ALGEBRA E GEOMETRIA

1. Quando devo fare la combinazione lineare di più vettori se tutti i $\lambda_i = 0$ allora i vettori sono linearmente indipendenti, altrimenti se ho $\lambda_1 = \lambda_2 / 0 = 0$ i vettori sono linearmente dipendenti e in questo caso li posso scrivere come combinazione lineare degli altri.

2. W_1 è in somma diretta con $W_2 \Leftrightarrow W_1 \cap W_2 = \phi$

3. Per verificare che sia una base bisogna verificare che i vettori siano linearmente indipendenti.

4. $\dim(W_1 + W_2) = \dim W_1 + \dim W_2 - \dim(W_1 \cap W_2)$ → $= 0$ solo se i vettori sono in somma diretta

5. $\dim V = x$, x è il numero di vettori linearmente indipendenti che costituiscono una base. L è il numero di incognite del sistema.

6. Per trovare una base di $U \cap V$ quando ho i vettori della base dell'uno e dell'altro pongo $w \in U \cap V$: $w = \alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 = \beta_1 v_1 + \beta_2 v_2$ la dimensione è data dal numero di incognite del sistema.

7. Per trovare una base di $U + V$, uso la formula di Grassmann per vedere che dimensione ha $U + V$ e in base alla dimensione aggiungo o tolgo vettori di U e V verificando sempre che i vettori siano linearmente indipendenti.

8. Quando devo trovare W avendo solo V trovo $\dim W$ tramite la formula di Grassmann e poi prendo due/tot vettori alla base canonica.

9. Quando devo dire se un vettore appartiene ad un sottospazio o per quali valori (incognite) quel vettore appartiene al sottospazio allora devo fare la combinazione lineare dei vettori del sottospazio e porla uguale al vettore dato.

10. Quando devo trovare l'equazione cartesiana pongo la combinazione lineare dei vettori della base uguale a (x, y, z, w) poi prendo in considerazione solo le equazioni che dopo un po' di passaggi non contengono più λ.

11. Per trovare base di $U \cap V$ avendo le equazioni cartesiane di U e V metto a sistema tutte le equazioni.

12. Quando il sottospazio ambiente è di $\mathbb{R}^n$ e devo trovare una base di $U + V$ e $\dim(U + V) = n$ allora posso prendere i vettori della base canonica di $\mathbb{R}^n$

13. Per verificare che due sottospazi sono in somma diretta verifico cosa è $w = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 = \beta_1 u_1 + \beta_2 u_2$ e se $w \neq (0, 0, \dots, 0)$ allora i vettori non sono in somma diretta. Il vettore che ne esce o i vettori (a seconda della dimensione), è una base di $U \cap V$.

14. Per trovare, dati U e V, L : $L \oplus U = L \oplus W = \mathbb{R}^4$ so che la dimL è tot (me la ricavo) e per far sì che L sia una base di $\mathbb{R}^4$ L,U e L,W cioè i rispettivi vettori devono essere linearmente indipendenti.

15. Quando ho un vettore e un sottospazio generato e devo trovare l'equazione cartesiana generata dall'insieme delle soluzioni: $\underline{u} + \lambda v_1 + \lambda v_2 = (x, y, z, w)$ (non metto mai λ sul vettore ax).

16. Per dimostrare che, dato un vettore ed un'equazione, se il vettore appartiene all'equazione basta sostituire il vettore nell'equazione e vedere se l'equazione è verificata.

17. Quando devo completare un vettore con altri vettori scelgo vettori della base canonica e verifico che i vettori siano linearmente indipendenti.

18. Quando devo trovare un vettore/sottospazio che sia somma diretta con altri 2 (anche se questi sono di diversa dimensione) basta che siano linearmente indipendenti, cioè che la loro intersezione sia pari a zero.

19. f è iniettiva se e solo se $\ker f = \{0_V\}$

20. f è suriettiva solo se $\mathrm{Im} f = W$

21. $\dim V = \dim \ker f + \dim \mathrm{Im} f$ → nullità + rango

22. Per trovare una matrice rispetto alla base canonica trovo $f\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$ sostituendo il vettore (1,0,0) e gli altri di conseguenza all'interno della funzione.
Se invece devo cambiare la base di arrivo prendo la f( ) e la pongo uguale alla combinazione lineare dei 2 nuovi vettori, la λ che trovo sono la prima colonna della matrice.

