① In $V_6(\mathbb{R})$ consideriamo i seguenti sottospazi

$$A: \begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 - x_4 + x_5 = 0 \\ x_1 - 2x_4 = 0 \end{cases}$$

$$B: \begin{cases} x_2 - x_3 + x_4 - x_5 = 0 \\ x_2 - x_3 = 0 \end{cases}$$

1. Scrivere una rappresentazione cartesiana e parametrica di $A+B$ e $A \cap B$. $V = A \oplus B$?
2. Calcolare $\dim((A+B)^\perp)$ e dare una rappresentazione parametrica di $(A \cap B)^\perp$
3. Calcolare la distanza di P da A, dove $P = (1,0,0,0,0,0)$
4. Scrivere lo spazio S parallelo a B e per passante per $Q = (0,1,0,0,0,0)$. Scrivere una base geometrica di S.

1. $\dim(A) = 4$ $\quad\quad \dim(B) = 4$

$$A \cap B \begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 - x_4 + x_5 = 0 \\ x_1 - 2x_4 = 0 \\ x_2 - x_3 + x_4 - x_5 = 0 \\ x_2 - x_3 = 0 \end{cases} \quad \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} R_2 \to R_2 - R_1$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \\ R_3 \to R_3 - R_2 \\ R_4 \to R_4 - R_2 \end{matrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} R_4 \to R_4 - \frac{1}{2} R_3$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{rank} = 4 \to \dim(A \cap B) = 2$$

$\dim(A+B) = \dim(A) + \dim(B) - \dim(A \cap B) = 4 + 4 - 2 = 6 \to A + B = V_6(\mathbb{R})$

$V = A \oplus B$? NO! (la loro intersezione sarebbe dovuto essere il vettore nullo, cioè avrei dovuto avere $A \cap B = \{0\}$).

2. $A + B = V_6(\mathbb{R}) \quad (A+B)^\perp = \{0\} \to \dim((A+B)^\perp) = 0$

$$A \cap B: \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} R_2 \to R_2 + R_3 + R_4 \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} R_1 \to R_1 + R_2 + R_3 - R_4$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 - x_3 = 0 \\ x_4 = 0 \\ x_5 = 0 \end{cases}$$

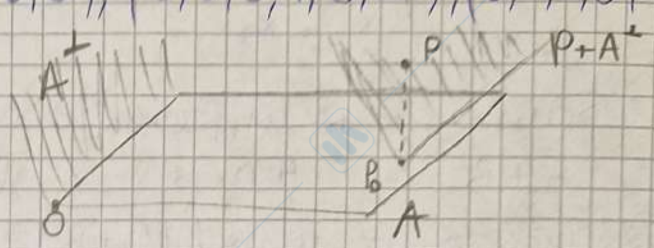
$A \cap B = \{(0, x_2, x_2, 0, 0, x_6) : x_2, x_6 \in \mathbb{R}\} = L\big((0,1,1,0,0,0), (0,0,0,0,0,1)\big)$

$\dim(A \cap B) = 2 \to \dim((A \cap B)^\perp) = 4$

$(A \cap B)^\perp = L\big((1,0,0,0,0,0), (0,1,-1,0,0,0), (0,0,0,1,0,0), (0,0,0,0,1,0)\big)$

3. $P \in A$? NO

$P_0 = (P + A^\perp) \cap A$



$A^\perp = L(N_1, N_2)$

con $N_1 = (1,-1,1,-1,1,0)$
$N_2 = (1,0,0,-2,0,0)$

$A = \begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 - x_4 + x_5 = 0 \\ x_1 - 2x_4 = 0 \end{cases}$

$$P + A^\perp = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + L\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right) = \left\{ \begin{pmatrix} 1+s+t \\ -s \\ s \\ -s-2t \\ s \\ 0 \end{pmatrix} : s,t \in \mathbb{R} \right\}$$

$$P_0 = \begin{cases} 1+s+t-(-s)+s-(-s-2t)+s = 0 \\ 1+s+t-2(-s-2t) = 0 \end{cases} \qquad P_0 = \begin{cases} 1+5s+3t = 0 \\ 1+3s+5t = 0 \end{cases}$$

$$\left(\begin{array}{cc|c} 5 & 3 & -1 \\ 3 & 5 & -1 \end{array}\right) R_1 \to \tfrac{1}{5} R_1 \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 3/5 & -1/5 \\ 3 & 5 & -1 \end{array}\right) R_2 \to R_2 - 3R_1 \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 3/5 & -1/5 \\ 0 & 16/5 & -2/5 \end{array}\right) R_2 \to \tfrac{5}{16} R_2$$

