TEOREMA (SP. CUBICHE)

SE UNA SP. CUBICA SODDISFA LE CONDIZIONI AGGIUNTIVE ① o ② o ③, SE $f \in C^2([a,b])$ ALLORA

$$\| f - S_3 \|_\infty = O(h^2) \quad h \to 0$$

INOLTRE, SE SODDISFA ② o ③, SE $f \in C^4([a,b])$

$$\| f^{(p)} - S_3^{(p)} \|_\infty = O(h^{4-p}), \quad h \to 0 \quad p = 0,1,2,3$$

VALE ANCHE QUANDO $f \in C^k([a,b])$ CON $k > 4$

S=SPLINE(X,Y,Z) S. "NOT-A-KNOT"

S=SPLINE(X,[YD1 Y YDN],Z) SP. "VINCOLATE"

I=TRAPZ(X,Y)

POLINOMI	HP SUI NODI	VEL DI CONVERGENZA AUMENTA CON LA CLASSE DI f $O\left(\frac{\ln n}{n^k}\right)$
SPLINE	NO HP SUI NODI $h^2: S_1(x)$ $h^4: S_3(x)$	HO SATURAZIONE DELLA VEL. DI CONVERGENZA S_3 APPROSSIMA $f^{(p)}$

SE ALTAMENTE REGOLARE → F. POLINOMIALI

SE POCO REGOLARE → SPLINE (F. POL A TRATTI)

3

NORMA DI UN VETTORE

- NORMA 1

$$\|x\|_1 = \sum_{i=1}^{n} |x_i|$$

NORM(X,1)

- NORMA 2 o EUCLIDEA

$$\|x\|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}$$

NORM(X,2) o NORM(X)

- NORMA INFINITO

$$\|x\|_\infty = \max_{1 \le i \le n} |x_i|$$

NORM(X,INF)

NORMA DI UNA MATRICE

- NORMA 1

$$\|A\|_1 = \max_{1 \le j \le n} \sum_{i=1}^{n} |a_{ij}|$$

(SOMME GLI EL. SULLA STESSA COLONNA, PRENDE IL MAX)

NORM(A,1)

- NORMA 2 o SPETTRALE

(DEFINITA IN SEGUITO)

- NORMA INFINITO

$$\|A\|_\infty = \max_{1 \le i \le n} \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|$$

(SOMMA TUTTI GLI EL. SULLA STESSA RIGA, PRENDE IL MAX)

NORM(A,INF)

DATA UNA NORMA DI MATRICE E UNA DI VETTORE, LE NORME SONO COMPATIBILI SE $\|Ax\|_{(\cdot)} \le \|A\|_{(\cdot)} \|x\|_{(\cdot)}$

• MAT. TRIANGOLARE SUPERIORE

$$A=\begin{pmatrix} x & x & x & x & x \\ 0 & x & x & x & x \\ 0 & 0 & x & x & x \\ 0 & 0 & 0 & x & x \\ 0 & 0 & 0 & 0 & x \end{pmatrix}$$ ES. SOTTO LA DIAGONALE PRINCIPALE SOLO 0

• MAT TRIANGOLARI INFERIORI

$$A=\begin{pmatrix} x & 0 & 0 & 0 & 0 \\ x & x & 0 & 0 & 0 \\ x & x & x & 0 & 0 \\ x & x & x & x & 0 \\ x & x & x & x & x \end{pmatrix}$$ ES. SOPRA LA DIAG. PRINC. SOLO TUTTI 0

SOLO TUTTE MAT QUADRATE

• MAT DIAGONALE

$$A=\begin{pmatrix} x & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & x & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & x & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & x & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & x \end{pmatrix}$$ ES. NON SULLA DIAG. PRINCIPALE SOLO 0

• MAT TRIDIAGONALE

$$A=\begin{pmatrix} x & x & 0 & 0 & 0 \\ x & x & x & 0 & 0 \\ 0 & x & x & x & 0 \\ 0 & 0 & x & x & x \\ 0 & 0 & 0 & x & x \end{pmatrix}$$ ES. NON SULLE TRE DIAG. CENTRALI UGUALI A 0