23. Formula del cambiamento di base: $A' = M^{W'}_{W} \cdot M^{W}_{V} \cdot (M^{V'}_{V})^{-1}$

24. Un sistema ammette soluzione quando $rk(A) = rk(A|B)$ ma diverso ($\neq$) dal numero massimo di righe allora ammette ∞ soluzioni che dipendono da {numero di righe max} - {righe l.i.}
se $rk(A) \geq rk(A|B)$ = numero di righe max allora ammette un'unica soluzione (ed in questo caso λ è invertibile)

25. Per trovare $\dim \mathrm{Im} f$ = rango f pongo la matrice in scala e trovo la dim = vettori l.i = righe (colonne) l.i. Una volta determinata la $\dim \mathrm{Im} f$ scelgo n vettori di partenza l.i che formino una base.

26. Quando devo trovare t tale per cui $g(v_1) = w_1$, $g(v_2) = w_2$, $g(v_3) = w_3$ devo prima trovare la dipendenza lineare, pongo la combinazione degli $v_i = 0$ e trovo le relazioni tra i λ e poi sostituisco queste a $\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \ldots = 0$ applico il concetto di funzione lineare: $\lambda_1 f(v_1) + \lambda_2 f(v_2) + \ldots$ e trovo t

27. Per trovare $\dim \ker f$ mi ricavo dalla matrice un sistema di equazioni che pongo uguale a 0 e trovo la base di $\ker f$

28. Le $f(\;) = w_i$ vanno disposte assolutamente in colonne

29. Quando devo trovare $\dim \ker f$ avendo la matrice di f scrivo $A\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\\vdots\end{pmatrix}$

30. Per trovare $u: f(u)=v$ ($f(u)=A\cdot u$) pongo $A\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\end{pmatrix}=v$ e trovo $f^{-1}(u)$

31. Quando devo trovare $U\cap V$ (U vettori, V equazione) trovo la combinazione tra i vettori che sostituisco nelle equazioni al posto delle x, trovo a e poi sostituisco in $w=av_1+av_2$

32. Quando ho la matrice della funzione lineare A per trovare $t\in v t=($ $)$ tale per cui questo deve appartenere a $\ker f(\{v: f(v)=0\})$ allora pongo $A: v(t)=0$ e trovo t.

33. Quando ho un vettore (0,0,0) che "fa parte" della base lo tengo, cioè non lo posso cancellare.

34. Quando devo verificare che $f(U)=W$ allora calcolo base (e vettori) di U, trovo f(U) tramite $A\cdot u$ e vedo se f(U) soddisfa le equazioni di W (sostituisco al suo interno). Verifico che $\dim \mathrm{Im}\, U=\dim W$

35. Quando dico che dei vettori appartengono a $f^{-1}v \rightarrow f(v_1)=v$ e $f(v_2)=v$

36. Quando devo determinare $U\cap V$ posso o mettere a sistema le equazioni o a fare la combinazione lineare tra i vettori di U e di W.

37. Se A è invertibile allora $\det A\neq 0$

38. · $\det C=\det A$ se scambio n° pari di volte, $\det C=-\det A$ se scambio n° dispari
· $\det I_n=1$
· due righe uguali o proporzionali $\rightarrow \det A=0$
· $\det A=\det A^t$
· se $\det A=0$ o una riga è 0, non è invertibile, 2 righe sono uguali o proporzionali

39. $A^{-1}=\dfrac{A^{*t}}{\det A}\leftarrow$ matrice cofattore traversa.

40. Due matrici sono simili se $A=P^{-1}BP$ dove P è una matrice del cambiamento di base ($\det A=\det B$).

41. v è autovettore se $f(v)=\lambda v$ rispetto all'autovalore λ.

