ESERCIZI D'ESAME ALGEBRA LINEARE

08/12/2021

TESTO 18/09/2018

1. Sia A una matrice quadrata $n \times n$ tale che $A^2 - 4A + 3I = 0$

- 1 Dimostrare che A ha solo gli autovalori 3 e 1
- 2 Dimostrare che A è DIAGONALIZZABILE.

Soluzione:

(1) $\lambda^2 - 4\lambda + 3 = 0$

$\Delta = 16 - 4 \cdot 3 = 4$

$\lambda = \frac{4 \pm 2}{2}$ → 3, 1

AUTOVALORI di A

- 3
- 1
- 3 e 1

(2) Siccome ha tutti gli AUTOVALORI REALI, DISTINTI, A è DIAGONALIZZABILE

2. Sia A una qualsiasi matrice invertibile $A \in M(2 \times 2, \mathbb{R})$. Dire se i seguenti insiemi sono o no SPAZI VETTORIALI

(1) $V_1 = \{ X \in M(2 \times 2, \mathbb{R}) \text{ t.c. } A^{-1} X A = I \}$

$$A^{-1} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} A = I$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

se $A = I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ quindi $I^{-1} \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} I = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$

ma $I^{-1} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} I \neq$

NON È UNO SPAZIO VETTORIALE

② $V_2 = \{ X \in M(2\times 2, \mathbb{R}) \text{ t.c. } A^{-1} X A = X$

$$A^{-1}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

$$A^{-1}\begin{pmatrix} a+e & b+f \\ c+g & d+h \end{pmatrix} A = \underbrace{\left[A^{-1}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} + A^{-1}\begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix} \right] A}_{\text{È UNO SPAZIO VETTORIALE}}$$

③ $V_3 = \{ X \in M(2\times 2, \mathbb{R}) \text{ t.c. } A^{-1} X A \in M(2\times 2, \mathbb{Z}) \}$

se $A = \begin{pmatrix} \sqrt{2} & 0 \\ 0 & \sqrt{3} \end{pmatrix}$ $\quad A^{-1}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} A \neq \underbrace{\text{MATRICE con valori} \in \mathbb{Z}}_{\text{NON È UNO SPAZIO VETTORIALE}}$

③ Sia

$$M_\alpha = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 0 & \alpha & 0 \\ \alpha^2 & -1 & \alpha^2+1 \end{pmatrix}$$

a) Dire per quali $\alpha \in \mathbb{R}$ la matrice M_α è DIAGONALIZZABILE

b) Trovare una base di AUTOVETTORI per $\alpha = 0$

c) Per $\alpha = -1$ Trovare una base rispetto alla quale M_{-1} abbia forma Triangolare.

Soluzione:

(a)

$$M_\alpha - \lambda I = \begin{pmatrix} -\lambda & 1 & -1 \\ 0 & \alpha-\lambda & 0 \\ \alpha^2 & -1 & \alpha^2+1-\lambda \end{pmatrix}$$

$$\det(M_\alpha - \lambda I) = -\lambda \det\begin{pmatrix} \alpha-\lambda & 0 \\ -1 & \alpha^2+1-\lambda \end{pmatrix} + \alpha^2 \det\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ \alpha-\lambda & 0 \end{pmatrix} =$$

$$= -\lambda(\alpha-\lambda)(\alpha^2+1-\lambda) + \alpha^2(\alpha-\lambda) =$$

$$= (\alpha-\lambda)(-\lambda\alpha^2+\lambda^2+\alpha^2-\lambda) =$$

$$= (\alpha-\lambda)(-\lambda^2+\lambda(-1-\alpha^2)+\alpha^2)$$

$$\lambda_{1,2} = \frac{1+\alpha^2 \pm \sqrt{(-1-\alpha^2)^2-4\alpha^2}}{2}$$

$$\sqrt{(1-\alpha^2)^2-4\alpha^2} = \sqrt{1+\alpha^4+2\alpha^2-4\alpha^2}$$

$$= \sqrt{\alpha^4-2\alpha^2+1} = \sqrt{(1-\alpha^2)^2}$$

se $\alpha \neq 0$ e $\alpha \neq \pm 1$

$$\begin{cases} \lambda_3 = \alpha \\ \lambda_1 = 1 \\ \lambda_2 = \alpha^2 \end{cases}$$

