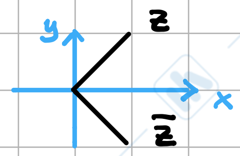
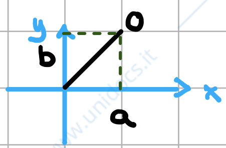
Definizioni esame

1) Coniugato e modulo di un numero complesso

Sia $z = a+bi$, il coniugato $\bar{z} = a-bi$



Il modulo di un numero complesso è $|z| = \sqrt{a^2+b^2}$



$|z|$ rappresenta $\overline{OP}$ che sarebbe l'ipotenusa del triangolo.

2) La TRASPOSTA, CONIUGATA E H-TRASPOSTA di una MATRICE

Sia $A = (a_{ij})_{m \times n}$:

- La TRASPOSTA di A è la matrice $B = (b_{ij})_{n \times m}$ t.c. $b_{ij} = a_{ji}$.
  Si indica con $B = A^T$.
- La CONIUGATA di A è la matrice $B = (b_{ij})_{m \times n}$ t.c $b_{ij} = \overline{a_{ij}}$.
  Si indica con $B = \bar{A}$.
- La H-TRASPOSTA di A è la matrice $B = (b_{ij})_{n \times m}$ t.c. $b_{ij} = \overline{a_{ji}}$.
  Si indica con $B = A^H$.

3) Elencare i diversi tipi di matrice

- Matrice quadrata è una matrice la cui altezza m è uguale alla larghezza n.
- Matrice diagonale è una matrice che deve essere quadrata $(m=n)$ e $a_{ij} = 0$ se $i \neq j$.

- Matrice scalare è una matrice che deve essere quadrata $(m = n)$, diagonale ($a_{ij} = 0$ se $i \neq j$) e $\exists\, d \in \mathbb{C}$ t.c. $A = \text{diagonale}(d)$.
- Matrice triangolare superiore è una matrice che deve essere quadrata $(m = n)$ e $a_{ij} = 0$ se $i > j$.
- Matrice triangolare inferiore è una matrice che deve essere quadrata $(m = n)$ e $a_{ij} = 0$ se $i < j$.
- Matrice simmetrica è una matrice che deve essere quadrata $(m = n)$ dove $A^T = A$.
- Matrice Hermitiana è una matrice che deve essere quadrata $(m = n)$ dove $A^H = A$.
- Matrice anti-simmetrica è una matrice che deve essere quadrata $(m = n)$ dove $A^T = -A$
- Matrice anti-Hermitiana è una matrice che deve essere quadrata $(m = n)$ dove $A^H = -A$.

4) Matrici elementari

1) $E_{ij}(c) = \begin{bmatrix} 1 & & \\ & \ddots & \\ c & & 1 \end{bmatrix}$

$E_{ij}(c)$ è la matrice che si ottiene da I_m, sommando alla i-esima riga di I_m, la j-esima riga di I_m moltiplicata per uno scalare c.

$\forall A$ $m \times n$ la matrice $E_{ij}(c) \cdot A$ è la matrice che si ottiene da A sommando alla i-esima riga di A la j-esima riga di A per c scalare.

$$B = (E_{ij}(c) \cdot A) = \begin{bmatrix} e_1^T \\ \vdots \\ e_i^T + c e_j^T \\ \vdots \\ e_m^T \end{bmatrix} \cdot A = \begin{bmatrix} e_1^T A \\ \vdots \\ (e_i^T + c e_j^T) \cdot A \\ \vdots \\ e_m^T \end{bmatrix} \longrightarrow i\text{-esima riga di } B$$

La i-esima riga di B è $= e_i^T A + c e_j^T A$

$\overset{!}{=}$ (i-esima riga di A) $+ c \cdot$ (j-esima riga di A)

2) $c \neq 0$

$$E_i(c) = \begin{bmatrix} 1 & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & c & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & 1 \end{bmatrix}$$

$E_i(c)$ è la matrice che si ottiene da I_m moltiplicando la i-esima riga per uno scalare $c \neq 0$.
$\forall A$ $m \times n$ $E_i(c)$ è la matrice che si ottiene da A, moltiplicando la i-esima riga di A per $c \neq 0$ scalare.