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 3/5 & -1/5 \\ 0 & 1 & -1/8 \end{array}\right) R_1 \to R_1 - \tfrac{3}{5} R_2 \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & -1/8 \\ 0 & 1 & -1/8 \end{array}\right) \qquad \begin{aligned} s &= -1/8 \\ t &= -1/8 \end{aligned}$$

$P_0 = \left(1 - \frac{1}{8} - \frac{1}{8}, \frac{1}{8}, -\frac{1}{8}, \frac{1}{8} + \frac{2}{8}, -\frac{1}{8}, 0\right) = \left(\frac{3}{4}, \frac{1}{8}, -\frac{1}{8}, \frac{3}{8}, -\frac{1}{8}, 0\right)$

$d(P, A) = \|P - P_0\| = \|P_0 - P\|$

$P_0 - P = \left(-\frac{1}{4}, \frac{1}{8}, -\frac{1}{8}, \frac{3}{8}, -\frac{1}{8}, 0\right) \qquad \|P_0 - P\| = \sqrt{\frac{4+1+1+9+1}{64}} = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$

4. $S = Q + B$ $\qquad \dim(S) = \dim(B) = 4$

$B = \begin{cases} x_4 - x_5 = 0 \\ x_2 - x_3 = 0 \end{cases} \qquad S = \begin{cases} x_4 - x_5 = 0 \\ x_2 - x_3 = 1 \end{cases}$

$B = L(B_1, B_2, B_3, B_4)$ $\qquad$ base geometrica: $\{Q, Q+B_1, Q+B_2, Q+B_3, Q+B_4\}$

$$B = L\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right) \quad \text{base geometrica: } \left\{ \underset{Q}{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}}, \underset{Q+B_1}{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}}, \underset{Q+B_2}{\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \to$$

② Trovare gli autovalori

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 0 & 3 & -1 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\det(\lambda I - A) = \det \begin{pmatrix} \lambda-2 & 1 & -1 \\ 0 & \lambda-3 & 1 \\ -2 & -1 & \lambda-3 \end{pmatrix} \begin{matrix} \lambda-2 & 1 \\ 0 & \lambda-3 \\ -2 & -1 \end{matrix} = (\lambda-2)(\lambda-3)^2 - 2 - (-2)(-1)(\lambda-3) - (-1)(\lambda-2) =$$

$$= \lambda^3 - 8\lambda^2 + 20\lambda - 16 = (\lambda-4)(\lambda^2 - 4\lambda + 4) = (\lambda-4)(\lambda-2)^2$$

	1	-8	20	-16
4		4	-16	16
	1	-4	4	0

$\Rightarrow$ gli autovalori sono: $\lambda_1 = 4$, $\lambda_{2,3} = 2$

③ Trovare gli autovalori:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -3 & 2 & -5 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$(t-1)(t-2)(t+1) - 3 - 5(t-1) - 3(t+1)$$

$$\det \begin{pmatrix} t-1 & 1 & -1 \\ 3 & t-2 & 5 \\ 0 & 1 & t+1 \end{pmatrix} = t^3 - 2t^2 - 9t + 1$$

t	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5
$p(t)$	-17	3	7	1	-9	-17	-17	-3	3

* tra -3 e -2 * tra 0 e 1 * tra 4 e 5

④ Data $\varphi : V_3(\mathbb{R}) \to V_3(\mathbb{R})$ $\quad \varphi(x_1, x_2, x_3) = (x_1 + x_3, x_2, x_1)$

Stabilire se è diagonalizzabile.

$$M(\varphi) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \det(\varphi - \lambda I) = \det \begin{pmatrix} 1-\lambda & 0 & 1 \\ 0 & 1-\lambda & 0 \\ 1 & 0 & -\lambda \end{pmatrix} \begin{matrix} 1-\lambda & 0 \\ 0 & 1-\lambda \\ 1 & 0 \end{matrix}$$

$$= (1-\lambda)(1-\lambda)(-\lambda) - (1-\lambda) = \lambda^3 - 2\lambda^2 + 1$$

	1	-2	0	1
1				
	1	-1	-1	0

$$(\lambda-1)(\lambda^2 - \lambda - 1)$$

$$\lambda_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{1+4}}{2} = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$$

$\lambda_3 = 1$

m.a. = m.g. = 1 per $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$

$\rightarrow 1 \le m.g.(\lambda) \le m.a.(\lambda) \le n$

diagonalizzabile $\rightarrow$ se è matrice quadrata di ord n con n autovalori distinti

(5) Scrivere, se esiste, una matrice 3×3 NON diagonalizzabile che ammette rango 2.