LA MATRICE ha Tutti gli AUTOVALORI in $\mathbb{R}$

DISTINTI REALI

$\underbrace{\hphantom{xxxxxxxxxxxx}}$

Quindi è DIAGONALIZZABILE | MA per essere sicuro devo vedere cosa accade con $\alpha = 0$. $\alpha \neq \pm 1$

4 a) Costruire $f: M(2\times 3, \mathbb{R}) \longrightarrow M(2\times 2, \mathbb{R})$ lineare Tale che $\dim \operatorname{Ker} f = 2$

$$f\left(\underbrace{\begin{pmatrix}1 & 0\\0 & 0\end{pmatrix}}_{v_1}\right) = \begin{pmatrix}3 & 0\\0 & 0\end{pmatrix} \quad e \quad f\left(\underbrace{\begin{pmatrix}0 & -1\\1 & 0\end{pmatrix}}_{v_2}\right) = \begin{pmatrix}0 & -5\\5 & 0\end{pmatrix}$$

b) La f è DIAGONALIZZABILE?

Soluzione:

a) Scelgo come base $\{v_1, v_2, v_3, v_4\}$, con $v_3 = \begin{pmatrix}0 & 0\\1 & 0\end{pmatrix}$, $v_4 = \begin{pmatrix}0 & 0\\0 & 1\end{pmatrix}$

$$f\begin{pmatrix}0 & 0\\1 & 0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0 & 0\\0 & 0\end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix}3 & 0\\0 & 0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3\\0\\0\\0\end{pmatrix}$$

$$f\begin{pmatrix}0 & 0\\0 & 1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0 & 0\\0 & 0\end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix}0 & -5\\5 & 0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\5\\0\\0\end{pmatrix}$$

f sarà $\begin{pmatrix}3 & 0 & 0 & 0\\0 & 5 & 0 & 0\\0 & 0 & 0 & 0\\0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$

b) LA MATRICE è GIÀ DIAGONALE.

Se $\alpha = 0$

$$M_0 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \qquad M_0 - \lambda I = \begin{pmatrix} -\lambda & 1 & -1 \\ 0 & -\lambda & 0 \\ 0 & -1 & 1-\lambda \end{pmatrix}$$

$$\det(M_0 - \lambda I) = -\lambda(-\lambda(1-\lambda))$$

$\lambda = 0$ MOLT. ALG.: 2

$\lambda = 1$ MOLT. ALG. 1

$\lambda = 0$

$y = z$

$+y = z$

$$\begin{cases} x = t \\ y = s \\ z = s \end{cases} \qquad t(1,0,0) + s(0,1,1)$$

MOLT. GEOM.: 2

$\lambda = 1$

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{cases} -x + y - z = 0 \\ 0 - y = 0 \\ 0 - y = 0 \end{cases} \qquad \begin{matrix} x = -s \\ y = 0 \\ z = s \end{matrix} \qquad s(-1,0,1)$$

MOLT. GEOM. 1

Quindi è DIAGONALIZZABILE anche per $\alpha = 0$

(b) Una base di AUTOVETTORI è $\{(1,0,0), (0,1,1) (-1,0,1)\}$

(c) $\alpha = -1$

$$M_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \qquad M_1 - \lambda = \begin{pmatrix} -\lambda & 1 & -1 \\ 0 & -1-\lambda & 0 \\ 1 & -1 & 2-\lambda \end{pmatrix}$$

$$\det(M_1 - \lambda) = -\lambda[(-1-\lambda)(2-\lambda)] + (-1-\lambda) = (-1-\lambda)[+\lambda^2 - 2\lambda + 1]$$

$\lambda = 1$ MOLT ALG $= 2$ $\quad \lambda = -1$ MOLT ALG $= 1$

$\lambda = 1$

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 0 & -2 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{cases} -x + y - z = 0 \\ -2y = 0 \\ x - y + z = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} x = -s \\ y = 0 \\ z = s \end{cases} \quad s(-1, 0, 1)$$

NON È DIAGONALIZZABILE

ha MOLT. GEOMETRICA $= 1 \neq 2$

(ok, riprova)

$\lambda = -1$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix} \quad \begin{cases} x + y - z = 0 \\ 0 = 0 \\ x - y + 3z = 0 \end{cases} \quad t(1, -2, -1)$$

COMPLETO I DUE AUTOVETTORI A BASE di $\mathbb{R}^3$

$$B = \{(-1,0,1), (1,-2,-1), (1,0,0)\}$$

$$T = M^{-1} \cdot M_A \cdot M \leftarrow \quad T = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{2} & 1 \\ 0 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} M_A \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

