

Cognome \_\_\_\_\_ Nome \_\_\_\_\_ Matricola \_\_\_\_\_

## ALGEBRA LINEARE E GEOMETRIA

1° appello — 14 giugno 2022

**Esercizio 1.** Sia  $f: \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^4$  la funzione lineare definita da

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4) = \left( 2x_1 - x_2 - \frac{5}{2}x_3 + x_4, -x_1 + x_3 - \frac{1}{2}x_4, x_1 + x_2 - \frac{1}{2}x_3 + \frac{1}{2}x_4, 2x_2 + x_3 \right)$$

- Scrivere la matrice  $A$  di  $f$  rispetto alle basi canoniche.
- Calcolare il rango di  $A$  e trovare basi di  $\text{Ker}(f)$  e di  $\text{Im}(f)$ .
- Trovare la dimensione e una base di  $\text{Ker}(f) \cap \text{Im}(f)$ .
- Esiste una funzione lineare  $g: \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^4$  tale che  $\text{Ker}(g) = \text{Im}(g)$ ? (la risposta deve essere giustificata)

**Esercizio 2.** Consideriamo la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 2 & -2 & 4 \\ 1 & -3 & 4 \end{pmatrix}$$

- Trovare una base del nucleo di  $A$ .
- Determinare il polinomio caratteristico e gli autovalori di  $A$ .
- Trovare le basi degli autospazi e dire se  $A$  è diagonalizzabile.
- Esiste una matrice **simmetrica** simile ad  $A$ ? (la risposta deve essere giustificata)

**Esercizio 3.** Nello spazio vettoriale euclideo  $\mathbb{R}^4$ , dotato del prodotto scalare usuale, sia  $U$  il sottospazio generato dai vettori  $u_1 = (1, 0, 2, -2)$ ,  $u_2 = (0, 1, -4, 5)$ .

- Trovare una base ortogonale di  $U$ .
- Scrivere le equazioni cartesiane di  $U^\perp$  e trovare una sua base.
- Dato  $v = (-1, 4, 0, 4) \in \mathbb{R}^4$  determinare la sua proiezione ortogonale su  $U$ .
- Si dica se esiste un sottospazio  $W \subset \mathbb{R}^4$  tale che la proiezione ortogonale di  $v$  su  $W$  sia il vettore  $w = (1, 1, -2, 0)$ .

**Esercizio 4.** Nello spazio affine  $\mathbb{A}_{\mathbb{R}}^3$  consideriamo i piani

$$\pi : 2x - y + z - 1 = 0, \quad \sigma_\alpha : (\alpha + 2)x - 2y + \alpha z + \alpha = 0.$$

- Determinare il valore di  $\alpha$  per cui i piani  $\sigma_\alpha$  e  $\pi$  sono paralleli. Per tale valore di  $\alpha$  calcolare la distanza tra i piani  $\pi$  e  $\sigma_\alpha$ .
- Determinare il valore di  $\alpha$  per cui le rette ortogonali al piano  $\sigma_\alpha$  sono parallele al piano  $\pi$ .
- Poniamo  $\alpha = 0$ . Determinare un vettore direttore della retta  $r = \pi \cap \sigma_0$ .
- Poniamo  $\alpha = 0$ . Dato il punto  $P = (1, 0, -1) \in \pi$  trovare un punto  $S \in \sigma_0$  tale che la retta passante per  $P$  e  $S$  sia ortogonale a  $\pi$ .

Cognome \_\_\_\_\_ Nome \_\_\_\_\_ Matricola \_\_\_\_\_

## ALGEBRA LINEARE E GEOMETRIA

1° appello — 14 giugno 2022

**Esercizio 1.** Sia  $f: \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^4$  la funzione lineare definita da

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4) = \left( x_1 - x_2 - x_3 + \frac{1}{2}x_4, 2x_2 + 4x_3, -2x_1 + x_2 - x_4, x_1 + x_2 + 3x_3 + \frac{1}{2}x_4 \right)$$

- Scrivere la matrice  $A$  di  $f$  rispetto alle basi canoniche.
- Calcolare il rango di  $A$  e trovare basi di  $\text{Ker}(f)$  e di  $\text{Im}(f)$ .
- Trovare la dimensione e una base di  $\text{Ker}(f) \cap \text{Im}(f)$ .
- Esiste una funzione lineare  $g: \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^4$  tale che  $\text{Ker}(g) = \text{Im}(g)$ ? (la risposta deve essere giustificata)

**Esercizio 2.** Consideriamo la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 2 & -3 & -4 \\ -2 & 4 & 5 \end{pmatrix}$$