MATRICE
- TRASPOSTA $(A^T)_{ij}=(A)_{ji}$
- SIMMETRICA $A^T=A$
- INVERSA $A^{-1}A=AA^{-1}=I$
- ORTOGONALE $A^TA=AA^T=I$

L'INVERSA DI UNA MAT ORTOGONALE COINCIDE CON LA SUA TRASPOSTA $A^{-1}=A^T$

SE ABBIAMO UNA MATRICE TRIANGOLARE IL DETERMINANTE È UGUALE AL PRODOTTO DEGLI ELEMENTI SULLA DIAGONALE PRINCIPALE

MATRICE DI PERMUTAZIONE

OTTENUTA PERMUTANDO LE RIGHE DELLA MATRICE IDENTITÀ, SONO MATRICI ORTOGONALI, CHE VENGONO MOLTIPLICATE A MATRICI O VETTORI PER REALIZZARE SCAMBI DI RIGHE O COMPONENTI

ES $P=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ MOLTIPLICATA PER UNA MATRICE → SCAMBIO 1° E 3° RIGA

MOLT. PER UN VETTORE → SCAMBIO 1° e 3° COMPONENTE

MATRICE DOMINANTE

- PER RIGHE

$$|a_{ii}| > \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n} |a_{ij}|$$

ES

$$A=\begin{pmatrix} 4 & 1 & -1 \\ 2 & -7 & 1 \\ 3 & -2 & 9 \end{pmatrix}$$

$|4|>|1|+|-1|$ SÌ

$|-7|>|2|+|1|$

$|9|>|3|+|-2|$

- PER COLONNE

$$|a_{jj}| > \sum_{\substack{i=1 \\ i\neq j}}^{n} |a_{ij}|$$

ES.

$$A=\begin{pmatrix} 9 & 1 & -1 \\ 2 & -7 & 1 \\ 3 & -2 & 4 \end{pmatrix}$$

$|9|>|2|+|3|$ SÌ

$|-7|>|1|+|-2|$

$|4|>|-1|+|1|$

MATRICE DEFINITA POSITIVA

UNA MAT. SIMMETRICA SI DICE DEF. POS. SE $x^TAx>0$ PER OGNI $x\neq 0$

$A=B^TB$ AVENTE DETERMINANTE NON NULLO, È SIMMETRICA E DEFINITA POSITIVA

CONDIZIONAMENTO DI UN SISTEMA LINEARE

SISTEMA

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$$

n EQUAZIONI
n INCOGNITE

IN FORMA MATRICIALE

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

$$Ax = b$$

A È <u>NON</u> SINGOLARE, SE IL SISTEMA HA UNA E UNA SOLA SOLUZIONE

$\bar{A}$ $\bar{b}$ DATI PERTURBATI / $\bar{x}$ LA SOLUZIONE IN ARITM. ESATTA DEL SISTEMA PERTURBATO

SE $\|A - \bar{A}\|_{(\cdot)} < \dfrac{1}{2\|A^{-1}\|_{(\cdot)}}$, IL SISTEMA AMMETTE UNA E UNA SOLA SOLUZIONE (È DETERMINATO) E

$$\frac{\|x - \bar{x}\|}{\|x\|} \leq 2\,K(A) \left(\frac{\|A - \bar{A}\|}{\|A\|} + \frac{\|b - \bar{b}\|}{\|b\|} \right)$$

DOVE $K(A) = \|A\|\,\|A^{-1}\|$ È IL NUMERO DI CONDIZIONAMENTO DEL SISTEMA LINEARE $Ax = b$

$$K(A) = \|A\| \cdot \|A^{-1}\| \geq \|A \cdot A^{-1}\| = \|I\| = 1 \qquad K(A) \geq 1$$

$K(A) \simeq 1$, LA MATRICE A È BEN CONDIZIONATA
$\lesssim 10$ (NON MAGGIORI DI 100) $\quad (1 \leq K \leq 99)$