MATRICE TRIANGOLARE

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Oppure potevo vedere T come

$T(v_1) =$
$T(v_2) =$
$T(v_3) =$

e poi vederlo nelle coordinate di v_1, v_2, v_3

ESERCIZI D'ESAME ALGEBRA LINEARE

08/12/2021

TESTO 24/07/2018

(1) Sia A una matrice di n righe e a n colonne a coeff. reali
Supponiamo valga

$$A^2 - 4A + 3I = 0$$

dove I è la matrice identica

(1) Calcolare gli AUTOVALORI (reali e complessi) di A
(2) Dimostrare che A è DIAGONALIZZABILE

Soluzione:

(1) $\lambda^2 - 4\lambda + 3 = 0$

$\Delta = 16 - 4(1)(3) = 4$

$\lambda_{1,2} = \frac{4 \pm 2}{3}$ → 1, 3

AUTOVALORI SONO
- 1) 1 e 3
- 2) 3
- 3) 1

(2) A è DIAGONALIZZABILE
perché in tutti e 3 i casi ha AUTOVALORI E.I.B., DISTINTI

(2) Sia t un parametro reale e sia

$$B_t = \begin{pmatrix} 1 & -t & t-1 & t^2 \\ -1 & t+1 & 2t-2 & -t \\ 0 & 0 & t+1 & 1-t \\ 0 & 0 & 1 & t \end{pmatrix}$$

- 1 Per quali valori di t gli autovalori di B_t sono TUTTI REALI?
- 2 Per quali valori di t B_t è DIAGONALIZZABILE?

Soluzione:

(1)

$$\det \begin{pmatrix} 1-\lambda & -t & t-1 & t^2 \\ -1 & t+1-\lambda & 2t-2 & -t \\ 0 & 0 & t+1-\lambda & 1-t \\ 0 & 0 & 1 & t-\lambda \end{pmatrix} =$$

$$= (1-\lambda)\det \begin{pmatrix} t+1-\lambda & 2t-2 & -t \\ 0 & t+1-\lambda & 1-t \\ 0 & 1 & t-\lambda \end{pmatrix} - \det \begin{pmatrix} -t & t-1 & t^2 \\ 0 & t+1-\lambda & 1-t \\ 0 & 1 & t-\lambda \end{pmatrix} =$$

$$= (1-\lambda)(t+1-\lambda)\left[(t+1-\lambda)(t-\lambda)-1+t\right] + (-t)\left[(t+1-\lambda)(t-\lambda)-1+t\right] =$$

$$= \left[t^2+t-\lambda t-\lambda+\lambda^2-\lambda t-1+t\right](t+1-\lambda-\lambda t-\lambda+\lambda^2-t) =$$

$$= \left[\lambda^2+\lambda(-2t-1)+(t^2+2t-1)\right](\lambda^2+\lambda(-2-t)+1)$$

$$\frac{2t+1 \pm \sqrt{(-2t-1)^2-4t^2-8t+4}}{2} = \frac{2t+1 \pm \sqrt{5-4t}}{2} \quad \geq 0$$

$$\frac{2+t \pm \sqrt{(-2-t)^2-4}}{2} = \frac{2+t \pm \sqrt{t^2+4t}}{2} \quad \geq 0$$

Per avere RADICI di $B(t)$ REALI:

$$\begin{cases} 5-4t \geq 0 \\ t^2+4t \geq 0 \end{cases} \Rightarrow \left[t \leq -4 \quad 0 \leq t \leq \frac{5}{4} \right]$$

③ Costruire se possibile, una appl. lineare $T: \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ con queste proprietà:

1. $T(e_4) \neq 0$ e $\langle T(e_4), e_4 \rangle = 0$
2. $T(\text{span}\{e_1, e_2, e_3\}) = T(e_4)^\perp$

È invertibile?