- Trovare una base del nucleo di  $A$ .
- Determinare il polinomio caratteristico e gli autovalori di  $A$ .
- Trovare le basi degli autospazi e dire se  $A$  è diagonalizzabile.
- Esiste una matrice **simmetrica** simile ad  $A$ ? (la risposta deve essere giustificata)

**Esercizio 3.** Nello spazio vettoriale euclideo  $\mathbb{R}^4$ , dotato del prodotto scalare usuale, sia  $U$  il sottospazio generato dai vettori  $u_1 = (2, -1, 0, 1)$ ,  $u_2 = (5, -2, 2, 0)$ .

- Trovare una base ortogonale di  $U$ .
- Scrivere le equazioni cartesiane di  $U^\perp$  e trovare una sua base.
- Dato  $v = (3, 2, -4, 2) \in \mathbb{R}^4$  determinare la sua proiezione ortogonale su  $U$ .
- Si dica se esiste un sottospazio  $W \subset \mathbb{R}^4$  tale che la proiezione ortogonale di  $v$  su  $W$  sia il vettore  $w = (0, 1, 2, -1)$ .

**Esercizio 4.** Nello spazio affine  $\mathbb{A}_{\mathbb{R}}^3$  consideriamo i piani

$$\pi : x + 2y - z - 2 = 0, \quad \sigma_\alpha : 3x + (\alpha + 3)y - \alpha z + \alpha = 0.$$

- Determinare il valore di  $\alpha$  per cui i piani  $\sigma_\alpha$  e  $\pi$  sono paralleli. Per tale valore di  $\alpha$  calcolare la distanza tra i piani  $\pi$  e  $\sigma_\alpha$ .
- Determinare il valore di  $\alpha$  per cui le rette ortogonali al piano  $\sigma_\alpha$  sono parallele al piano  $\pi$ .
- Poniamo  $\alpha = 0$ . Determinare un vettore direttore della retta  $r = \pi \cap \sigma_0$ .
- Poniamo  $\alpha = 0$ . Dato il punto  $P = (1, 0, -1) \in \pi$  trovare un punto  $S \in \sigma_0$  tale che la retta passante per  $P$  e  $S$  sia ortogonale a  $\pi$ .

Cognome \_\_\_\_\_ Nome \_\_\_\_\_ Matricola \_\_\_\_\_

## ALGEBRA LINEARE E GEOMETRIA

1° appello — 14 giugno 2022

**Esercizio 1.** Sia  $f: \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^4$  la funzione lineare definita da

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4) = \left( x_1 + x_2 - \frac{1}{2}x_3 + 2x_4, 2x_1 - x_2 - \frac{5}{2}x_3 - 2x_4, 2x_2 + x_3 + 4x_4, -x_1 + x_3 \right)$$

- Scrivere la matrice  $A$  di  $f$  rispetto alle basi canoniche.
- Calcolare il rango di  $A$  e trovare basi di  $\text{Ker}(f)$  e di  $\text{Im}(f)$ .
- Trovare la dimensione e una base di  $\text{Ker}(f) \cap \text{Im}(f)$ .
- Esiste una funzione lineare  $g: \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^4$  tale che  $\text{Ker}(g) = \text{Im}(g)$ ? (la risposta deve essere giustificata)

**Esercizio 2.** Consideriamo la matrice

$$A = \begin{pmatrix} -4 & 2 & -6 \\ -1 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

- Trovare una base del nucleo di  $A$ .
- Determinare il polinomio caratteristico e gli autovalori di  $A$ .
- Trovare le basi degli autospazi e dire se  $A$  è diagonalizzabile.
- Esiste una matrice **simmetrica** simile ad  $A$ ? (la risposta deve essere giustificata)

**Esercizio 3.** Nello spazio vettoriale euclideo  $\mathbb{R}^4$ , dotato del prodotto scalare usuale, sia  $U$  il sottospazio generato dai vettori  $u_1 = (2, -1, -2, 0)$ ,  $u_2 = (4, 0, -5, 3)$ .

- Trovare una base ortogonale di  $U$ .
- Scrivere le equazioni cartesiane di  $U^\perp$  e trovare una sua base.
- Dato  $v = (6, 2, -4, 2) \in \mathbb{R}^4$  determinare la sua proiezione ortogonale su  $U$ .
- Si dica se esiste un sottospazio  $W \subset \mathbb{R}^4$  tale che la proiezione ortogonale di  $v$  su  $W$  sia il vettore  $w = (3, 1, -4, 0)$ .