$$B = (E_i(c) \cdot A) = \begin{bmatrix} e^T_1 \\ \vdots \\ c e^T_i \\ \vdots \\ e^T_m \end{bmatrix} A = \begin{bmatrix} e^T_1 A \\ \vdots \\ c e^T_i \cdot A \\ \vdots \\ e^T_m \cdot A \end{bmatrix} \rightarrow \text{i-esima riga di } B$$

$$\text{i-esima riga di } B = A\, e^T_i c \overset{!}{=} c \cdot (\text{i-esima riga di } A)$$

3) $E_{ij} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$

E_{ij} è la matrice che si ottiene da I_m scambiando la i-esima riga di I_m con la j-esima riga di I_m.
$\forall A$ $m \times n$ $E_{ij}A$ è la matrice che si ottiene da A scambiando la i-esima riga di A con la j-esima riga di A.

$$B = (E_{ij}A) = \begin{bmatrix} e^T_1 \\ \vdots \\ e^T_j \\ e^T_i \\ \vdots \\ e^T_m \end{bmatrix} A = \begin{bmatrix} e^T_1 A \\ \vdots \\ e^T_j A \\ e^T_i A \\ \vdots \\ e^T_m A \end{bmatrix} \begin{array}{l} \\ \\ \rightarrow \text{i-esima riga di } B \\ \rightarrow \text{j-esima riga di } B \\ \\ \\ \end{array}$$

5) Sistema lineare risolubile, omogeneo e omogeneo associato ad un sistema lineare.

Un sistema lineare $A\underline{x} = b$, con A $m \times n$ e b $m \times 1$ é:

- RISOLUBILE se $\exists\ \underline{x} \in \mathbb{C}$ t.c. $A\underline{x} = \underline{b}$. Ogni tale $\underline{x}$ si chiama una soluzione di $A\underline{x} = \underline{b}$.
- OMOGENEO se il sistema ē del tipo $A\underline{x} = 0$.
- Il sistema lineare omogeneo associato ad $A\underline{x} = b$ ē $A\underline{x} = 0$.

6) Rango di una matrice

Il rango di una matrice ē il numero delle righe non nulle di una forma ridotta di GAUSS.
Il numero delle righe non nulle di una forma ridotta di GAUSS corrisponde al numero degli scalini e quindi al numero delle colonne dominanti.

7) Inversa destra, sinistra, bilatera

Sia A $m \times n$:

- Si dice che A ē invertibile a destra se $\exists\ R$ $n \times m$ t.c $AR = I_m$
  R ē quindi un' inversa destra di A.
- Si dice che A ē invertibile a sinistra se $\exists\ L$ $n \times m$ t.c. $LA = I_n$
  L é quindi un' inversa sinistra di A.
- Si dice che A ē invertibile (o non singolare) se $\exists\ B$ t.c $AB = I_m$, $BA = I_n$
  In tal caso B si dice inversa bilatera.

8) Sottospazio di spazio vettoriale

Sia V spazio vettoriale su $k \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$

Sia U un sottoinsieme di V, si dice sottospazio di V se vengono verificate queste 3 condizioni:

1) $\underline{0} \in U$
2) $\underline{u}_1 + \underline{u}_2 \in U$, $\forall\, \underline{u}_1, \underline{u}_2 \in U$
3) $\alpha\, \underline{u}_1 \in U$, $\forall\, \underline{u}_1 \in U$, $\forall\, \alpha \in k$

Se verificate posso dire $U \leq V$

↳ Simbolo di sottospazio

9) Combinazioni lineari di insiemi finiti di vettori

Sia V uno spazio vettoriale su $k \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$

Un insieme finito di vettori è una lista finita.

$A = \{\underline{v}_1; \underline{v}_2; \underline{v}_m\}$.

Ogni vettore viene separato da un ; , possono esserci ripetizioni e non conta l'ordine degli elementi.

Un esempio di insieme finito è: $\mathbb{R}^3 \quad \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} ; \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}$

Una combinazione lineare di un insieme finito di vettori $A = \{\underline{v}_1; \underline{v}_2; \underline{v}_m\}$ è un vettore del tipo:

$\alpha_1 \underline{v}_1 + \alpha_2 \underline{v}_2 + \alpha_m \underline{v}_m \quad \forall \alpha \in k$

Esempio: $V = k^3 \quad k \in \mathbb{R}$

$$\left\{ \underline{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} ; \underline{v}_2 = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} ; \underline{v}_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\} \qquad \alpha_1 = 1,\ \alpha_2 = 2,\ \alpha_3 = 0$$

$$\text{Combinazione} = \underline{v}_1 + 2\underline{v}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 5 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ 5 \\ 4 \end{bmatrix}$$

10) Sottospazio generato da un insieme finito di vettori.