Soluzione:

$T(e_4) = e_1$ (può essere) così $\langle e_1, e_4 \rangle = 0$ ok

$T(e_3) = e_2$

$T(e_2) = e_3$

$T(e_1) = e_4$

così $T(\text{span}\{e_1, e_2, e_3\}) = T(e_4)^\perp$

$T(e_2) = e_3$, $T(e_1) = e_4$, $T(e_3) = e_2$, $T(e_4) = e_1$

La matrice associata a T sarà dunque:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$\det(A) = +1 \Longleftrightarrow$ INVERTIBILE

ESERCIZI D'ESAME ALGEBRA LINEARE

08/12/2021

TESTO 3/07/2018

① Sia $V = U \oplus W$ uno spazio vettoriale su $\mathbb{R}$ di dimensione 4 che sia somma diretta di 2 sottospazi U e W di dimensione 2. Siano $\{u_1, u_2\}, \{w_1 w_2\}$ basi rispettivamente di U e W. Siano T_a, $a \in \mathbb{R}$, endomorfismi di V la cui matrice associata rispetto alla base $\{u_1, u_2, w_1, w_2\}$ sia

$$M_a = \begin{pmatrix} a & 1 & 0 & 0 \\ -1 & a+1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 4 & 1 \end{pmatrix}$$

$w \in W$ $\quad$ $v \in U$

$w = \alpha_1 w_1 + \alpha_2 w_2$

$v = B_1 v_1 + B_2 v_2$

① Dimostrare che $\forall a, T_a(U) \subset U$ e $T_a(W) \subset W$

$$T_a(v) = \begin{pmatrix} a & 1 & 0 & 0 \\ -1 & a+1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 4 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} B_1 \\ B_2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} aB_1 + B_2 \\ (a+1)B_2 + B_1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \in U$$

VERIFICATO

$$T_a(w) = \begin{pmatrix} a & 1 & 0 & 0 \\ -1 & a+1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 4 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2\alpha_2 - \alpha_1 \\ \alpha_2 + 4\alpha_1 \end{pmatrix} \in W$$

VERIFICATO

②/③ Determina i valori per cui T_a è TRIANGOLABILE e DIAGONALIZZABILE

$$\det(M_a - \lambda I) = \det \begin{pmatrix} a-\lambda & 1 & 0 & 0 \\ -1 & a+1-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1-\lambda & 2 \\ 0 & 0 & 4 & 1-\lambda \end{pmatrix} =$$

$$= (a-\lambda)(a+1-\lambda) \det \begin{pmatrix} -1-\lambda & 2 \\ 4 & 1-\lambda \end{pmatrix} + \det \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1-\lambda & 2 \\ 0 & 4 & 1-\lambda \end{pmatrix} =$$

$$= (a-\lambda)(a+1-\lambda)[(-1-\lambda)(1-\lambda) - 8] + [(-1-\lambda)(1-\lambda) - 8] =$$

$$= [(-1-\lambda)(1-\lambda)-8][(a-\lambda)(a+1-\lambda)+1] =$$

$$= [\lambda^2+\lambda(-2a-1)+a^2+a+1][\lambda^2-9] \to \lambda = -3, \quad \lambda = +3$$

$$\Delta = (-2a-1)^2 - 4(1)(a^2+a+1)$$

$$= 4a^2+1+4a-4a^2-4a-4 = \underline{-3 < 0}$$

NON ESISTONO AUTOVALORI ∈ soltanto ad $\mathbb{R}$

① NON È TRIANGOLABILE

② NON È DIAGONALIZZABILE

④ Per i valori di a per cui T_a è DIAGONALIZZABILE, dimostrare che esiste una base di autovettori $\{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ di T_a tale che $U = \text{span}\{v_1, v_2\}$, $W = \text{span}\{v_3, v_4\}$, cioè anche le restrizioni di T_a ai sottospazi U e W sono DIAGONALIZZABILI.

Soltanto la RESTRIZIONE di T_a al sottospazio W è DIAGONALIZZABILE

perché ha AUTOVALORI ∈ $\mathbb{R}$

$\lambda = \pm 3$

$$M_a = \begin{pmatrix} a & 1 & 0 & 0 \\ -1 & a+1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

$$T_a(U_1) = -3 M_1$$

$$T_a(U_2) = 3 M_2$$

2) Sia A una MATRICE QUADRATA a coeff reali di ordine n.
Sapendo che A è DIAGONALIZZABILE e che i suoi AUTOSPAZI sono in SOMMA DIRETTA ORTOGONALE $(V_{\lambda_1}, \dots, V_{\lambda_k} \in \mathbb{R}^n)$ (ossia tutti ortogonali tra loro)
dimostrare che A è SIMMETRICA

