CRITERIO DELL'INTERPOLAZIONE

ASSEGNATI $m+1$ DATI (x_i, y_i) IL CR. DELL'INTERPOLAZIONE CONSISTE NEL TROVARE UNA FUNZIONE $f(x)$ SODDISFACENTE LE SEGUENTI CONDIZIONI: $f(x_i) = y_i \quad i = 1, \dots, m+1$

I PUNTI (x_i, y_i) SONO DETTI NODI DI INTERPOLAZIONE

FUNZIONI INTERPOLANTI:
- POLINOMIALI
  - RAPPRESENTAZIONE MONOMIALE
  - RAPPRESENTAZIONE DI LAGRANGE
- POLINOMIALI A TRATTI
  - SPLINE DI ORDINE 1
  - SPLINE DI ORDINE 3

$m+1 =$ PUNTI
$m =$ PUNTI $- 1$

IL POLINOMIO INTERPOLANTE I $m+1$ DATI È UNICO (SE $x_i \neq x_j$)

RAPPRESENTAZIONE MONOMIALE

DEL POLINOMIO INTERPOLANTE È $p_m(x) = c_1 x^m + c_2 x^{m-1} + \dots + c_m x + c_{m+1}$

OVE I COEF. c_i, $i = 1, \dots, m+1$ SONO DETERMINATI IMPONENDO CHE $p_m(x)$ SODDISFI LE CONDIZIONI DI INTERPOLAZIONE

$c = \text{POLYFIT}(x, y, m)$ $\quad p = \text{POLYVAL}(c, z)$

$m+1$ INCOGNITE
$m+1$ EQUAZIONI

È TANTO PIÙ MAL CONDIZIONATO, QUANTO PIÙ GRANDE È m.

- SE $m+1 >> 100$ DEVO USARE RAPPRESENTAZIONI ALTERNATIVE

RAPPRESENTAZIONE DI LAGRANGE

DEL POLINOMIO INTERPOLANTE I DATI (x_i, y_i) CON $x_i \neq x_j$ È $p_m(x) = \sum_{j=1}^{m+1} y_j \ell_j(x)$

$\ell_j(x)$ SONO DETTI POLINOMI FONDAMENTALI DI LAGRANGE

$$\ell_j(x) = \frac{(x - x_1) \cdots (x - x_{j-1})(x - x_{j+1}) \cdots (x - x_{m+1})}{(x_j - x_1) \cdots (x_j - x_{j-1})(x_j - x_{j+1}) \cdots (x_j - x_{m+1})} \qquad \ell_j(x_i) = \begin{cases} 1 & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases}$$

ES $(0, 1)\ (1, -1)\ (2, 1)\ (1/2, 2)$ $\quad$ 4 DATI $\quad m = 4 - 1 = 3$

$$\ell_1(x) = \frac{(x-1)(x-2)(x-1/2)}{(0-1)(0-2)(0-1/2)} \qquad \ell_2(x) = \frac{(x-0)(x-2)(x-1/2)}{(1-0)(1-2)(1-1/2)}$$

COSÌ ANCHE PER $\ell_3(x)$ E $\ell_4(x)$

$$p_3(x) = 1 \cdot \ell_1(x) - 1 \cdot \ell_2(x) + 1\, \ell_3(x) + 2\, \ell_4(x)$$

	R. MONOMIALE	LAGRANGE
PRO	AGGIUNGENDO DATI AGGIUNGO SOLO UN'EQUAZIONE	BEN CONDIZIONATO QUALUNQUE SIA IL NUMERO DI NODI
CONTRO	MAL CONDIZIONATO SE $m+1 >> 100$	AGGIUNGENDO DATI DEVO RIFARE TUTTO DA CAPO

CONVERGENZA DEL POLINOMIO DI INTERPOLAZIONE

- ERRORE DI INTERPOLAZIONE È LA FUNZIONE

$$E_m(x) = f(x) - p_m(x)$$ → POLINOMIO INTERPOLANTE

$E_m(x) = 0$ PER $x = x_i$; $E_m(x_i) = f(x_i) - p_m(x_i) = 0$

$E_m(x) \equiv 0$ PER OGNI $x \in [a,b]$ E PER OGNI FUNZIONE f POLINOMIALE DI GRADO MINORE O UGUALE A m; $f = p$ PER L'UNICITÀ DEL POLINOMIO $p \equiv p_m$