42. Le soluzioni di $\det(A-\lambda I_n)$ sono gli autovalori di f, la molteplicità degli autovalori è la molteplicità algebrica

43. L'insieme delle soluzioni $(A-\lambda I_n)\begin{pmatrix}x_1\\\vdots\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$ è autovettore relativo all'autovalore λ. La dimensione dell'autospazio creato dagli autovettori è la molteplicità geometrica (autovettori l.i)

44. Dati m autovalori ci sono m autovettori indipendenti.

45. A è simile alla matrice diagonale costituita dagli autovalori $\begin{pmatrix}\lambda_1&0&0\\0&\lambda_2&0\\0&0&\dots\end{pmatrix}$

46. Si ha sempre molteplicità algebrica $\geq$ molteplicità geometrica.

47. La matrice è diagonalizzabile se a m autovalori corrispondono m autovettori e se la molteplicità algebrica è uguale a quella geometrica.

48. Quando devo dire per quali valori di t un autovalore dato sia un vero autovalore allora calcolo $\det(A-\lambda I_n)$ e sostituisco a λ il valore affidato e pongo $=0$ il determinante e vedo che valore di t mi risulta.

49. Quando devo trovare autovalori $\begin{pmatrix} -\lambda & 0 & 0 \\ 0 & -\lambda & 0 \\ 0 & 0 & -\lambda \end{pmatrix}$ calcolo il determinante della nuova matrice in funzione di λ e la pongo uguale a 0. Per trovare gli autovettori faccio $(A-\lambda I_n)\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \end{pmatrix}$ sostituendo ad ogni λ i valori trovati in precedenza.
I vettori che trovo vanno a formare la matrice P tale che $A = PDP^{-1}$

50. dimker f = molteplicità geometrica.

51. Quando devo trovare la matrice rispetto ad una base diversa dal canonica
$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \lambda_1(\ ) + \lambda_2(\ )$ faccio la combinazione lineare della base che mi è stata data.
$f(\ ) = \lambda_1(f) + \lambda_2(f)$ Per linearità uso gli stessi valori di λ e li moltiplico per gli f( ) e trovo la f del vettore di partenza che volevo.

ALTRO METODO

$A \cdot V = W \rightarrow A = W \cdot V^{-1}$ (i vettori li metto entrambi in colonna)
Trovo V^{-1} poi trovo A moltiplicando la matrice W con la matrice V^{-1}
il prodotto lo metto in riga e moltiplico riga per colonna $(\longrightarrow)\downarrow = (\longrightarrow)$

52. Quando per trovare f(v) mi danno tipo $3v_1 = w_1, 3v_1 + 2v_2 = w_2$ allora posso costruire la matrice simile ad A: $\begin{pmatrix} 3 & 3 & \\ 0 & 2 & \vdots \\ 0 & 0 & \end{pmatrix}$ e ne posso studiare gli autovalori e gli autovettori (questa è una matrice diagonale D)

53. Se devo dimostrare che gli autospazi sono in somma diretta:
→ prendo autospazio relativo ad ogni autovalore: aut. 3 $f(v_1) = \underbrace{3}_{\text{autovalore}}\underbrace{v_1}_{\text{autospazio}}$
→ per far sì che 2 autospazi siano in somma diretta allora lo devono essere V_1 e ... e questi lo sono se la loro combinazione lineare è pari a 0

54. Quando ho l'applicazione lineare, quindi $f(v_i) = 3v_i$, posso dire che gli autovalori sono 3 e sono relativi ai vettori v_i ed in questo caso quando ne costruisco la matrice degli autovalori li devo mettere in ordine

55. Una funzione è invertibile se
- INIETTIVA $\ker f = \{0v\}$ vettori e.i.
- SURIETTIVA $\operatorname{Im} f = W$

rk (A) = dim(spazio vettoriale)

56. Per determinare una base di V rispetto alla quale la matrice è diagonalizzabile devo trovare gli autovalori, gli autovettori che sono esattamente i vettori della base che devo trovare.

57. Per far sì che $f(v_1) = f(v_2)$ allora la funzione deve non essere iniettiva.

58. Posso dire se la matrice è diagonalizzabile o no già quando calcolo gli autovalori, se a n autovalori corrispondono n autovettori e.i. lo è.