MATRICE IN FORMA DI JORDAN → NON DIAGONALIZZABILE!

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \det\begin{pmatrix} 1-\lambda & 1 & 0 \\ 0 & 1-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & -\lambda \end{pmatrix}\begin{matrix} 1-\lambda & 1 \\ 0 & 1-\lambda \\ 0 & 0 \end{matrix} = \lambda(1-\lambda)^2$$

diagonale principale (perché di Jordan!)

$\lambda_1 = 0$ m.a. = 1, m.g. = 1

$\lambda_{2,3} = 1$ m.a. = 2, m.g. = 1 → 1 blocco di ordine 2

(6) Sia $\rho_\alpha : V_2(\mathbb{R}) \to V_2(\mathbb{R})$ la rotazione di angolo α attorno all'origine.

$$M = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\operatorname{sen}\alpha \\ \operatorname{sen}\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$$

1. Trovare gli autovalori di ρ_α.

$$\lambda^2 - 2\cos\alpha\cdot\lambda + 1 = 0$$

$$\lambda_{1,2} = \cos\alpha \pm \sqrt{\cos^2\alpha - 1} = \cos\alpha \pm \sqrt{-\operatorname{sen}^2\alpha} = \cos\alpha \pm i\operatorname{sen}\alpha = e^{\pm i\alpha} \in \mathbb{C}$$

è reale sse la parte Im è zero cioè $\alpha = k\pi$ (poiché voglio $\operatorname{sen}\alpha = 0$)

2. Descrivere gli autospazi di λ_1 e λ_2:

$$A(\underbrace{e^{i\alpha}}_{\cos\alpha + i\operatorname{sen}\alpha}) = \operatorname{Ker}\left(\rho_\alpha - (\cos\alpha + i\operatorname{sen}\alpha)I\right) = \left\{(x,y) \in V_2(\mathbb{R}) : \begin{pmatrix} \cos\alpha - (\cos\alpha + i\operatorname{sen}\alpha) & -\operatorname{sen}\alpha \\ \operatorname{sen}\alpha & \cos\alpha - (\cos\alpha + i\operatorname{sen}\alpha) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right\}$$

$$A(e^{i\alpha}) = \left\{\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} : \begin{pmatrix} -i\operatorname{sen}\alpha & -\operatorname{sen}\alpha \\ \operatorname{sen}\alpha & -i\operatorname{sen}\alpha \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right\}$$

$$\begin{cases} -i\operatorname{sen}\alpha\cdot x - \operatorname{sen}\alpha\cdot y = 0 & \varepsilon_1 \\ \operatorname{sen}\alpha\cdot x - i\operatorname{sen}\alpha\cdot y = 0 & \varepsilon_2 \end{cases} \qquad \varepsilon_1 = (-i)\varepsilon_2$$

Sono in $V_2(\mathbb{R})$ e ho un sistema di 2 equaz. in 2 incogn. → NO! La dim. dello spazio deve essere >0 quindi le equaz. sono dipendenti

rappresentazione cartesiana di $A(e^{i\alpha})$:

$i\operatorname{sen}\alpha\cdot x + \operatorname{sen}\alpha\cdot y = 0$ ho 1 equaz.!

- se $\alpha \neq k\pi \to ix + y = 0$ rapp. cart.

$mg.(e^{i\alpha}) = \dim(A(e^{i\alpha})) = 1$, rapp. param. $y = -ix$ $\begin{pmatrix} x \\ -ix \end{pmatrix} = L\begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix}$

AUTOVETTORE dell'autovalore $e^{i\alpha}$

$A(e^{-i\alpha}) = A(\cos\alpha - i\operatorname{sen}\alpha) = \ldots$ (continuare)

3. ρ_α è diagonalizzabile se $\alpha \neq k\pi$?