**Esercizio 4.** Nello spazio affine  $\mathbb{A}_{\mathbb{R}}^3$  consideriamo i piani

$$\pi : x - y + 2z + 1 = 0, \quad \sigma_\alpha : 2x + \alpha y + (2 - \alpha)z + \alpha = 0.$$

- Determinare il valore di  $\alpha$  per cui i piani  $\sigma_\alpha$  e  $\pi$  sono paralleli. Per tale valore di  $\alpha$  calcolare la distanza tra i piani  $\pi$  e  $\sigma_\alpha$ .
- Determinare il valore di  $\alpha$  per cui le rette ortogonali al piano  $\sigma_\alpha$  sono parallele al piano  $\pi$ .
- Poniamo  $\alpha = 0$ . Determinare un vettore direttore della retta  $r = \pi \cap \sigma_0$ .
- Poniamo  $\alpha = 0$ . Dato il punto  $P = (1, 2, 0) \in \pi$  trovare un punto  $S \in \sigma_0$  tale che la retta passante per  $P$  e  $S$  sia ortogonale a  $\pi$ .

Cognome \_\_\_\_\_ Nome \_\_\_\_\_ Matricola \_\_\_\_\_

## ALGEBRA LINEARE E GEOMETRIA

1° appello — 14 giugno 2022

**Esercizio 1.** Sia  $f: \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^4$  la funzione lineare definita da

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4) = \left( 2x_2 - x_3 - x_4, x_1 - 2x_3, 2x_1 - x_2 - \frac{7}{2}x_3 + \frac{1}{2}x_4, -x_1 + 2x_2 + x_3 - x_4 \right)$$

- Scrivere la matrice  $A$  di  $f$  rispetto alle basi canoniche.
- Calcolare il rango di  $A$  e trovare basi di  $\text{Ker}(f)$  e di  $\text{Im}(f)$ .
- Trovare la dimensione e una base di  $\text{Ker}(f) \cap \text{Im}(f)$ .
- Esiste una funzione lineare  $g: \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^4$  tale che  $\text{Ker}(g) = \text{Im}(g)$ ? (la risposta deve essere giustificata)

**Esercizio 2.** Consideriamo la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -2 & -2 \\ -4 & 3 & 5 \\ 4 & -5 & -7 \end{pmatrix}$$

- Trovare una base del nucleo di  $A$ .
- Determinare il polinomio caratteristico e gli autovalori di  $A$ .
- Trovare le basi degli autospazi e dire se  $A$  è diagonalizzabile.
- Esiste una matrice **simmetrica** simile ad  $A$ ? (la risposta deve essere giustificata)

**Esercizio 3.** Nello spazio vettoriale euclideo  $\mathbb{R}^4$ , dotato del prodotto scalare usuale, sia  $U$  il sottospazio generato dai vettori  $u_1 = (1, -2, 0, -1)$ ,  $u_2 = (0, 5, -2, 2)$ .

- Trovare una base ortogonale di  $U$ .
- Scrivere le equazioni cartesiane di  $U^\perp$  e trovare una sua base.
- Dato  $v = (3, 3, 0, 3) \in \mathbb{R}^4$  determinare la sua proiezione ortogonale su  $U$ .
- Si dica se esiste un sottospazio  $W \subset \mathbb{R}^4$  tale che la proiezione ortogonale di  $v$  su  $W$  sia il vettore  $w = (1, -1, 2, 1)$ .

**Esercizio 4.** Nello spazio affine  $\mathbb{A}_{\mathbb{R}}^3$  consideriamo i piani

$$\pi : x - 2y + z - 2 = 0, \quad \sigma_\alpha : \alpha x + (3 - \alpha)y - 3z + \alpha = 0.$$

- Determinare il valore di  $\alpha$  per cui i piani  $\sigma_\alpha$  e  $\pi$  sono paralleli. Per tale valore di  $\alpha$  calcolare la distanza tra i piani  $\pi$  e  $\sigma_\alpha$ .
- Determinare il valore di  $\alpha$  per cui le rette ortogonali al piano  $\sigma_\alpha$  sono parallele al piano  $\pi$ .
- Poniamo  $\alpha = 0$ . Determinare un vettore direttore della retta  $r = \pi \cap \sigma_0$ .
- Poniamo  $\alpha = 0$ . Dato il punto  $P = (1, 0, 1) \in \pi$  trovare un punto  $S \in \sigma_0$  tale che la retta passante per  $P$  e  $S$  sia ortogonale a  $\pi$ .