59. Quando due matrici sono simili non solo $\det A = \det B$, ma $rkA = rkB$

60. Quando devo trovare matrice cambiamento base all'codominio devo esprimere i vettori di A come combinazione lineare dei nuovi vettori della base e i λ_i che trovo sono le nuove colonne della matrice che devo trovare.

61. Area del parallelogramma $= \|v\| \|w\| \operatorname{sen}\alpha$

$$= \det\begin{pmatrix} v \cdot v & v \cdot w \\ w \cdot v & w \cdot w \end{pmatrix}$$

62. v e w sono ortogonali se $v \cdot w = 0$ / $f(v,w) = 0$

63. v è normalizzato se $\|v\|$, per rendere un vettore normalizzato $\frac{v}{\|v\|}$

64. proiezione di un vettore su una retta : $w' = u\left(\frac{w \cdot u}{u \cdot u}\right)$ proiezione $\perp$ di w su U

65. $\dim U^\perp + \dim U = m$ ($U^\perp$ e U sono sempre in somma diretta).

66. $v' = AX = (A \cdot (A^t A^{-1}) A^t) v$ con $P = (A(A^t A^{-1})A^t)$ proiezione sottospazio U

67. Base ortogonale = base in cui tutti i vettori sono ortogonali tra loro
Per trovare una base ortonormale faccio $V_{orto} / \|V_{orto}\|$

68. Procedimento di Gram-Schmidt : $v_r' = v_r \cdot \left(\frac{v_r \cdot v_1'}{v_1' \cdot v_1'}\right) \cdot v_1' \cdot \left(\frac{v_r \cdot v_2}{v_2' \cdot v_2'}\right) v_2' \ldots$

69. $(v,w) \to g(v,w) = v \cdot w \to g$ si dice bilineare e simmetrica e non è più garantito che $U \cap U^\perp = \{0\}$

70. Un vettore è isotropo se $g(u,u) = 0$

71. $\ker g = \{v : g(u,w) = 0 \ \forall u \in U\}$

72. DEGENERE: ovvero $\ker g \neq \{0\}$
NON DEGENERE: $\ker g = \{0\} \Rightarrow \det G \neq 0$

73. $g(v,w) = (\lambda_1, \ldots, \lambda_m) \cdot G \begin{pmatrix} \mu_1 \\ \vdots \\ \mu_m \end{pmatrix} = (\mu_1 \cdots \mu_m) G \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_m \end{pmatrix}$
Se $v \in \ker f$ allora $g(v,u) = 0$ quindi $G \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix} = 0$

74. $G' = P^T G P$ cambiamento di base
- ORTOGONALE la base $\to$ diagonale la matrice
- ORTONORMALE la base $\to$ diagonale $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

$\det G' = \det G \cdot (\det P)^2$ (hanno lo stesso segno)

Le colonne di P sono i vettori della base ortogonale messi in colonna
P sarà sempre triangolare superiore o inferiore e G' una matrice diagonale.

75. $G > 0 \to$ diagonale > 0
$G < 0 \to$ diagonale < 0
G indefinita $\to$ diagonale $+, -$

76. Quando dobbiamo dire com'è G' allora calcoliamo il determinante dei minori principali e poniamo nella diagonale il segno del determinante

77. Quando devo trovare la matrice diagonale G' tale che $G' = P^t G P$ posso o applicare $G' = P^t G P$ oppure scrivere G' come $\begin{pmatrix} g(v_1,v_1) & 0 & 0 \\ 0 & g(v_2,v_2) & 0 \\ 0 & 0 & g(v_3,v_3) \end{pmatrix}$

78. NON DEGENERE $\to \det A \neq 0$
- $\det A < 0$ indefinita
- $\det A > 0$
  - >0 POSITIVA
  - <0 NEGATIVA

79. Il fatto che la forma bilineare sia definita implica che ci sono vettori isotropi, li trovo da G' e li sommo (sottraggo tra di loro), verifico che $g(u,u) = 0$ e calcolo a questo punto allora u con $u = -, + -$