- NORMA INFINITO È LA QUANTITÀ

$$\|E_m(x)\|_\infty = \max_{x \in [a,b]} |E_m| = \max_{x \in [a,b]} |f(x) - p_m(x)|$$

SUPPONENDO CHE f SIA CONTINUA IN $[a,b]$ E CHE I PUNTI x_i SIANO TUTTI INTERNI A $[a,b]$

LA SUCCESSIONE DI POLINOMI $\{p_m\}_{m \in \mathbb{N}}$ CONVERGE UNIFORMEMENTE A f SE, E SOLO SE, $\lim_{m \to \infty} \|\underbrace{f - p_m}_{E_m(x)}\|_\infty = 0$ ⚠

- QUESTA RELAZIONE NON VALE SEMPRE SE HO UNA SUCC. DI NODI DISTINTI IN $[a,b]$ E LA FUNZIONE f È CONTINUA IN $[a,b]$

NODI DI CHEBYSHEV-LOBATTO

(ALTERNATIVA AI NODI EQUISPAZIATI)

$$z_i = -\cos\left(\frac{(i-1)\pi}{m}\right) \in [-1, 1], \quad i = 1, \dots, m+1$$

NODI DI CHEBYSHEV (ALTERNATIVA AI NODI EQ.)

$$z_i = -\cos\left(\frac{(2i-1)\pi}{2(m+1)}\right) \in (-1, 1), \quad i = 1, \dots, m+1$$

- SE L'INTERVALLO NON È $[-1, 1]$ O $(-1, 1)$

$$x_i = \frac{b-a}{2} z_i + \frac{b+a}{2}, \quad i = 1, \dots, m+1$$

RAPPRESENTANO I NODI DI C. O C-L NEL NUOVO INTERVALLO

TEOREMA FONDAMENTALE

SIA $\{p_m(x)\}$ LA SUCCESSIONE DEI POL. INTERPOLANTI $f(x)$ NEI NODI $x_i \in [a,b]$ DI C OPPURE C-L. SE $f \in C^k([a,b])$ $k \geq 1$, ALLORA

$$\|\underbrace{f - p_m}_{E_m(x)}\|_\infty = O\left(\frac{\log m}{m^k}\right), \quad m \to \infty$$

- QUINDI

$$\lim_{m \to +\infty} \|E_{m}(x)\| = \lim_{m \to +\infty} \frac{\ln n}{m^k}$$

LA CONVERGENZA È TANTO PIÙ RAPIDA, QUANTO PIÙ È REGOLARE f

LA CONV. UNIF. NON È GARANTITA SE f È SOLO CONTINUA

AUM m NON AUM PER FORZA L'APPROSSIMAZIONE

FUNZIONI POLINOMIALI A TRATTI

DI GRADO d ASSOCIATA A UNA PARTIZIONE DELL'INTERVALLO $[a,b]$ È UNA FUNZIONE CONTINUA IN $[a,b]$ E DEFINITA DA UN'UNIONE DI TRATTI CONTIGUI DI POLINOMI ALGEBRICI DIVERSI, CIASCUNO DI GRADO d.

- LE F.P. A TRATTI, IN GENERE, NON SONO DERIVABILI NEI PUNTI DI RACCORDO

• SI DEFINISCE SPLINE DI ORDINE d INTERPOLANTE f NEI NODI ASSEGNATI x_i, UNA FUNZIONE $S_d(x)$ SODDISFACENTE:

i) $S_d(x)$ È UN POLINOMIO DI GRADO (AL PIÙ) d
ii) LA DERIVATA $S_d^{(k)}(x)$ DI ORDINE k DI $S_d(x)$ È UNA FUNZIONE CONTINUA IN $[a,b]$
iii) $S_d(x_i) = y_i$

SPLINE DI ORDINE 1

S = INTERP1 (X, Y, Z)

AUM IL N° DEI NODI DI INTERPOLAZIONE IN UN INTERV $[a,b]$ PER UNA DATA FUNZIONE CONTINUA f, LA SUCCESSIONE DELLE SPLINE DI ORDINE 1 E INTERPOLANTI f CONVERGE UNIF. A f.

