COROLLARIO

$$rg(f) \leq \min\{n, k\}$$

Infatti $\quad rg(f) = \dim(\operatorname{Im}(f))$

$$\operatorname{Im}(f) \subseteq \mathbb{R}^k \Rightarrow rg(f) \leq k$$

Teor. dimens. $\quad rg(f) = n - \dim(\operatorname{Ker}(f)) \Rightarrow$

$$\Rightarrow rg(f) \leq n$$

www.unidocs.it - Appunti e dispense per superare i tuoi esami universitari

www.unidocs.it - Appunti e dispense per superare i tuoi esami universitari

$$f\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\\4\\5\end{pmatrix}$$

$$f\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-1\\3\\7\end{pmatrix}$$

$$\mathrm{Im}(f) = \left\langle \begin{pmatrix}2\\4\\5\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-1\\3\\7\end{pmatrix} \right\rangle \subseteq \mathbb{R}^3$$

Nucleo di f : $\mathrm{Ker}(f) = \left\{ \begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix} : f\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix} \right\}$

$$\Longleftrightarrow \quad f\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2x_1 - x_2\\5x_1 + 3x_2\\4x_1 + 7x_2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$$

$$\Longleftrightarrow \quad \begin{cases} 2x_1 - x_2 = 0 \\ 5x_1 + 3x_2 = 0 \\ 4x_1 + 7x_2 = 0 \end{cases}$$

Gauss

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 = 0 \\ \frac{11}{2}x_2 = 0 \\ 9x_2 = 0 \end{cases}$$

$eq(2) \Longleftrightarrow eq(2) - \frac{5}{2}eq(1)$

$eq(3) \Longleftrightarrow eq(3) - 2\,eq(1)$

Soluzione $\begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = 0 \end{cases}$

$$\mathrm{Ker}(f) = \left\{ \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix} \right\} = \{0_V\}$$

6

$$f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} x_1 + 3x_2 \\ 2x_1 + 6x_2 \\ x_1 + 3x_2 \end{pmatrix}$$

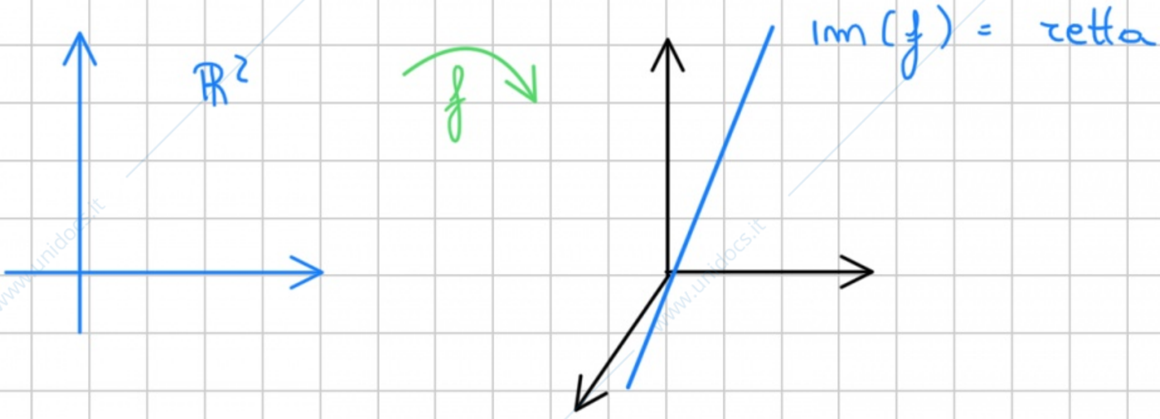


Immagine di f:

Base di $\mathbb{R}^2$: $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$

$$f\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$f\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ 3 \end{pmatrix} = 3 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Quindi $\mathrm{Im}(f) = \left\langle f\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, f\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle =$

$$= \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ 3 \end{pmatrix} \right\rangle = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$$

$$\dim(\mathrm{Im}(f)) = 1$$

$1 < 2 \Rightarrow f$ non è surgettiva

Nucleo di f:

$$f\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + x_2 + x_3 \\ 2x_1 + 2x_2 + 2x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ 2x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 0 \end{cases}$$

eq (2) = 2 eq (1)

Sistema $\Longleftrightarrow \boxed{x_1 + x_2 + x_3 = 0}$ = Ker (f)

In particolare: $\dim(\mathrm{Ker}(f)) = 2$

Base è data da
$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ x_2 = s \\ x_3 = t \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 = -s-t \\ x_2 = s \\ x_3 = t \end{cases}$$

$$\mathrm{Ker} = s \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$\dim = 2$ $\qquad$ $\mathrm{Base}(\mathrm{Ker}(f)) = \left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ $\square$