Calcolare V_2 tale che $V_2 \in U^\perp$ ed ho $u_1, u_2 \in U$ faccio:

$V_2 \cdot u_1 = 0$ $\quad \begin{cases} (a,b,c)\, u_1 = 0 \\ (a,b,c)\, u_2 = 0 \end{cases}$

$V_2 \cdot u_2 = 0$

81. Se ho $V = u_1 + u_2$ con $u_1 \in U$ e $u_2 \in U^\perp$ per trovare u_1 e u_2 pongo:
$(v) = \lambda_1 (u_1) + \lambda_2 (u_2) + \dots$ trovo i λ e poi trovo u_1 e u_2 rispettivamente

82. Quando devo trovare la proiezione ortogonale
- $w' = \lambda u$
- $w = \lambda u + v$

Per trovare $f(w)$ mi serve w: $w = \lambda(\ ) + \lambda\,(v) = \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$ vettori rispetto base canonica per trovare poi la proiezione ortogonale faccio la sostituzione dei λ che trovo sui vettori che mi servono (λu)

83. Quando ho due vettori da trovare che devono essere ortogonali tra di loro e con un terzo vettore e devono appartenere ad un'equazione allora:

V_1 (x_1,x_2,x_3,x_4) $\begin{cases} (x_1,x_2,x_3,x_4)\, u_3 = 0 \\ \text{eq. a cui appartiene} \end{cases}$ → calcolo dim e vettore unico

V_2 (x_1,x_2,x_3,x_4) $\begin{cases} (x_1,x_2,x_3,x_4)\, u_3 = 0 \\ (x_1,x_2,x_3,x_4)\, V_1 = 0 \\ \text{eq. a cui appartiene} \end{cases}$ → calcolo vettore unico

84. Per far sì che $\operatorname{Im}(g) = \operatorname{Ker}(f)^\perp$ devo avere i vettori di Img $\perp$ vettori Ker f

85. Per trovare base di U faccio $U_1^\perp \cdot U = 0$, $U_2^\perp \cdot U_2, \dots$ a seconda di quanti vettori mi servono.

86. Ricordiamo che $V = v' + v''$ con $v' \in U$ e $v'' \in U^\perp$ quindi $\operatorname{Im} f = U^\perp$ e $\operatorname{Ker} f = U$ se devo trovare la matrice della proiezione ortogonale scrivo il vettore della base V come combinazione lineare di v' e v'', i vettori di partenza per es. e_3 $\begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\end{pmatrix} = \lambda_1 v_1' + \lambda_2 v_2' + \lambda_3 v_3'' + \lambda_4 v_4''$ (proiezione ortogonale su $U^\perp$)

87. Quando ho i vettori e devo trovare la matrice del prodotto $\begin{pmatrix} V_1V_1 & V_1V_2 & V_1V_3 \\ V_2V_1 & V_{22} & V_2V_3 \\ V_3V_1 & V_{32} & V_3V_3 \end{pmatrix}$

88. Quando ho $x - 3y + z - 2w = 0$ e $U^\perp$ ha dim 1 il vettore $u \in U^\perp$ è $(x,y,z,w) = (1,-3,1,-2)$

89. Quando devo trovare l'equazione cartesiana di W tale che W_2'' sia la proiezione ortogonale di V_2 su W devo porre $V_2 = W_2'' + V_1'' \to V_1'' = W_2'' - V_2''$ poi devo porre $(x_1,x_2,x_3,x_4)\, V_1'' = 0$ questo poiché W è ortogonale a V_1''.

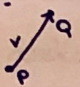
90. Quando devo trovare base ortogonale avendo l'equazione devo prendere un vettore che decido io e che soddisfi l'equazione e lo pongo uguale a V_1'

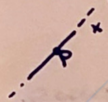
$V_2' = \begin{cases} \text{equazione} \\ V_2' \cdot V_1' = 0 \end{cases}$ → risolvo l'equazione e trovo V_2'

$V_2' \downarrow (x_1,x_2,x_3,x_4)$

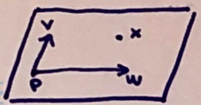
e così via.

