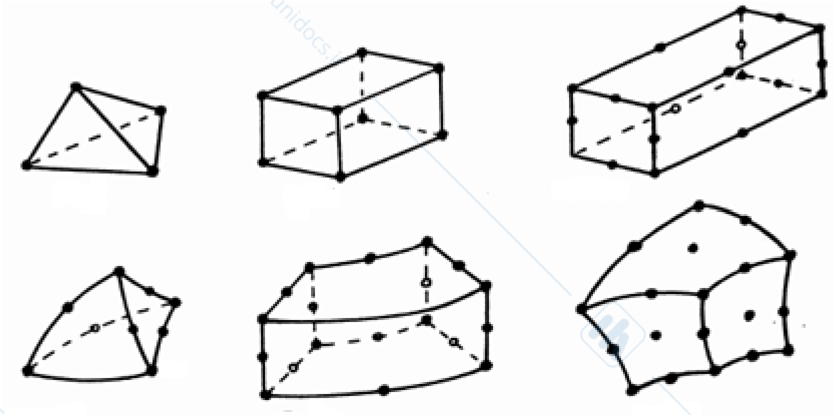
Esempi di elementi monodimensionali



Esempi di elementi bidimensionali



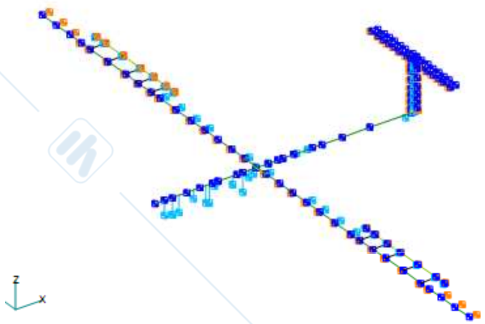
Esempi di elementi tridimensionali

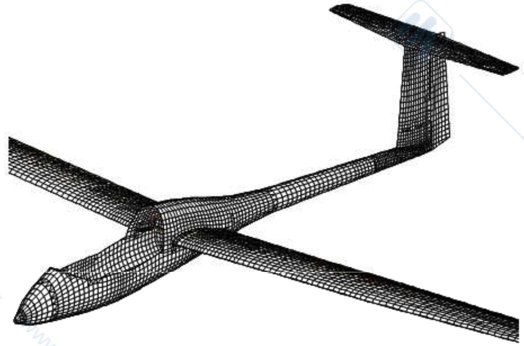


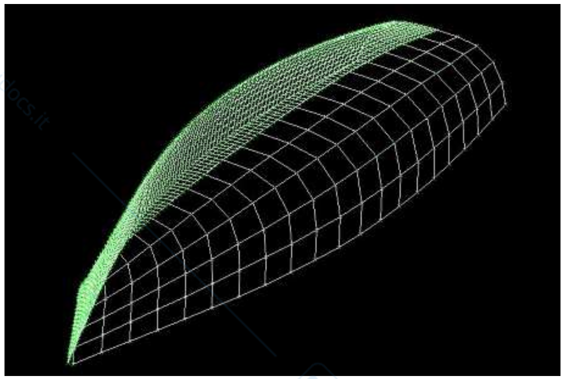
ELEMENTI FINITI

Discretizzazione del continuo

La scelta della tipologia degli elementi dipende dalla struttura che si vuole analizzare e dal livello di approssimazione e dal grado di precisione adottato.







References:
G. Ghiringhelli, dispense del corso di *Progetto di strutture aeronautiche e spaziali* , sito: www.aero.polimi.it
M. Lanz, dispense del corso di Costruzioni Aeronautiche e spaziali, www.aero.polimi.it

ELEMENTI FINITI

Funzioni di forma

$$\{s\}_j = [N(x_1, x_2, x_3)]_j \{u\}_j$$

Le principali caratteristiche delle funzioni di forma:

- Complete
- Continue e regolari
- Conformi alle condizioni al contorno

Le funzioni di forma devono rispettare due condizioni:

- Congruenza degli spostamenti
  - garantire lo spostamento corretto dei nodi di elementi adiacenti (no lacerazioni o compenetrazioni nella struttura)
  - Congruenza interna: N continua, derivabile e con derivata continua
  - Congruenza sui bordi: N deve valere 1 sui bordi
- Convergenza della soluzione
  - All'aumentare del numero di elementi

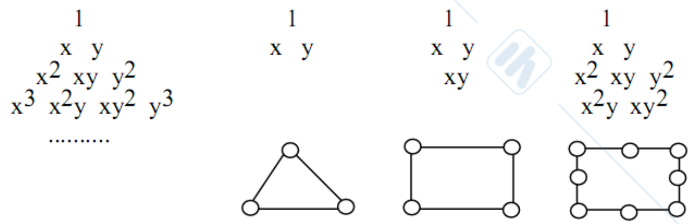
References:
C. Bisagni, dispense del corso di *Instabilità di strutture*, sito: www.aero.polimi.it
G. Ghiringhelli, dispense del corso di *Progetto di strutture aeronautiche e spaziali* , sito: www.aero.polimi.it
V. Giavotto, *Strutture aeronautiche*, Città studi edizioni, 1995
T. J. R. Hughes, The Finite Element Method, Linear static and Dynamic Finite Element Analysis, Dover Publications, 2000

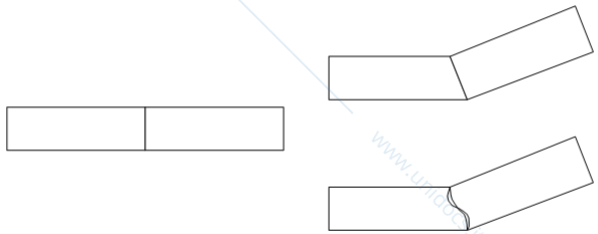
ELEMENTI FINITI

Funzioni di forma

Completezza:
- Garantire spostamenti rigidi
- In grado di descrivere deformaioni costanti e sforzi al contorno finiti

Questi requisiti sono soddisfatti dall'uso di polinomi interpolatori completi (ordine del polinomio: c=a+b con a,b tc $x^a y^b$





Compatibilità:
Continua all'interfaccia tra due elementi
- C0 – spostamenti – polin. O(1)
- C1 – spoatamenti e rotazioni – polin. O(2)

Garanzia di convergenza ad un risultato asintoticamente stabile con il raffinamento del modello.
No info sulla accuratezza dei risultati e sulla velocità di convergenza.

References:
C. Bisagni, dispense del corso di *Instabilità di strutture*, sito: www.aero.polimi.it
G. Ghiringhelli, dispense del corso di *Progetto di strutture aeronautiche e spaziali* , sito: www.aero.polimi.it
V. Giavotto, *Strutture aeronautiche*, Città studi edizioni, 1995
T. J. R. Hughes, The Finite Element Method, Linear static and Dynamic Finite Element Analysis, Dover Publications, 2000

ELEMENTI FINITI

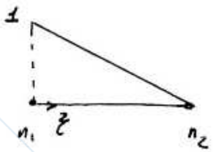
Funzioni di forma

$$\{s\}_j = [N(x_1, x_2, x_3)]_j \{u\}_j$$

ESEMPIO : ELEMENTO 1D (2 nodi lineare)

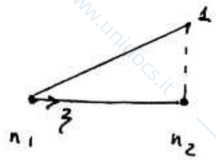
$\xrightarrow{N_i(\xi)}$

$N_1(\xi)$



$N_1(\xi) = 1 - \xi$

$N_2(\xi)$



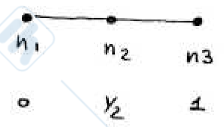
$N_2(\xi) = \xi$

$\xrightarrow{u(\xi)}$ $u(\xi) = N_1(\xi) \cdot u_1 + N_2(\xi)\, u_2$

Elementi Finiti

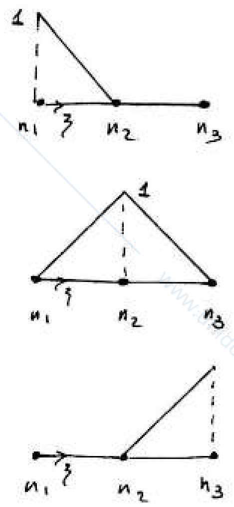
Funzioni di forma

Esempio : Elemento 1D (3 nodi lineare)