$K(A) \gg 1$, LA MATRICE A È MAL CONDIZIONATA (MAGGIORI DI 100) $\quad (K > 100)$

SISTEMI LINEARI MAL CONDIZIONATI

• MATRICE DI HILBERT

$$H_n = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \dots & \frac{1}{n} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \dots & & \frac{1}{n+1} \\ \\ \frac{1}{n} & \frac{1}{n+1} & \dots & & \frac{1}{2n-1} \end{pmatrix}$$

MATRICE DI VANDERMONDE

$$V_n = \begin{pmatrix} x_1^n & \dots & x_1 & 1 \\ x_2^n & \dots & x_2 & 1 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ x_{n+1}^n & \dots & x_{n+1} & 1 \end{pmatrix}$$

MATLAB

cond(A, 1) cond(A, INF) HILB(n) VANDER(x)

IL CONDIZIONAMENTO DI UN SISTEMA LINEARE <u>NON</u> DIPENDE DALLA NORMA SCELTA (AVRANNO LE STESSE ORDINE DI GRANDEZZA)

$x = A \backslash b$ RISOLVE IL SISTEMA LINEARE $Ax = b$

METODI NUMERICI E ALGORITMI

OGNI ALGORITMO AVRÀ UN COSTO COMPUTAZIONALE, OVVERO IL NUMERO DI OPERAZIONI ARITMETICHE ($+$ e $\times$) CHE ESSO RICHIEDE PER LA SUA ESECUZIONE

- NEL CASO DEI SIST. LIN. IL C.C. DIPENDE DA n

MET. NUM. PER SISTEMI DIAGONALI

$$\begin{cases} a_{11}x_1 & = b_1 \\ a_{22}x_2 & = b_2 \\ \ddots & \vdots \\ a_{nn}x_n & = b_n \end{cases} \qquad x_i = \frac{b_i}{a_{ii}}$$

$$\boxed{C.C. = n}$$

MET. NUM. PER SISTEMI TRIANGOLARI SUPERIORI

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ \vdots \\ a_{n-1}x_{n-1} + a \quad = b_{n-1} \\ a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$$

- RICAVO x_n DALL'ULTIMA COME $x_n = \frac{b_n}{a_{nn}}$

POI x_{n-1} E COSÌ FINO ALL'INIZIO

- METODO DELLE SOSTITUZIONI ALL'INDIETRO

$$x_n = \frac{b_n}{a_{nn}} \qquad x_i = \frac{b_i - \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij}x_j}{a_{ii}}$$

$$\boxed{C.C = O\left(\frac{n^2}{2}\right)}$$

MET NUM PER SISTEMI TRIANGOLARI INFERIORI

$$\begin{cases} a_{11}x_1 & = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 & = b_2 \\ \dots \quad \dots & \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n & = b_n \end{cases}$$

- RICAVO x_n DALLA PRIMA COME $x_1 = \frac{b_1}{a_{11}}$

POI x_2 DALLA SECONDA E COSÌ FINO ALLA FINE

- METODO DI SOSTITUZIONI IN AVANTI

$$x_1 = \frac{b_1}{a_{11}} \qquad x_i = \frac{b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij}x_j}{a_{ii}}$$

$$\boxed{C.C = O\left(\frac{n^2}{2}\right)}$$

METODO DELLE ELIMINAZIONI DI GAUSS

PER UNA GENERICA MATRICE QUADRATA $R^{n \times n}$

$$\boxed{C.C\ GAUSS = O\left(\frac{n^3}{3}\right)} \qquad \boxed{C.C.\ CRAMER = (n+1)!}$$

IMPRATICABILE

- MET ELIM. DI GAUSS (2 FASI)

1) TRASFORMAZIONE, IN $n-1$ PASSI, DEL SISTEMA $Ax = b$ NEL SISTEMA $Ux = \bar{b}$ EQUIVALENTE A QUELLO ASSEGNATO (STESSA SOLUZIONE x), CON U MATRICE TRIANGOLARE SUPERIORE