Sia $A = \{ \underline{v}_1 ; \underline{v}_2 ; \underline{v}_m \}$ un insieme finito di vettori.
Il sottospazio generato da A, è l'insieme delle combinazioni lineari degli elementi di A.
Si indica con $\langle A \rangle$.

11) Insieme di generatori di uno spazio vettoriale

Sia V spazio vettoriale su $k \in \{ \mathbb{R}, \mathbb{C} \}$
Dato $\mathcal{S}$ un insieme finito di vettori, si dice che $\mathcal{S}$ è un insieme di generatori di V se $\langle \mathcal{S} \rangle = V$.

12) Insiemi di vettori L.D e L.I

Sia V uno spazio vettoriale su $k \in \{ \mathbb{R}, \mathbb{C} \}$ e $A = \{ \underline{v}_1 ; \underline{v}_2 ; \underline{v}_m \}$ un insieme finito di vettori:

- Dirò che A è L.I se l'unica combinazione lineare nulla degli elementi di A, è quella con tutti i coefficienti uguali a 0.

L.I se $\begin{cases} \alpha_1 \underline{v}_1 + \alpha_2 \underline{v}_2 + \alpha_m \underline{v}_m = 0 \\ \alpha_1, \alpha_2, \alpha_m \in k \end{cases} \longrightarrow \alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_m = 0$

- Dirò che A è L.D. se $\exists\ \alpha_1, \alpha_2, \alpha_m \in k$ NON TUTTI NULLI tali che $\alpha_1 \underline{v}_1 + \alpha_2 \underline{v}_2 + \alpha_m \underline{v}_m = 0$.
Basta che ci sia solo un $\alpha_i \neq 0$.

- $\underline{v}$ dipende linearmente da A se $\exists\ \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in k \mid \underline{v} = \alpha_1 \underline{v}_1 + \alpha_2 \underline{v}_2 + \alpha_m \underline{v}_m$

- $\underline{v}$ NON dipende linearmente da A se $\underline{v} \neq \alpha_1 \underline{v}_1 + \alpha_2 \underline{v}_2 + \alpha_m \underline{v}_m \quad \forall \alpha_1, \alpha_2, \alpha_m$

13) Basi e dimensione di uno spazio vettoriale

Sia V uno spazio vettoriale su $k \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$
Una base di V è un insieme di generatori di V che sia L.I.
La dimensione di V è il numero degli elementi di una sua qualunque base.

14) Somme e somme dirette di sottospazi

Sia V spazio vettoriale su $k \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$ e V_1 e V_2 sottospazi di V
$V_1 + V_2 = \{ \underline{u}_1 + \underline{u}_2 \mid \underline{u}_1 \in V_1, \underline{u}_2 \in V_2 \}$ = sottospazio di V.
Se $V_1 \cap V_2 = \{0\}$, $V_1 + V_2$ si indica con $\underbrace{V_1 \oplus V_2}_{\text{Somma diretta}}$.

15) Spazio delle colonne, righe, nullo di una matrice.

Sia $A \in M_{m\times n}(k)$ $\quad k \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$

$$A_{m\times n} = [\underline{a}_1, \underline{a}_2, \dots, \underline{a}_n] = \begin{bmatrix} \underline{r}^T_1 \\ \vdots \\ \underline{r}^T_m \end{bmatrix}$$

1) lo spazio delle colonne di A:

$$C(A) = \langle \underline{a}_1, \underline{a}_2, \dots, \underline{a}_n \rangle$$
$$= \{ \alpha_1 \underline{a}_1 + \alpha_2 \underline{a}_2 + \dots + \alpha_n \underline{a}_n \mid \alpha_1, \alpha_2, \alpha_n \in k \}$$

2) lo spazio delle righe di A:

$$R(A) = \langle (\underline{r}^T_1)^H, (\underline{r}^T_2)^H, \dots, (\underline{r}^T_m)^H \rangle$$
$$= \{ \overline{\underline{r}_1}; \overline{\underline{r}_2}; \dots; \overline{\underline{r}_m} \}$$

3) Lo spazio nullo di A:

$N(A)$: $\{ \underline{v} \in K^n \mid A\underline{v} = \underline{0} \}$

16) Basi ordinate di uno spazio vettoriale; vettore delle coordinate di un vettore dello spazio rispetto ad una base ordinata.