6 $\quad f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$

CONCLUSIONE

$$\operatorname{Ker} f = \begin{cases} x_1 = t \\ x_2 = -5t \\ x_3 = -3t \end{cases} = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ -5 \\ -3 \end{pmatrix} \right\rangle \subset \mathbb{R}^3 \quad \square$$

4) Immersione qualsiasi $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$

$$f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} 2x_1 - x_2 \\ 5x_1 + 3x_2 \\ 4x_1 + 7x_2 \end{pmatrix}$$

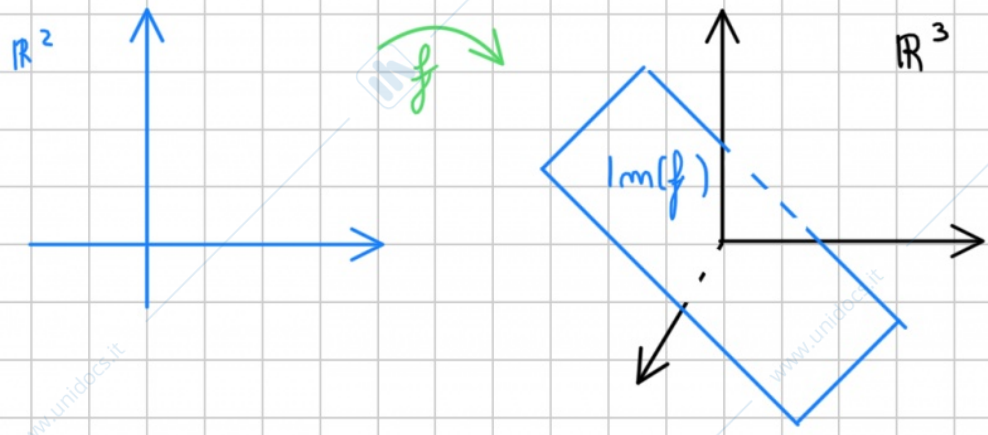


Immagine di f: BASE CANONICA di $\mathbb{R}^2 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$

$$f\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x_1 - x_2 \\ 5x_1 + 3x_2 \\ 4x_1 + 7x_2 \end{pmatrix}$$

Dobbiamo calcolare i valori di f sui vettori della base

$$f\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}$$

$$f\begin{pmatrix} 0 \\ \ldots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ \ldots \end{pmatrix}$$

OSSERVAZIONE

$Im(f) \subseteq W$ è sottospazio vettoriale $\Rightarrow$

$Im(f) = W$ se e solo se dim coincidono

DEFINIZIONE

Rango di f (notazione: $rg(f)$ oppure $rk(f)$)

$= dim(Im(f))$

RIASSUMENDO

$f: V \to W$ lineare

f surgettiva $\Longleftrightarrow rg(f) = dim(W)$

f iniettiva $\Longleftrightarrow Ker(f) = \{0_V\}$

$\Longleftrightarrow dim(Ker(f)) = 0$

dove $Ker(f)$ è uguale al nucleo di f

ESEMPI

1. Proiezione canonica $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \longmapsto \begin{matrix} x_1 \\ x_2 \end{matrix}$$

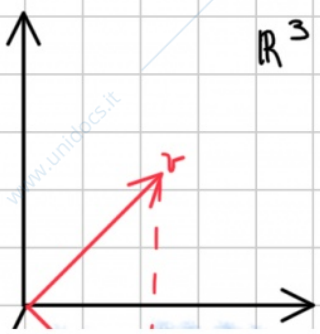


Immagine di f:

$$n = rg(f) + \dim(Ker(f))$$

$\dim(\mathbb{R}^n)$; $rg(f) = \dim(Im(f))$

ESEMPI

1. $f: \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$

$$3 = \dim(Im(f)) + \dim(Ker(f))$$

2. $f: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$

$$2 = \dim(Im(f)) + \dim(Ker(f))$$

f surgettiva $\longleftrightarrow$ $rg(f) = \dim(W)$

f iniettiva $\longleftrightarrow$ $\dim(Ker(f)) = 0$

Teor. dimensione : $f: \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^k$

$$n = rg(f) + \dim(Ker(f))$$

$f: \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^k$ lineare

$(V = \mathbb{R}^n)$ $(W = \mathbb{R}^k)$

$\ker(f) = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} = \{ 0_V \}$

In particolare f è iniettiva

$\square$

5

$f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$

$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} x_1 + x_2 + x_3 \\ 2x_1 + 2x_2 + 2x_3 \end{pmatrix}$