La MATRICE DIAGONALIZZANTE è una MATRICE ORTOGONALE
composta da AUTOVETTORI di A

$$D = M^{-1} A M$$

$$A = M D M^{-1}$$

Siccome la MATRICE DIAGONALIZZANTE è una MATRICE ORTOGONALE } A è SIMMETRICA

$$A = MDM^{-1}$$

$$A^T = (MDM^{-1})^T = (M^{-1})^T (D)^T (M)^T = (M^T)^T D M^{-1} = MDM^{-1}$$

$$A^T = MDM^{-1} = A$$

$$A = A^T$$

SIMMETRICA

③ Si consideri lo SPAZIO VETTORIALE $V = \mathbb{R}_3[x]$. Sia $f: V \to V$ così definita:

$$f(p(x)) = (2x+1)\, p'(x)$$

Si chiede

① f è lineare.

$$f(\lambda p(x)) = (2x+1)\, \lambda p'(x) = \lambda[(2x+1)p'(x)] = \lambda f(p(x))$$

$$f(p(x)+q(x)) = f(p(x)) + f(q(x))$$

$$(2x+1)(p(x)+q(x))' = (2x+1)p'(x) + (2x+1)q'(x)$$

Forse meglio ESEMPIO PRATICO

② f è TRIANGOLARE?

Trovo la MATRICE ASSOCIATA A f rispetto alla base canonica $\{x^3, x^2, x, 1\}$

$f(1) = 0$

$f(x) = 2x+1$

$f(x^2) = (2x+1)2x = 4x^2+2x$

$f(x^3) = (2x+1)3x^2 = 6x^3+3x^2$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$$

GIÀ TRIANGOLARE S.P.

③ È DIAGONALIZZABILE?

Sì e i suoi AUTOVALORI sono

$$\left.\begin{array}{l} \lambda = 0 \\ \lambda = 2 \\ \lambda = 4 \\ \lambda = 6 \end{array}\right\} \in \mathbb{R} \text{ e DISTINTI}$$

④ Trovo in V una base di AUTOVETTORI per f

$\boxed{\lambda = 0}$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 6 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x = t \\ y = 0 \\ z = 0 \\ w = 0 \end{cases} \qquad t(1,0,0,0)$$

$\boxed{\lambda = 2}$

$$\begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x = t \\ y = 2t \\ z = 0 \\ w = 0 \end{cases} \qquad t(1,2,0,0)$$

$\boxed{\lambda = 4}$

$$\begin{pmatrix} -4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x = t \\ y = 4t \\ z = 4t \\ w = 0 \end{cases} \qquad t(1,4,4,0)$$

$\boxed{\lambda = 6}$

$$\begin{pmatrix} -6 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x = t \\ y = 6t \\ z = 12t \\ w = 8t \end{cases} \qquad t(1,6,12,8)$$

LA BASE di AUTOVETTORI SARÀ $\{(1,0,0,0),(1,2,0,0),(1,4,4,0),(1,6,12,8)\}$

$$D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 6 \end{pmatrix} \qquad A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 4 & 6 \\ 0 & 0 & 4 & 12 \\ 0 & 0 & 0 & 8 \end{pmatrix} \qquad \boxed{D = A^{-1} M A}$$

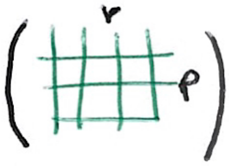
ESERCIZI D'ESAME ALGEBRA LINEARE

08/12/2021

TESTO 12/06/2018

(1) Sia A una MATRICE con p righe e q colonne e B un altra matrice con q righe e r colonne.
Dimostrare che $rg\,AB \leq rg\,A, rg\,B$

AB avrà r colonne e p righe



Il RANGO è il numero MASSIMO di COLONNE linearmente indipendenti
ma anche di righe lin. indipendenti

$$rg\,A = rg\,A^T$$

Quindi il rango massimo (dim Im T) sarà al massimo il MAX tra n° righe e n° colonne

se $q \geq p$ rk MAX $A \leq p$
se $q \geq r$ rk MAX $B \leq r$

$p \geq r$ $rk\,AB \leq r$
$p \leq r$ $rk\,AB \leq p$

Se $q \geq p$ rk MAX $A \leq p$
se $q \leq r$ rk MAX $B \leq q$

$r \geq q \geq p$ $rk\,AB \leq p$

Se $q \leq p$ rk MAX $A \leq q$
se $q \geq r$ rk MAX $B \leq r$

$p \geq q \geq r$ $rk\,AB \leq r$

Se $q \leq p$ rk MAX $A \leq q$
se $q \leq r$ rk MAX $B \leq q$

$rk\,AB \leq q$

2 Vero o falso

1. Se A è SIMMETRICA allora è DIAGONALIZZABILE VERO

Se $A = A^T$ allora A è DIAG. e la MATRICE DIAGONALIZZANTE è una MATRICE ORTOGONALE composta da AUTOVETTORI di A ortogonali tra loro.