Sia V uno spazio vettoriale su $K \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$

- Si definisce base ordinata di V una base di V in cui vanno fissati gli elementi di V.

Esempio :

$B_1 = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} ; \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$
$B_2 = \left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} ; \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}$
Due basi di V ma non sono basi ordinate di V.

- Sia V spazio vettoriale e B una base ordinata di V.
Si definisce vettore delle coordinate del vettore $\underline{v}$ rispetto alla base B, il vettore $\begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{bmatrix}$ t.c. $\underline{v} = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \underline{v}_i$.
Si indica con $C_B(\underline{v}) = \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{bmatrix}$

Esempio :

Sia $v = \begin{bmatrix} 2 \\ 7 \end{bmatrix}$ e $B = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} ; \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$

$C_B(\underline{v}) = ?$

$\begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2 \mid \alpha \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \beta \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix}$

$\begin{cases} \alpha = 2 \\ \beta = 7 \end{cases}$ $\quad C_B\left(\begin{bmatrix} 2 \\ 7 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 2 \\ 7 \end{bmatrix}$

17) Applicazione lineare ; l'applicazione lineare indotta da una matrice

Un' applicazione lineare è una funzione del tipo :

$f : V \to W$ dove :

$\boxed{0}$ V e W sono spazi vettoriali sullo stesso K

$\boxed{1}$ $f(\underline{v}_1 + \underline{v}_2) = f(\underline{v}_1) + f(\underline{v}_2)$

$\boxed{2}$ $f(\alpha \underline{v}) = \alpha f(\underline{v})$

Esempio :

$$f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2 \qquad \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a+b \\ c \end{bmatrix}$$

$\boxed{0}$ $\mathbb{R}^3$ e $\mathbb{R}^2$, spazi dello stesso K

$\boxed{1}$ $f(\underline{v}_1 + \underline{v}_2) = f(\underline{v}_1) + f(\underline{v}_2)$

$$= f\left(\begin{bmatrix} a_1 \\ b_1 \\ c_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a_2 \\ b_2 \\ c_2 \end{bmatrix}\right) \overset{?}{=} f\left(\begin{bmatrix} a_1 \\ b_1 \\ c_1 \end{bmatrix}\right) + f\left(\begin{bmatrix} a_2 \\ b_2 \\ c_2 \end{bmatrix}\right)$$

$$f\begin{bmatrix} a_1+a_2 \\ b_1+b_2 \\ c_1+c_2 \end{bmatrix} = f\begin{bmatrix} a_1+b_1 \\ c_1 \end{bmatrix} + f\begin{bmatrix} a_2+b_2 \\ c_2 \end{bmatrix}$$

Def di f $= \begin{bmatrix} (a_1+a_2)+(b_1+b_2) \\ c_1+c_2 \end{bmatrix}$

$\boxed{2}$ $f(\alpha \underline{v}) = \alpha f(\underline{v})$

$$= f\left(\begin{bmatrix} \alpha a \\ \alpha b \\ \alpha c \end{bmatrix}\right) = \alpha f\left(\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}\right)$$

$$= f\begin{bmatrix} \alpha a \\ \alpha b \\ \alpha c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha(a+b) \\ \alpha c \end{bmatrix}$$

Def di f $= \begin{bmatrix} \alpha(a+b) \\ \alpha c \end{bmatrix}$

18) Spazio nullo $N(f)$ e spazio immagine $Im(f)$ di una applicazione lineare f.

Sia $f: V \to W$ un' applicazione lineare.

$N(f) = \{ \underline{v} \in V \mid f(\underline{v}) = \underline{0}_W \}$ Spazio nullo $N(f)$

$Im(f) = \{ f(\underline{v}) \mid \underline{v} \in V \}$ Spazio immagine $Im(f)$

19) La norma Euclidea di $\mathbb{R}^n$ e $\mathbb{C}^n$

Sia $\underline{v} = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2$.

Voglio calcolarmi la lunghezza del vettore $\underline{v}$.

Indico la norma Euclidea col simbolo $\|\underline{v}\|_2 = \sqrt{\underline{v}^H \cdot \underline{v}}$.

$= \sqrt{[a\ b]\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}}$.