Immagine di f:

$f\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

$f\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

$f\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

$\operatorname{Im}(f) = \left\langle f\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \; f\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \; f\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle =$

$= \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\rangle = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\rangle$

$\operatorname{Im}(f) \subsetneq \mathbb{R}^2$

In particolare

$rg(f) = \dim \langle (\operatorname{Im}(f)) \rangle = 1$

$1 < 2 \Rightarrow f$ non è surgettiva

$$f\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\5\end{pmatrix}$$

$$f\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix}$$

$$f\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\\0\end{pmatrix}$$

$$\mathrm{Im}(f) = \left\langle \begin{pmatrix}1\\5\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\0\end{pmatrix} \right. = \mathbb{R}^2$$

poiche $\begin{matrix}-1\\1\end{matrix}$, $\begin{matrix}2\\0\end{matrix}$ sono linearmente indipendenti

$\Rightarrow$ 2 vettori in $\mathbb{R}^2$ sono generatori

Nucleo di f : $\mathrm{Ker}(f) \Longleftrightarrow f\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$

$$f\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}x_1 - x_2 + 2x_3\\5x_1 + x_2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} x_1 - x_2 + 2x_3 = 0 \\ 5x_1 + x_2 = 0 \end{cases}$$ 2 eq e 3 incog.

Poniamo $x_1 = t$

eq (2) : $x_2 = -5x_1 - 5t$

eq (1) : $x_3 = \frac{1}{2}(x_2 - x_1) = \frac{1}{2}(-5t - t) = -3t$

Nucleo di f:

$$\text{Ker}(f) \longleftrightarrow f\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + 3x_2 \\ 2x_1 + 6x_2 \\ x_1 + 3x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\longleftrightarrow \begin{cases} x_1 + 3x_2 = 0 \\ 2x_1 + 6x_2 = 0 \\ x_1 + 3x_2 = 0 \end{cases}$$

$eq(2) = 2 \cdot eq(1)$
$eq(3) = eq(1)$

Sistema $\longleftrightarrow \boxed{x_1 + 3x_2 = 0} = \text{Ker}(f)$

Posto $x_2 = t$, $x_1 = -3t$ $\Rightarrow \text{Ker}(f) = \left\{ t \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$

$\text{Base}(\text{Ker}(f)) = \left\{ \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ $\quad \dim \text{Ker}(f) = 1$

$\square$

TEOREMA DELLA DIMENSIONE

$f: V \longrightarrow W$ lineare

allora

$$\dim(V) = \dim(\text{Im}(f)) + \dim(\text{Ker}(f))$$

CASO PARTICOLARE

$f: \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^k$ lineare

allora

$$n = rg(f) + \dim(\text{Ker}(f))$$

DEFINIZIONE 2

Nucleo di f: $Ker(f) = \{v \in V : f(v) = 0_W\}$

PROPRIETÀ 1

☆ $Im(f) \subseteq W$ è un sottospazio vettoriale

☆☆ f è surgettiva $\Longleftrightarrow$ $Im(f) = W$

☆☆☆ Data una base di W (dominio) è $= \{v_1, \_\_\_ v_n\}$

allora:

$$Im(f) = \langle f(v_1), \_\_\_, f(v_n) \rangle$$

(Immagine di f è generata dal valore di f sui vettori di una base del dominio)

dim (Idea) $v \in V$

$v = a_1 v_1 + \_\_ + a_n v_n$

allora f lineare $\Rightarrow f(v) = a_1 f(v_1) + \_\_ + a_n f(v_n)$

PROPRIETÀ 2

☆ $Ker(f) \subseteq V$ è un sottospazio vettoriale

☆☆ f è iniettiva $\Longleftrightarrow$ $Ker(f) = \{0_V\}$

1 Proiezione canonica $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \longmapsto \begin{matrix} x_1 \\ x_2 \end{matrix}$$

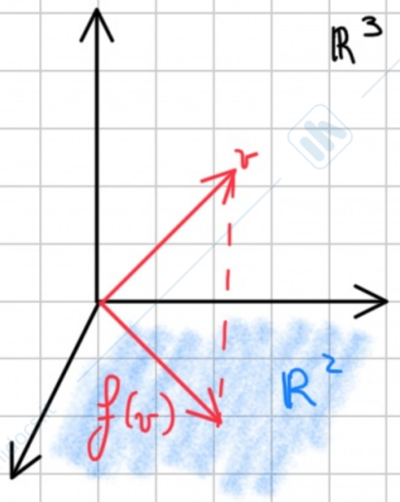


Immagine di f:

$\mathrm{Im}(f) = \mathbb{R}^2$

Dimostrazione

Preso $w = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$

Se considero $v = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$

si ha che $f(v) = w$

Nucleo di f:

$\mathrm{Ker}(f) = \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$

Dimostrazione

Nucleo di f = $\mathrm{Ker}(f) = \{ v : f(v) = 0_w \}$

$\Rightarrow$ dobbiamo risolvere l'eq. vettoriale

$$f\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \longleftrightarrow f\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Immagine di f : $= \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ 0 \end{pmatrix} : x_1 \in \mathbb{R} \quad x_2 \in \mathbb{R} \right\} =$

$= \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle \subset \mathbb{R}^3 =$

$= \{ x_3 = 0 \}$

Nucleo di f : $\mathrm{Ker}(f) = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$

Infatti il $\mathrm{Ker}(f) \longleftrightarrow f \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$\longleftrightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \longleftrightarrow \begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = 0 \end{cases}$

$\square$

3 Proiezione qualsiasi $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$

$f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$

$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} x_1 - x_2 + 2x_3 \\ 5x_1 + x_2 \end{pmatrix}$

Immagine di f : Prendiamo la base canonica del dominio =

$\mathbb{R}^3 \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$

e calcoliamo f dei 3 vettori

$f \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 - x_2 + 2x_3 \\ 5x_1 + x_2 \end{pmatrix}$

LEZIONE 22

19-11

algebra

Applicazioni lineari

$$f: V \to W$$
$$v \to f(v)$$ si dice lineare se

$$\forall v_1, v_2 \in V, \ \forall a_1, a_2 \in \mathbb{K}$$

$$f(a_1 v_1 + a_2 v_2) = a_1 f(v_1) + a_2 f(v_2)$$

In particolare: $f(0_v) = 0_w$

$$f(v_1 + v_2) = f(v_1) + f(v_2)$$
$$f(a \cdot v_1) = a f(v_1)$$

Data $f: V \to W$ lineare associamo ad f 2 spazi vettoriali:

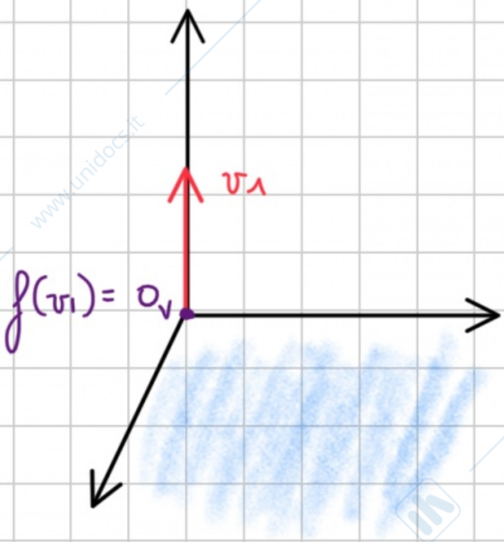
Immagine e Nucleo

DEFINIZIONE 1

Immagine di f: $\mathrm{Im}(f) = \{ w \in W : \exists \, v \in V \text{ t.c. } w = f(v) \}$

$$\longleftrightarrow \quad \begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = 0 \\ x_3 \text{ qualsiasi} \end{cases}$$

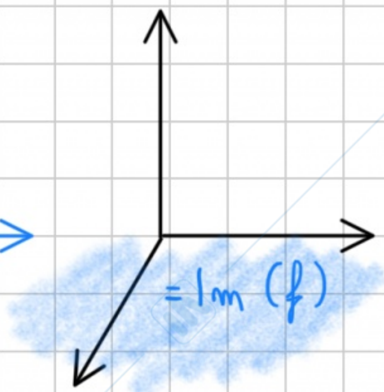
Quindi $\ker(f) = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ t \end{pmatrix} \right\} = \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$



v_1 = vettore perpendicolare, la sua proiezione è uguale a 0_V

② Immersione canonica $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ canonica

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ 0 \end{pmatrix}$$



Il piano $\mathbb{R}^2$ = Dominio attraverso f lo identifichiamo con il piano orizzontale in $\mathbb{R}^3$

Immagine di f : $= \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ 0 \end{pmatrix} : x_1 \in \mathbb{R} \;\; x_2 \in \mathbb{R} \right\} =$

$= \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \cdot \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \cdot \end{pmatrix} \right\rangle \subset \mathbb{R}^3 =$