• TEOREMA

$$\| f - S_1 \|_\infty = O(h^2)$$

$$\lim_{h \to 0} \| f - S_1 \|_\infty = \lim_{h \to 0} h^2$$

LA CONV. UNIF È GARANTITA QUALUNQUE SIA LA FUNZIONE CONTINUA E QUALUNQUE SIA LA SCELTA DEI NODI x_i PERCHÉ

- SPLINE → UNIONE DI PUNTI → SE N = 4 → 3 INTERVALLI E QUINDI 3 RETTE
- SPLINE DI ORDINE 1 SONO UNICHE (ESISTE SOLO UNA RETTA PASSANTE PER DUE PUNTI)

PLOT(X, Y)

SPLINE DI ORDINE 3 (SPLINE CUBICHE POLINOMIO DI GRADO 3)

DEVO DEFINIRE 4 CONDIZIONI PER CIASCUN SOTTOINTERVALLO   4N CONDIZIONI

- $n-1$ CONDIZIONI DI CONTINUITÀ DI $S_3^{(k)}$
- $n+1$ CONDIZIONI DI INTERPOLAZIONE NEI NODI

$$3(n-1) + (n+1) = 4n - 2 \text{ CONDIZIONI}$$

• 2 CONDIZIONI AGGIUNTIVE

SPLINE NATURALI
i) - iii)
$S_3^{(2)}(x_1) = 0$
$S_3^{(2)}(x_{n+1}) = 0$
1

SP. "NOT-A-KNOT"
i) - iii)
$S_3^{(3)}$ È CONTINUA IN x_2 E IN x_n
2

S. VINCOLATE
i) - iii)
$S_3^{(1)}(x_1) = f'(x_1)$
$S_3^{(1)}(x_{n+1}) = f'(x_{n+1})$
3

TEOREMA (SP. CUBICHE)

SE UNA SP. CUBICA SODDISFA LE CONDIZIONI AGGIUNTIVE ① o ② o ③, SE $f \in C^2([a,b])$ ALLORA

$$\|f - S_3\|_\infty = O(h^2) \quad h \to 0$$

INOLTRE, SE SODDISFA ② o ③, SE $f \in C^4([a,b])$

$$\|f^{(p)} - S_3^{(p)}\|_\infty = O(h^{4-p}), \quad h \to 0 \quad p = 0,1,2,3$$

VALE ANCHE QUANDO $f \in C^k([a,b])$ CON $k > 4$

S=SPLINE(X,Y,Z) S. "NOT-A-KNOT"

S=SPLINE(X,[YD1 Y YDN],Z) SP. "VINCOLATE"

t=TRAPZ(X,Y)

POLINOMI	HP SUI NODI	VEL DI CONVERGENZA AUMENTA CON LA CLASSE DI f $O\left(\frac{\ln n}{n^k}\right)$
SPLINE	NO HP SUI NODI h^2: $S_1(x)$ h^4: $S_3(x)$	NO SATURAZIONE DELLA VEL. DI CONVERGENZA S_3 APPROSSIMA $f^{(p)}$

SE ALTAMENTE REGOLARE → F. POLINOMIALI

SE POCO REGOLARE → SPLINE (F. POL A TRATTI)

3 NORMA DI UN VETTORE

- NORMA 1

$\|x\|_1 = \sum_{i=1}^{m} |x_i|$

NORM(X,1)

- NORMA 2 o EUCLIDEA

$\|x\|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^{m} x_i^2}$

NORM(X,2) o NORM(X)

- NORMA INFINITO

$\|x\|_\infty = \max_{1 \le i \le m} |x_i|$

NORM(X, INF)

NORMA DI UNA MATRICE

- NORMA 1

$\|A\|_1 = \max_{1 \le j \le n} \sum_{i=1}^{m} |a_{ij}|$

(SOMMA GLI EL. SULLA STESSA COLONNA, PRENDI IL MAX)

NORM(A,1)

- NORMA 2 o SPETTRALE

(DEFINITA IN SEGUITO)

- NORMA INFINITO

$\|A\|_\infty = \max_{1 \le i \le m} \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|$

(SOMMA TUTTI GLI EL SULLA STESSA RIGA, PRENDI IL MAX)

NORM(A, INF)

DATA UNA NORMA DI MATRICE E UNA DI VETTORE, LE NORME SONO **COMPATIBILI** SE $\|Ax\|_{(\cdot)} \le \|A\|_{(\cdot)} \|x\|_{(\cdot)}$