$\xrightarrow{N_i(\xi)}$

$N_1(\xi)$



$$N_1(\xi) = \begin{cases} 1-2\xi & (0<\xi<\frac{1}{2}) \\ 0 & (\frac{1}{2}<\xi<1) \end{cases}$$

$$N_2(\xi) = \begin{cases} 2\xi & (0<\xi<\frac{1}{2}) \\ (1-2\xi) & (\frac{1}{2}<\xi<1) \end{cases}$$

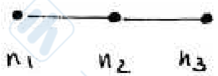
$$N_3(\xi) = \begin{cases} 0 & (0<\xi<\frac{1}{2}) \\ (2\xi-1) & (\frac{1}{2}<\xi<1) \end{cases}$$

$$u(\xi) = N_1(\xi)\cdot u_1 + N_2(\xi)u_2 + N_3(\xi)u_3$$

ELEMENTI FINITI

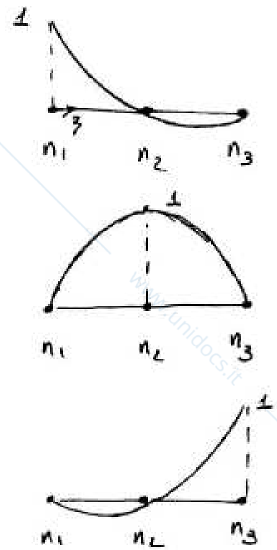
Funzioni di forma

Esempio : Elemento 1D (3 nodi parabolico)



$\xrightarrow{N_i(\xi)}$

$N_1(\xi)$



$$N_1(\xi) = \frac{1}{2}\xi(\xi-1)$$

$$N_2(\xi) = 1-\xi^2$$

$$N_3(\xi) = \frac{1}{2}\xi(\xi+1)$$

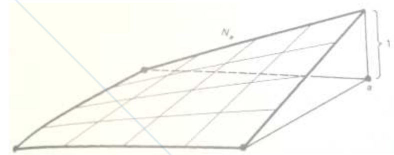
$$u(\xi) = N_1(\xi)u_1 + N_2(\xi)u_2 + N_3(\xi)u_3$$

ELEMENTI FINITI

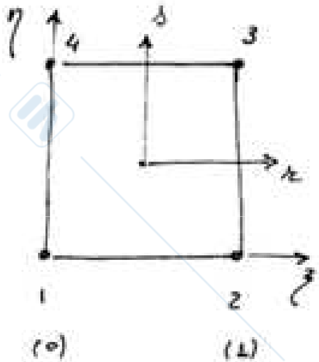
Introduzione

Elementi Finiti
- Discretizzazione
- Funzioni di forma
- PLV
- Matrici di rigidezza
- Esempio

Funzioni di forma



Esempio : Elemento 2D (4 nodi lineare)



$$N_i(\xi,\eta) = N_i(\xi)\, N_i(\eta)$$

$$\begin{cases} N_1(\xi,\eta) = (1-\xi)(1-\eta) \\ N_2(\xi,\eta) = \xi(1-\eta) \\ N_3(\xi,\eta) = \xi\eta \\ N_4(\xi,\eta) = (1-\xi)\,\eta \end{cases}$$

$$u(\xi,\eta) = N_1(\xi,\eta)\,u_1 + N_2(\xi,\eta)\,u_2 + N_3(\xi,\eta)\,u_3 + N_4(\xi,\eta)\,u_4$$

$$N_i(r,s) = N_i(r)\, N_i(s)$$

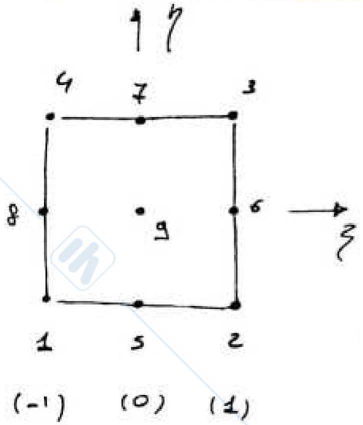
$$\begin{cases} N_1(r,s) = \frac{1}{4}(1-r)(1-s) \\ N_2(r,s) = \frac{1}{4}(1+r)(1-s) \\ N_3(r,s) = \frac{1}{4}(1+r)(1+s) \\ N_4(r,s) = \frac{1}{4}(1-r)(1+s) \end{cases}$$