2) RISOLVERE IL SIST $Ux = \bar{b}$ CON LA TECNICA DELLE SOSTITUZIONI ALL'INDIETRO

SE A È SIMMETRICA E NON SI EFFETTUANO SCAMBI IL COSTO COMPUTAZIONALE SI DIMEZZA

$\boxed{C.C = O\left(\frac{n^3}{6}\right)}$ GAUSS SIMMETRICO

FATTORIZZAZIONE $PA = LU$

QUANDO IL METODO DELLE ELIMINAZIONI DI GAUSS NON RICHIEDE SCAMBI, REALIZZA LA FATTORIZZAZIONE DELLA MATRICE A

$A = LU$ U (MAT. TR. SUPERIORE DEL SISTEMA EQUIVALENTE AL SISTEMA DI PARTENZA)

L (MAT. TR. INFERIORE DEI MOLTIPLICATORI CON DIAGONALE UNITARIA)

- SE AVVENGONO SCAMBI, IL METODO DELLE EL. DI GAUSS REALIZZA LA FAT. DELLA MATRICE A:

$PA = LU$

U TR. SUPERIORE L TR. INFERIORE CON DIAGONALE UNITARIA

P MATRICE DI PERMUTAZIONE

$\boxed{C.C = O\left(\frac{n^3}{3}\right)}$ SEMPRE LO STESSO

PERCHÉ SCAMBI NON SONO CALC.

- PER UNA MIGLIORE STABILITÀ DELL'ALGORITMO CONVIENE OPERARE UNO SCAMBIO DI EQUAZIONI ANCHE QUANDO $a_{kk}^{(k)}$ È PICCOLO IN VALORE ASSOLUTO (DI NORMA SI FACEVA QUANDO $a_{kk}^{(k)} = 0$)

$$|a_{rk}^{(k)}| = \max_{k \le i \le n} |a_{ik}^{(k)}|$$

m_{ik} DEVE ESSERE PICCOLO

- PIVOTING PARZIALE

È SUPERFLUO QUANDO
- A È DIAGONALE DOMINANTE PER COLONNA
- A È SIMMETRICA E DEFINITA POSITIVA

- IL MET. DELLE EL. DI GAUSS CON PIVOTING PARZIALE FORNISCE UNA SOLUZIONE PIÙ ACCURATA

$x = A\backslash b$ $[L, U, P] = lu(A)$

APPLICAZIONI $PA = LU$

1) RISOLUZIONE SISTEMA LINEARE $Ax = b$

$$Ax = b \Rightarrow PAx = Pb \Rightarrow L\underbrace{Ux}_{y} = Pb$$

$$\begin{cases} Ly = Pb \Rightarrow y \ \} O\left(\frac{n^2}{2}\right) \\ Ux = y \Rightarrow x \ \} O\left(\frac{n^2}{2}\right) \end{cases}$$

$y = \frac{L}{Pb}$

$x = \frac{U}{y}$

SE L, U, P SONO NOTI $C.C = O(n^2)$

SE L, U, P NON SONO NOTI $C.C. = O\left(\frac{n^3}{3}\right)$

SE A È SIMMETRICA E NON SI EFFETTUANO SCAMBI IL COSTO COMPUTAZIONALE SI DIMEZZA

$\boxed{C.C = O\left(\frac{n^3}{6}\right)}$ GAUSS SIMMETRICA

FATTORIZZAZIONE PA = LU

QUANDO IL METODO DELLE ELIMINAZIONI DI GAUSS NON RICHIEDE SCAMBI, REALIZZA LA FATTORIZZAZIONE DELLA MATRICE A

$A = LU$

U (MAT. TR. SUPERIORE DEL SISTEMA EQUIVALENTE AL SISTEMA DI PARTENZA)

L (MAT. TR. INFERIORE DEI MOLTIPLICATORI CON DIAGONALE UNITARIA)

- SE AVVENGONO SCAMBI, IL METODO DELLE EL. DI GAUSS REALIZZA LA FAT. DELLA MATRICE A:

$PA = LU$

U TR. SUPERIORE L TR. INFERIORE CON DIAGONALE UNITARIA

P MATRICE DI PERMUTAZIONE

$\boxed{C.C = O\left(\frac{n^3}{3}\right)}$ SEMPRE LO STESSO PERCHÉ SCAMBI NON SONO CALC.

