AUTOVALORI E AUTOVETTORI

UN NUMERO λ (REALE O COMPLESSO) SI DICE AUTOVALORE DI A ($A \in R^{n,n}$) SE ESISTE UN VETTORE NON NULLO x (REALE O COMPL) SOLUZIONE DEL SIST. OMOGENEO $Ax = \lambda x$

IL VETTORE x È DETTO AUTOVETTORE DI A

λ È UN AUTOVALORE DI A SE, E SOLO SE, LA MATRICE $A - \lambda I$ È SING.
↓ SONO GLI ZERI DEL POLINOMIO CARATTERISTICO $\det(A - \lambda I) = 0$

UNA MATRICE QUADRATA $A \in R^{n,n}$ HA n AUTOVALORI

SE $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ SONO AUTOVALORI DI A MA ANCHE DI A^K — $\lambda_1^K, \dots, \lambda_n^K$ SONO AUT. DI A^K

SE $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ SONO AUT. DI A MA ANCHE DI A^{-1} — $\lambda_1^{-1}, \dots, \lambda_n^{-1}$ SONO AUT DI A^{-1}

D = EIG(A) [X, D] = EIG(A)

QUOZIENTE DI RAYLEIGH

DATA UNA MATRICE DI ORDINE n E UN VETTORE NON NULLO x DI DIMENSIONE n SI DEFINISCE Q DI R IL NUMERO

$$r_A(x) = \frac{x^H A x}{x^H x}$$

x^H VETTORE TRASPOSTO CONIUGATO DI x

SE x SONO TUTTI REALI, $x^H = x^T$ $\boxed{r_A(x) = \lambda}$

SE HO λ, RICAVO x RISOLVENDO IL SISTEMA $Ax = \lambda x$
SE HO x, CALCOLO λ CON IL QUOZ. DI R.

MATRICE SIMMETRICA DEFINITA POSITIVA

UNA MAT SIM A DI ORDINE n È DEFINITA POSITIVA SE, E SOLO SE, I SUOI AUTOVALORI SONO TUTTI POSITIVI

RAGGIO SPETTRALE

DELLA MATRICE A DI ORDINE n, È IL MODULO DELL'AUTOVALORE DI MASSIMO MODULO, CIOÈ

$$\rho(A) = \max_{i=1,\dots,n} \{ |\lambda_i| : \lambda_i \text{ È AUT. DI } A \}$$

MAX(ABS(EIG(A)))

NORMA 2 O SPETTRALE

DI $A \in R^{m,n}$, È IL NUMERO REALE POSITIVO $\|A\|_2 = \sqrt{\rho(A^T A)}$

SE $A \in R^{n,n}$ È SIMMETRICA $\|A\|_2 = \rho(A)$

NORM(A,2) O NORM(A)

MATRICI SIMILI

DUE MATRICI A e B SI DICONO SIMILI SE ESISTE UNA MATRICE S, DI ORDINE n E NON SINGOLARE, TALE CHE

$$S^{-1}AS = B$$

- A e B SONO SIMILI SE HANNO GLI STESSI AUTOVALORI

MATRICI DIAGONALIZZABILI

UNA MAT. A SI DICE DIAGONALIZZABILE SE È SIMILE ALLA MATRICE DIAGONALE (CHE HA I SUOI AUTOVALORI SULLA DIAG. PRINCIPALE), QUINDI

$$S^{-1}AS = D$$

- SE A È DIAGONALIZZABILE $AS = SD$

TEOREMA BAUER - FIKE

A MAT. DIAGONALIZZABILE E S INVERTIBILE, $S^{-1}AS = D$

$\tilde{A}$ UNA PERTURBAZIONE DI A, $\tilde{\lambda}$ AUTOVALORE DI $\tilde{A}$

$$\min |\tilde{\lambda} - \lambda_i| \leq K(S) \|A - \tilde{A}\| \qquad KS = \|S\| \|S^{-1}\|$$

- SE A È SIMMETRICA, $K_2(S) = 1$
- IL CONDIZIONAMENTO DEL PR. DEL CALCOLO DEGLI AUTOVALORI PER UNA M. DIAG. DIPENDE DAL NUMERO DI COND. $K(S)$ DELLA MATRICE DEGLI AUTOVETTORI

$C = \text{COND EIG}(A)$

CALCOLO AUTOVALORI DI UNA MATRICE

2 METODI:
- MET. PER L'APPROSSIMAZIONE DI UN SOLO AUTOVALORE
- MET. PER L'APPR. SIMULTANEA DI TUTTI GLI AUTOVALORI

METODI PER L'APPR. DI UN AUTOVALORE

1) METODO DELLE POTENZE

- CALCOLA L'AUTOVALORE DI MODULO MASSIMO DI UNA MATRICE

SI COSTRUISCE PER $m = 0, 1, 2$ LA SUCCESSIONE DI VETTORI

① $w^{(m)} = \dfrac{z^{(m)}}{\|z^{(m)}\|_2}$ ② $z^{(m+1)} = Aw^{(m)}$ ③ $\lambda_1^{(m)} = (w^{(m)})^T z^{(m+1)}$