91. F deve essere un sottospazio vettoriale ovvero F deve essere lineare.

92.  $Q = P + V$ "SOMMA PUNTO + VETTORE", $V = Q - P$ "DIFFERENZA TRA DUE PUNTI"
$P = Q - V$ "DIFFERENZA PUNTO - VETTORE" | CONVENZIONE: $P = (1, p_1, \dots, p_n)$, $v = (0, a_1, \dots, a_n)$
il punto di arrivo può essere scritto come punto di partenza + vettore

93. Equazione parametrica di una retta, per determinare una retta basta dare un punto ed un vettore.

$X = P + \lambda v$
↳ vettore direttore della retta

94. Equazione parametrica del piano

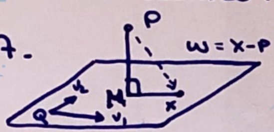


$X = P + \lambda v + \lambda w$ ⟶ spazio affine è $X = P + \underbrace{(\lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_n v_n)}_{\text{sottospazio generato da } v_1, \dots, v_n}$

$\begin{Bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} p_1 \\ \vdots \\ p_n \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{Bmatrix}$

95. Un punto è dato da $P = (1, p_1, \dots, p_n)$ e un vettore $v = (0, v_1, \dots, v_n)$

96. Baricentro: $(P_1 + \dots + P_n)/n$

97. 
Pongo $w = X - P = Q + \lambda_1 v_1 + \lambda_2 w_1 - P = (Q - P) + \lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_r v_r$
w deve essere ortogonale a tutti i vettori che descrivono lo spazio $X = H$

$W = X - P$

$\begin{cases} w \cdot v_1 = 0 \\ \vdots \\ w \cdot v_r = 0 \end{cases}$ trovo λ (il punto X dei coefficienti è l'altezza H.

98. Per calcolare la proiezione ortogonale pongo $w = X - P = Q + \lambda v_1 + \dots + \lambda v_n - P$, $w \cdot v_i = 0$ e calcolo i vari λ, inserisco λ in $X = Q + \lambda v_i + \dots + \lambda_n v_n$

99. Calcolare la distanza avendo la proiezione ortogonale, calcolo $w = X - P$ e poi distanza $= \|X - P\| = \|W\| = x_w^2 + y_w^2 + z_w^2$

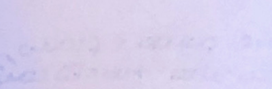
100. Verificare che le rette siano incidenti prima metto a sistema le equazioni delle rette e se queste hanno un punto in comune sono incidenti.
Se non sono incidenti possono essere parallele o sghembe.
Verificare che le rette siano parallele, devo trovare due vettori direzione delle rette $v_1 = P_1 - Q_1$ e $v_2 = P_2 - Q_2$, se i vettori direzione sono uno il multiplo dell'altro allora sono parallele, se non sono l'uno il multiplo dell'altro sono sghembe.

101. Equazioni del piano che contiene r e s: $\pi = Q + \lambda_1 v_r + \lambda_2 v_s$

102. Quando ho 2 equazioni che contraddistinguono una retta per trovare il vettore direzione pongo $v_r = B - A$

103. Quando ho un sottospazio affine U descritto come $U: a_1x_1 + a_2x_2 + \dots + a_nx_n + d = 0$ il vettore $m = (a_1, a_2, \dots, a_n)$ è ortogonale al sottospazio U.

104. Distanza punto P e sottospazio U

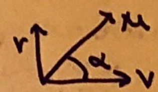


Dato $\mu = a_1x_1 + \dots + a_nx_n + d = 0$
retta per P ortogonale a μ: $(a_1, a_n)\} m$
retta $\Rightarrow X = P + \lambda m \rightarrow \mu = P + \lambda m$
trovo μ facendo $U \cap r$
distanza $P - H = \mu - P = \|\mu - P\| = \|\lambda m\| = \dfrac{|a_1p_1 + \dots + a_np_n + d|}{\sqrt{a_1^2 + \dots + a_n^2}}$

! se $P \in \mu \Rightarrow$ distanza $= 0$

105. Quando devo trovare fascio di piani ed ho equazione di rette faccio la combinazione lineare delle rette
piano $\in r_{retta}$ e $\in P_{punto}$ → fascio di piani, sostituisco P, trovo λ, sostituisco λ nell'equazione generale.