- PER UNA MIGLIORE STABILITÀ DELL'ALGORITMO CONVIENE OPERARE UNO SCAMBIO DI EQUAZIONI ANCHE QUANDO $a_{kk}^{(k)}$ È PICCOLO IN VALORE ASSOLUTO (DI NORMA SI FACEVA QUANDO $a_{kk}^{(k)} = 0$)

$$|a_{kk}^{(k)}| = \max_{k \le i \le n} |a_{ik}^{(k)}|$$

m_{ik} DEVE ESSERE PICCOLO

- PIVOTING PARZIALE

È SUPERFLUO QUANDO
- A È DIAGONALE DOMINANTE PER COLONNE
- A È SIMMETRICA E DEFINITA POSITIVA

- IL MET. DELLE EL. DI GAUSS CON PIVOTING PARZIALE FORNISCE UNA SOLUZIONE PIÙ ACCURATA

$x = A \backslash b$ $[L, U, P] = lu(A)$

APPLICAZIONI PA = LU

1) RISOLUZIONE SISTEMA LINEARE $Ax = b$

$Ax = b \Rightarrow PAx = Pb \Rightarrow L\underbrace{Ux}_{y} = Pb$

$\begin{cases} Ly = Pb \Rightarrow y \quad O\left(\frac{n^2}{2}\right) \\ Ux = y \Rightarrow x \quad O\left(\frac{n^2}{2}\right) \end{cases}$

$y = \frac{L}{Pb}$

$x = \frac{U}{y}$

SE L, U, P SONO NOTI $C.C = O(n^2)$

SE L, U, P NON SONO NOTI $C.C. = O\left(\frac{n^3}{3}\right)$

APPLICAZIONI CHOLESKY

1) RISOLUZIONE SISTEMA LINEARE $Ax=b$

$$Ax=b \Rightarrow R^T \underbrace{Rx}_{y} = b \Rightarrow \begin{cases} R^T y = b & \Rightarrow y \\ Rx = y & \Rightarrow x \end{cases}$$

$y = R^T \backslash b$

$x = R \backslash y$

$\boxed{C.C = O(n^2)}$

2) CALCOLO INVERSA

$A^{-1} = R^{-1}(R^{-1})^T$

$\boxed{C.C = O\left(\frac{2}{3}n^3\right)}$

$A = R^T R \Rightarrow A^{-1} = (R^T R)^{-1} = R^{-1}(R^T)^{-1}$

FATTORIZZAZIONE QR

MATRICI RETTANGOLARI

OGNI MATRICE $A \in \mathbb{R}^{m,n}$ È FATTORIZZABILE NELLA FORMA $A = QR$

$Q \in \mathbb{R}^{m,m}$ ORTOGONALE

$R \in \mathbb{R}^{m,n}$ CON $r_{ij} = 0$ PER $i > j$

PER $m < n$

$$R = \begin{pmatrix} r_{11} & r_{12} & \cdots & \cdots & r_{1n} \\ 0 & r_{22} & & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & & \\ 0 & 0 & & r_{mm} & r_{mn} \end{pmatrix}$$

$$R = \begin{pmatrix} r_{11} & r_{12} & \cdots & r_{1n} \\ 0 & r_{22} & \cdots & r_{2n} \\ \vdots & 0 & \ddots & r_{nn} \\ \vdots & 0 & & \vdots \\ 0 & 0 & & 0 \end{pmatrix}$$

- LA FAT QR NON È UNICA

SIA $A \in \mathbb{R}^{m,n}$, $m \geq n$, DI RANGO MASSIMO n. ALLORA IL FATTORE R DELLA FATTORIZZAZIONE QR DELLA MATRICE A SI RISCRIVE COME $R = \begin{pmatrix} \tilde{R} \\ 0 \end{pmatrix}$ 0 MATRICE NULLA, $\tilde{R}$ TRI. SUPERIORE NON SING.