MET. PER NON CONVERGE:
- $\lambda_1 = -\lambda_2$
- λ_1 E λ_2 SONO COMPL. CONIUGATI

LA CONV È $\left|\dfrac{\lambda_2}{\lambda_1}\right|^m \to 0$ PER $m \to +\infty$

SE $|\lambda_2| \approx |\lambda_1|$ CONV. LENTA

METODO POTENZE INVERSE

BISOGNA CONOSCERE UN'APPROSSIMAZIONE P DI λ

$\lambda = p + \frac{1}{\mu}$

[X, D] = EIGS(A, K) [X, D] = EIGS(A, K, P)

METODO QR → METODO PER L'APPR. SIMULTANEA
LA CONV. È GARANTITA SE LA MATRICE A HA AUTOVALORI TUTTI DISTINTI IN MODULO

$A_2 = Q_1^T A_1 Q_1$

VALORI SINGOLARI E DECOMPOSIZIONE SVD

VALORE SINGOLARE → PERMETTE DI MISURARE LA DISTANZA DI UNA MATRICE DALL'INSIEME DELLE MATRICI SINGOLARI

MATRICI RETTANGOLARI < VALORE SINGOLARE, RANGO, PSEUDO-INVERSA

DECOMP. A VALORI SINGOLARI

$A \in \mathbb{R}^{m,n}$ $A = USV^T$ $S = diag(s_1, \dots, s_p)$

U, V ORTOGONALI

s_i → SONO I VALORI SINGOLARI

• SI PUÒ ANCHE SCRIVERE COME $U^T A V = S$

CONDIZIONAMENTO CALCOLO VALORI SINGOLARI
È SEMPRE BEN CONDIZIONATO

$A \in \mathbb{R}^{m,n}$, $\tilde{A}$ LA PERTURBAZIONE $|s_i - \tilde{s}_i| \leq \|A - \tilde{A}\|_2$

s_i $\tilde{s}_i$

TEOREMA

$\min \|A - B\|_2 = \|A - A_k\|_2 = s_{k+1}$ PER DETERMINARE MATRICI PIÙ VICINE

HILBERT ORDINE 8, H_r DI RANGO 5 PIÙ VICINA A H

s_{k+1} 5 + 1 = 6

```
H=hilbert(8)
[U,S,V]=svd(H)
r=5
H_r=U(:,1:r)*S(1:r,1:r)*V(:,1:r)';
norm(H-H_r)-S(6,6)
```

```
r=rank(A)    r=rank(A,toll)
```

UTILIZZI SVD

CALCOLO DEL RANGO DI UNA MATRICE

$r = RANK(A)$

CALCOLO DEL CONDIZIONAMENTO DI UNA M.

$K_2(A) = \|A\|_2 \cdot \|A^{-1}\|_2 = \frac{s_1}{s_n}$

RISOLUZIONE DEL SIST LIN. $Ax = b$

MIGLIORE DI $PA = LU$ SOLO SE SISTEMA È MALCOND. E PROSSIMO AD ESSERE SINGOLARE

$\boxed{C.C. = O\left(\frac{32}{3} n^3\right)}$

(*)

RISOLUZIONE SIST. LINEARE SCARTATO

$x^* = A^+ b$

MATRICE PSEUDO-INVERSA DI MOORE-PENROSE

A^+, SE $A \in \mathbb{R}^{n,n}$ E $RANK(A) = n$ $A^+ = A^{-1}$

$X = PINV(A)$ $X = PINV(A, TOL)$

5) RISOLUZIONE SIST. LIN SOTTODETERMINATO

$\begin{cases} Sy = U^T b \\ V^T x = y \end{cases}$ $y_i^* = \frac{d_i}{s_i}$ $Sy = d$

$x^* = V y^*$

DATO UN SISTEMA LINEARE $Ax = b$, x?

SE A
- SIMMETRICA E DEF POS → CHOLESKY ($A = R^T R$)
- RETTANGOLARE → QR ($A = QR$)
- IN GENERALE → $PA = LU$

○ SOLUZIONE SIST SCARTATO

$x^* = A^+ b$

$X = PINV(A) * b$

(*)

$USV^T x = b \Rightarrow S\underbrace{V^T x}_{y} = U^T b$

$\begin{cases} Sy = U^T b \Rightarrow y \\ V^T x = y \Rightarrow x = Vy \end{cases}$