106. Prodotto vettoriale tra due vettori: $\|w\| = \|u\| \cdot \|v\| \sin\alpha$



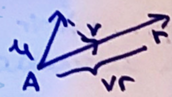
$\|w\| = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{pmatrix}$ $a_2b_3 - a_3b_2,\ a_3b_1 - a_1b_3,\ a_1b_2 - a_2b_1$
usato anche per trovare l'area del parallelogramma

107. Punto di intersezione tra piano e retta: $r: x = P + \lambda v$, $\pi: \dots$ → $\begin{cases} r: x = P + \lambda v \\ \pi: \dots \end{cases}$ sistema

108. Retta s contenuta in π passante per A ed ortogonale a π
$s: X = A + \lambda v_s \to v_s \cdot v_n = 0$ e $v_s \cdot v_r = 0$] → trovo v_s
$v_s = v_n \times v_r$ (sempre prima il vettore del piano) pongo $X = A + \lambda v_s$ trovo λ e sostituisco

rette // vettore e incidenti 2 rette (r e s)
→ punto generico r
→ // a vettore
→ ∩ s
→ sostituisco sempre la prima variabile.

109. Distanza punto-retta



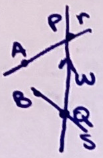
$\|v_r \times u\| = \|v_r\| \cdot h \Rightarrow h = \dfrac{\|v_r \times u\|}{\|v_r\|}$

110. Distanza tra due rette sghembe
$r: A + \lambda v_r$ e $s: B + \mu v_s \Rightarrow dist(P,Q) = \|Q - P\| = B + \mu v_s - A - \lambda v_r$
trovo λ e μ: $\left.\begin{array}{l} (Q-P) \cdot v_s = 0 \\ (Q-P) \cdot v_r = 0 \end{array}\right\}$ la distanza PQ deve essere perpendicolare alle due rette

$h = \dfrac{|(v_r \times v_s) \cdot \overline{w}|}{\|v_r \times v_s\|}$ distanza A-B

111. Equazione cartesiana del piano passante per 3 punti: trovo $v_{AB} = B - A$ e $v_{AC} = C - A$ piano passante per A e contenente v_{AB} e $v_{AC} \Rightarrow \pi = A + \lambda v_1 + \lambda v_2$

112. Retta incidente ad altre due ed ortogonale ad entrambe:



- Trovo v: $P = A + \lambda v_r$ e $Q = B + \lambda v_s$
- Trovo il vettore direzione $w = P - Q$ in funzione di λ
- Per far sì che siano perpendicolari:
  $w \cdot v_r = 0$, $w \cdot v_s = 0$ → trovo λ e sostituisco in w
- $X = Q + \lambda w = B + \lambda v_s + \lambda \underline{w}$, sostituisco quello che ho trovato

113. Quando devo trovare una retta passante per P e incidente a due rette sghembe r e s:
- prendo un generico punto di r in funzione di qualcosa (t)
- scrivo una retta passante per P e per questo generico posso la retta $= P + \lambda v$ con $V = P -$ Puntogenerico
- metto a sistema retta trovata con equazione di s
- non trovo λ trovo t e lo inserisco nel primo sistema

114. Quando devo trovare un piano passante per 3 punti posso considerare anche il passaggio dei 3 punti nel piano

115. Anziché fare $v_s \cdot v_r = 0$, $v_s \cdot v_n = 0 \to v_s = v_n \times v_r$

116. Proiezione ortogonale retta in un piano: trovo P intersezione punto e piano, trovo retta ⊥ al piano e passante per un altro punto, interseco retta trovata con π
trovo $v_r = P'' - P'$, retta: $P' + \lambda v_r$

117. Per trovare angolo tra 2 piani → prodotto scalare $V_1 \cdot V_2 = \|V_1\| \cdot \|V_2\| \cos\alpha \to \cos\alpha = \dfrac{V_1 \cdot V_2}{\|V_1\| \|V_2\|}$