2. Se A è DIAG. allora è simmetrica FALSO

Non sempre vero

3. Esistono MATRICI ORTOGONALI NON INVERTIBILI FALSO

Per definizione una MATRICE ortogonale è INVERTIBILE, Tale che $A^{-1} = A^T$

4. Autovalori reali e complessi di MATRICE ORTOGONALE hanno modulo 1. FALSO

Gli autovalori di una M. ORTOGONALE non per forza hanno modulo 1

5. L'insieme delle MATRICI quadrate NON INVERTIBILI è un sottospazio delle matrici quadrate. FALSO

Non dimostrabile

CONTROESEMPIO:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \det(B, A) = 0$$

$$A+B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \det(A+B) = \underline{1 \neq 0}$$

6. Se 3 vettori dello spazio vettoriale sono indipendenti a 2 a 2 allora sono indipendenti. VERO

v_1, v_2 IND.
v_2, v_3 IND.
v_3, v_1 IND.

$\underline{v_1, v_2, v_3}$
LIN. INDIP.

③ Discutere il sistema al VARIARE di $a, b \in \mathbb{R}$

$$\begin{cases} x + (a+2)y - 2z = 0 \\ -x + ay = 0 \\ x + y + (a+2)^2 z = b \end{cases}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & a+2 & -2 & 0 \\ -1 & a & 0 & 0 \\ 1 & 1 & (a+2)^2 & b \end{array}\right) \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & a+2 & -2 & 0 \\ -1 & a & 0 & 0 \\ 0 & a+1 & (a+2)^2 & b \end{array}\right)$$

$\Downarrow$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -1 & a & 0 & 0 \\ 0 & 2a+2 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 2(a+2)^2-2 & b \end{array}\right) \Leftarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2(a+2) & -2 & 0 \\ -1 & a & 0 & 0 \\ 0 & a+1 & (a+2)^2 & b \end{array}\right)$$

se $2a+2 \neq 0$ e se $-2+2(a+2)^2 \neq 0$ $\iff$ $a \neq -1$, $a \neq -1$ $a \neq -3$ [Ho un'unica soluzione] $\begin{cases} a \neq -1 \\ a \neq -3 \end{cases}$

Se $a = -1$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & b \end{array}\right)$$

- $b = 0$ ∞^1 soluzioni
- $b \neq 0$ IMPOSSIBILE

Se $a = -3$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -1 & -3 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & b \end{array}\right)$$

- $b = 0$ ∞^1 soluzioni
- $b \neq 0$ IMPOSSIBILE

(4) Sia A una matrice 3×3 a coeff. reali.

Siano $a \neq b$ AUTOVALORI di A con molteplicità algebrica 1 e 2.

Siano v_a e $v_b \in \mathbb{R}^3$ AUTOVETTORI relativi ad a e b e sia v un terzo vettore

Tale che v_a, v_b, v sia una base di $\mathbb{R}^3$.

Dimostrare che in questa base la MATRICE B dell'ENDOMORFISMO definito da A

è TRIANGOLARE e gli elementi sulla diagonale sono $b_{11} = a$ $b_{22} = b$ $b_{33} = b$

Soluzione:

la MATRICE B sulla DIAGONALE avrà

$\lambda_1 = a$ MOLT. ALG. 1

$\lambda_2 = b$ MOLT. ALG. 2.

v_a, v_b, v BASE di $\mathbb{R}^3$

$$T(v_a) = a v_a + 0 v_b + 0 v$$

$$T(v_b) = 0 v_a + b v_b + 0 v$$

$$T(v) = \alpha v_a + \beta v_b + b v$$

$$T = \begin{pmatrix} a & 0 & \alpha \\ 0 & b & \beta \\ 0 & 0 & b \end{pmatrix}$$

MATRICE TRIANGOLARE SIMILE AD A

$$M = \begin{pmatrix} v_a, & v_b, & v \end{pmatrix}$$

MATRICE DIAGONALIZZANTE

$$T = M^{-1} A M$$

$$A = M T M^{-1}$$