$A = \tilde{Q}\tilde{R}$ CON $\tilde{Q} \in \mathbb{R}^{m,n}$ AVENTE VET. COLONNA ORTONORMALI ED $\tilde{R} \in \mathbb{R}^{n,n}$ TRIANGOLARE SUPERIORE NON SINGOLARE CON ELEMENTI DIAGONALI POSITIVI.

$[Q, R] = qr(A)$

SE A NON HA RANGO MASSIMO RISULTATO DIVERSO PERCHÉ FATTORIZ. NON UNICA

APPLICAZIONI QR

1) RISOLUZIONE SISTEMA DETERMINATO

$Ax = b$ CON $A \in \mathbb{R}^{n,n}$ NON SINGOLARE, NOTI Q e R

$Ax = b \Rightarrow QRx = b \Rightarrow Rx = Q^T b$ TRI. SUP. INVERT.

$x = R \backslash Q^T b$

SE NON SONO NOTI Q,R CONVIENE USARE $PA = LU$

$C.C\ O(n^3)$

2) RISOLUZIONE DI UN SIST. LINEARE SOVRADETERMINATO

DATO $Ax = b$; $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $x \in \mathbb{R}^n$, $b \in \mathbb{R}^m$, $m > n$

IL SISTEMA SI DICE SOVRADETERMINATO IN QUANTO IL NUMERO m DELLE EQ. LINEARI (VINCOLI) È SUPERIORE AL NUMERO n DELLE INCOGNITE (GR. DI LIBERTÀ)

UN SIST. SOVRADET. NON AMMETTE SOLUZIONI IN SENSO CLASSICO, SI CERCANO QUINDI I VETTORI x PER I QUALI IL VETTORE RESIDUO $Ax - b$ È PICCOLO.

x È SOLUZIONE DEL SISTEMA SOVRADETERMINATO $Ax = b$ RISPETTO ALLA NORMA $\|\cdot\|$ SE

$$\min_{y \in \mathbb{R}^n} \|Ay - b\| = \|Ax - b\|$$

SE SCELGO LA NORMA 2 IL PROBLEMA DIVENTA DEI MINIMI QUADRATI

$$\min_{y \in \mathbb{R}^n} \|Ay - b\|_2 = \|Ax - b\|_2$$

x È LA SOLUZIONE NEL SENSO DEI MINIMI QUADRATI

PROBLEMA DEI MINIMI QUADRATI

AMMETTE SEMPRE SOLUZIONE (X NON È VUOTO), INOLTRE $x \in X$ SE E SOLO SE $A^T A x = A^T b$ → SISTEMA DELLE EQ. NORMALI

- SE A HA RANGO MAX X SI RIDUCE A x^* (UNICA SOLUZIONE)
- ESISTE UNO E UN SOLO VETTORE $x^* \in X$ TALE CHE

$$\|x^*\|_2 = \min_{x \in X} \|x\|_2$$

(x^* È LA SOLUZIONE DI MINIMA NORMA)

RISOLUZIONE SIST. SOVR. (PROBLEMA DEI MINIMI QUADR.)

2 CASI IN BASE AL RANGO DI A

1) A HA RANGO MASSIMO
- UNICA SOLUZIONE x^*
- SI USA LA FAT. QR

$$\min_{y \in \mathbb{R}^n} \|Ay - b\|_2 = \|Ax^* - b\|_2 = \|c_2\|_2$$

$\|c_2\|_2$ → MISURA DEL RESIDUO

- C.C PARI ALLA FATTORIZ. $A = QR$

2) A NON HA RANGO MASSIMO
- INFINITE SOLUZIONI
- SCELGO IL VETTORE x CHE MINIMIZZA $\|Ay - b\|_2$ CON NORMA EUCLIDEA MINIMA

$$\|Ax^* - b\|_2 = \min_{y \in \mathbb{R}} \|Ay - b\|_2$$

$$\|x^*\|_2 = \min_{x \in X} \|x\|_2$$

- DECOMPOSIZIONE DI VALORI SINGOLARI

• STESSA COSA PER SIST. SOTTODETERMINATI