$$u(r,s) = N_1(r,s)\,u_1 + N_2(r,s)\,u_2 + N_3(r,s)\,u_3 + N_4(r,s)\,u_4$$

ELEMENTI FINITI

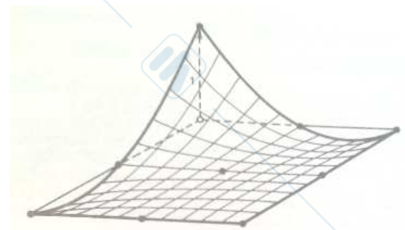
Funzioni di forma

Esempio : Elemento 2D (9 nodi parabolico)



$$N_i(\xi) : \begin{cases} N_1(\xi) = \frac{1}{2}(\xi)(\xi-1) \\ N_2(\xi) = (1-\xi^2) \\ N_3(\xi) = \frac{1}{2}(\xi)(\xi+1) \end{cases}$$

$$N_i(\eta) : \begin{cases} N_1(\eta) = \frac{1}{2}(\eta)(\eta-1) \\ N_2(\eta) = (1-\eta^2) \\ N_3(\eta) = \frac{1}{2}(\eta)(\eta+1) \end{cases}$$



$$N_i(\xi,\eta) = N_i(\xi)\,N_i(\eta)$$

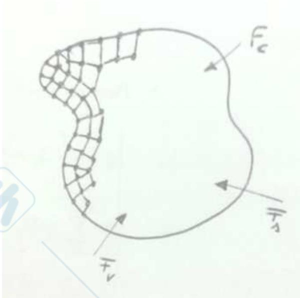
$$\begin{cases} N_1(\xi,\eta) = N_1(\xi)\,N_1(\eta) \\ N_2(\xi,\eta) = N_3(\xi)\,N_1(\eta) \\ N_3(\xi,\eta) = N_3(\xi)\,N_3(\eta) \\ N_4(\xi,\eta) = N_1(\xi)\,N_3(\eta) \end{cases}
\qquad
\begin{cases} N_5(\xi,\eta) = N_2(\xi)\,N_1(\eta) \\ N_6(\xi,\eta) = N_3(\xi)\,N_2(\eta) \\ N_7(\xi,\eta) = N_2(\xi)\,N_3(\eta) \\ N_8(\xi,\eta) = N_1(\xi)\,N_2(\eta) \end{cases}$$

$$N_9(\xi,\eta) = N_2(\xi)\,N_2(\eta)$$

ELEMENTI FINITI

Principio dei lavori virtuali

L'applicazione del PLV consente di risolvere il problema.



Lavoro delle forze di volume

Lavoro delle forze concentrate

$$\int_V \{\delta\epsilon\}^T \{\sigma\}\, dV = \int_V \{\delta s\}^T \{F\}\, dV + \int_S \{\delta s\}^T \{f\}\, dS + \sum \{\delta s\}^T \{F_c\}$$

Lavoro di deformazione

Lavoro delle forze di superficie

- <u>Lavoro di deformazione:</u>

$$\delta W_{def,j} = \int_{V_j} \{\delta\epsilon\}_j^T \{\sigma\}_j\, dV_j$$

$$\epsilon_{ik} = \frac{1}{2}\left(s_{i/k} + s_{k/i}\right) \rightarrow \begin{Bmatrix} \epsilon_1 \\ \epsilon_2 \\ \epsilon_3 \\ \gamma_{12} \\ \gamma_{23} \\ \gamma_{13} \end{Bmatrix}_j = \begin{bmatrix} /1 & 0 & 0 \\ 0 & /2 & 0 \\ 0 & 0 & /3 \\ /2 & /1 & 0 \\ 0 & /3 & /2 \\ /3 & 0 & /1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} s_1 \\ s_2 \\ s_3 \end{Bmatrix}_j \rightarrow \{\epsilon\}_j = [\mathcal{D}]\{s\}_j$$