In $\mathbb{R}$ NO perché gli autovalori sono complessi

In $\mathbb{C}$ sì perché m.a.$(e^{i\alpha})$ = m.g.$(e^{i\alpha})$ e m.a.$(e^{-i\alpha})$ = mg.$(e^{-i\alpha})$

Trovare una base di autovettori di $V_2(\mathbb{C})$: $\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \; \\ \; \end{pmatrix}\right\}$

autovettore dell'autovalore $e^{-i\alpha}$

⑦ Sia $x_1^2+3x_1x_2+4x_2^2$ polinomio di 2° grado omogeneo.

Rappresenta una forma quadratica, cioè $q: V_2(\mathbb{R})\to\mathbb{R}$

$q(x_1,x_2)=x_1^2+3x_1x_2+4x_2^2 \qquad (X)_E=(x_1,x_2)$

Chi è la forma bilineare simmetrica associata a q?

$\phi: V_2(\mathbb{R})\times V_2(\mathbb{R})\to\mathbb{R}$

$$\phi(X,Y)=\frac{q(X+Y)-q(X)-q(Y)}{2} \qquad \begin{cases}(X)=(x_1,x_2)\\(Y)=(y_1,y_2)\\(X+Y)=(x_1+y_1,\ x_2+y_2)\end{cases}$$

$$=\frac{1}{2}\Big((x_1+y_1)^2+3(x_1+y_1)\cdot(x_2+y_2)+4(x_2+y_2)^2-(x_1^2+3x_1x_2+4x_2^2)-(y_1^2+3y_1y_2+4y_2^2)\Big)=x_1y_1+\frac{3}{2}y_1x_2+\frac{3}{2}x_1y_2+4x_2y_2$$

⑧ $$M_E(\phi)=\begin{pmatrix}1 & 3/2\\ 3/2 & 4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\phi(E_1,E_1) & \phi(E_1,E_2)\\ \phi(E_2,E_1) & \phi(E_2,E_2)\end{pmatrix}$$ Rappresenta una forma quadratica

$$q(X)=\phi(X,X)=(x_1,x_2)\begin{pmatrix}1 & 3/2\\ 3/2 & 4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}=\left(x_1+\frac{3}{2}x_2,\ \frac{3}{2}x_1+4x_2\right)\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}=$$

$$=x_1^2+\frac{3}{2}x_1x_2+\frac{3}{2}x_1x_2+4x_2^2=x_1^2+3x_1x_2+4x_2^2$$

⑨ Sia $\phi: V_3(\mathbb{R})\times V_3(\mathbb{R})\to\mathbb{R}$ la forma bilineare definita nel seguente modo rispetto alla base $E=(E_1,E_2,E_3)$ di $V_3(\mathbb{R})$

$(X)_E=(x_1,x_2,x_3) \qquad (Y)_E=(y_1,y_2,y_3)$

$\phi(X,Y)=2x_1y_1+2x_2y_2+x_3y_3-x_1y_2-x_2y_1-x_2y_3-x_3y_2$

ϕ è un prodotto scalare?

↳ ϕ deve essere una forma bilineare simmetrica definita positiva

$$M_E(\phi)=\begin{pmatrix}\phi(E_1,E_1) & \phi(E_1,E_2) & \phi(E_1,E_3)\\ \boxed{\phi(E_2,E_1)} & \phi(E_2,E_2) & \phi(E_2,E_3)\\ \phi(E_3,E_1) & \phi(E_3,E_2) & \phi(E_3,E_3)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2 & -1 & 0\\ -1 & 2 & -1\\ 0 & -1 & 1\end{pmatrix}$$

$\phi((0,1,0),(1,0,0))$

$\Rightarrow \phi$ è forma bilineare simmetrica. È definita positiva?

↘ Devo calcolare gli autovalori e verificare che siano reali e maggiori di zero.

$$\det\begin{pmatrix}2-\lambda & -1 & 0\\ -1 & 2-\lambda & -1\\ 0 & -1 & 1-\lambda\end{pmatrix}=\lambda^3-5\lambda^2+6\lambda-1$$

3 variazioni di segno

↓

Lo so anche senza calcolarle! ← 3 radici positive $\Rightarrow \phi$ prodotto scalare