References:
C. Bisagni, dispense del corso di *Instabilità di strutture*, sito: www.aero.polimi.it
G. Ghiringhelli, dispense del corso di *Progetto di strutture aeronautiche e spaziali* , sito: www.aero.polimi.it
V. Giavotto, *Strutture aeronautiche*, Città studi edizioni, 1995
T. J. R. Hughes, The Finite Element Method, Linear static and Dynamic Finite Element Analysis, Dover Publications, 2000
M. Lanz, dispense del corso di Costruzioni Aeronautiche e spaziali, www.aero.polimi.it

ELEMENTI FINITI

Principio dei lavori virtuali

- Lavoro di deformazione:

$$\delta W_{def,j} = \int_{V_j} \{\delta\epsilon\}_j^T \{\sigma\}_j \, dV_j$$

$$\{\epsilon\}_j = [\mathcal{D}]\{s\}_j \qquad \text{(deformazione)}$$

$$\{\epsilon\}_j = [\mathcal{D}][N]_j\{u\}_j \qquad \text{(relazione tra deformazione e spostamento ai nodi)}$$

$$[B]_j = [\mathcal{D}][N]_j$$

$$\{\epsilon\}_j = [B]_j\{u\}_j$$

$$\{\sigma\}_j = [D]_j\{\epsilon\}_j \qquad \text{(sforzo)}$$

$$\{\sigma\}_j = [D]_j[B]_j\{u\}_j \qquad \text{(relazione tra sforzo e spostamento ai nodi)}$$

$$\delta W_{def,j} = \{\delta u\}_j^T \left(\int_{V_j} [B]_j^T [D]_j [B]_j \, dV_j \right) \{u\}_j = \{\delta u\}_j^T [K]_j \{u\}_j = \{\delta u\}^T \left([\Omega]_j^T [K]_j [\Omega]_j \right) \{u\}$$

$$\delta W_{def} = \sum_{j=1}^{m} \delta W_{def,j} = \{\delta u\}^T [K] \{u\}$$

Dove [K] è la matrice di rigidezza del sistema, ottenuta come la somma dei contributi dei singoli elementi $[K]_j$.

ELEMENTI FINITI

Principio dei lavori virtuali

- Lavoro delle forze esterne:

$$\delta W_{ext} = \int_V \{\delta s\}^T \{F\}\, dV + \int_S \{\delta s\}^T \{f\}\, dS + \sum \{\delta s\}^T \{F_c\}$$

  - Lavoro delle forze di volume:

$$\delta W_{ext,j}^{vol} = \{\delta u\}_j^T \left(\int_{V_j} [N]_j^T \{F\}_j\, dV \right) = \{\delta u\}_j^T \{P\}_j^{vol}$$

$$\delta W_{ext}^{vol} = \sum_{j=1}^{m} \delta L_{ext,j}^{vol} = \sum_{j=1}^{m} \{\delta u\}^T \{\widetilde{P}\}_j^{vol} = \{\delta u\}^T \{P\}^{vol}$$

  - Lavoro delle forze di superficie:

$$\delta W_{ext}^{S} = \{\delta u\}^T \{P\}^S$$

  - Lavoro delle forze concentrate:

$$\delta W_{ext}^{c} = \{\delta u\}^T \{P\}^c$$

ELEMENTI FINITI

Principio dei lavori virtuali

- Lavoro delle forze di inerzia:

$$\delta W_{ext}^{if} = \sum_{j=1}^{m} \delta W_{ext,j}^{if} = -\sum_{j=1}^{m} \{\delta u\}_j^T \left(\int_{V_j} [N]_j^T \rho_j [N]_j \, dV_j \right) \{\ddot{u}\}_j = -\{\delta u\}^T [M] \{\ddot{u}\}$$

- Problema statico e dinamico:

$$[K]\{u\} = \{P\}$$

$$[M]\{\ddot{u}\} + [K]\{u\} = \{P\}$$