Se $\underline{v} \in \mathbb{R}$, allora $\|\underline{v}\|_2 = \sqrt{\underline{v}^T \cdot \underline{v}}$,

Se $\underline{v} \in \mathbb{C}$, allora $\|\underline{v}\|_2 = \sqrt{\underline{v}^H \cdot \underline{v}}$, in quanto voglio ottenere valori $\mathbb{C} > 0$.

20) Prodotto interno standard di $\mathbb{R}^n$ e $\mathbb{C}^n$.

Siano $\underline{v}$ e $\underline{w}$ due vettori.

Il prodotto interno standard si indica con $(\underline{v} \mid \underline{w})$.

Per $K \in \mathbb{R}$, il prodotto interno standard è $\underline{v}^T \cdot \underline{w}$.

Per $K \in \mathbb{C}$, il prodotto interno standard è $\underline{v}^H \cdot \underline{w}$.

Se $(\underline{v} \mid \underline{w}) = 0$, si dice che $\underline{w} \perp \underline{v}$, cioè è ortogonale.

21) Insiemi di vettori ortogonali e ortonormali di $\mathbb{R}$ e $\mathbb{C}$.

- Un insieme di vettori $\{ \underline{w}_1, \underline{w}_2, \underline{w}_n \}$ si dice ortogonale se ha i suoi elementi a due a due ortogonali.

Cioè $(\underline{v}_i \mid \underline{v}_j) = 0 \quad \forall i, j \quad i \neq j$.

- Un insieme di vettori $\{ \underline{v}_1, \underline{v}_2, \underline{v}_n \}$ si dice ortonormale, se è insieme ortogonale, dove gli elementi hanno norma euclidea $= 1$.

Insieme è ortonormale $\iff \begin{cases} (\underline{v}_i \mid \underline{v}_j) = 0 & i \neq j \\ (\underline{v}_i \mid \underline{v}_j) = 1 & i = j \end{cases}$

Un insieme ortonormale si ottiene da uno ortogonale, normalizzando i suoi elementi.

22) Insieme di generatori ortogonali, ortonormali e basi ortonormali.

- Un insieme di generatori ortogonali di uno spazio vettoriale $V \leq K^n$ è un insieme di generatori di V e anche un insieme ortogonale $(\underline{v}_i | \underline{v}_j) = 0$, $i \neq j$.
- Un insieme di generatori ortonormali di uno spazio $V \leq K^n$ è un insieme di generatori di V e un insieme ortonormale $\begin{cases} (\underline{v}_i | \underline{v}_j) = 0 & i \neq j \\ (\underline{v}_i | \underline{v}_j) = 1 & i = j \end{cases}$

- Una base ortogonale di uno spazio vettoriale $V \leq K^n$ è una base di V che è anche ortogonale.
- Una base ortonormale di uno spazio vettoriale $V \leq K^n$ è una base di V che è anche ortonormale.

23) Se $V \leq \mathbb{R}^n$ o $V \leq \mathbb{C}^n$ ed S è sottoinsieme di V, l'ortogonale $S^\perp$ di S in V.

Sia $V \leq K^n$ con $K \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$.
Sia $S \subseteq V$.

$$S^\perp = \{ \underline{v} \in V \mid \underline{v} \perp \underline{w} \quad \forall \underline{w} \in S \}$$
$$\overset{!}{=} \{ \underline{v} \in V \mid (\underline{w} | \underline{v}) = 0 \quad \forall \underline{w} \in S \}$$
$$\overset{!}{=} \{ \underline{v} \in V \mid \underline{w}^H \cdot \underline{v} = 0 \quad \forall \underline{w} \in S \}$$

24) La matrice di proiezione di K^m con $K \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$ su di un sottospazio; La proiezione ortogonale $P_U(v)$ di $\underline{v} \in K^m$ su $U \leq K^m$.

$\underline{u} =: P_U(\underline{v})$ è la proiezione ortogonale del vettore $\underline{v}$ sul sottospazio U di V.
Per calcolare la proiezione devo:
1) Trovare una base ORTONORMALE $\{ \underline{u}_1^*; \underline{u}_2^*; \underline{u}_n^* \}$
2) $\underset{m \times n}{Q} = [\underline{u}_1^*, \underline{u}_2^*, \underline{u}_n^*]$
3) $P = Q \cdot Q^H \longrightarrow$ Questa è la matrice di proiezione.
4) $P_U(\underline{v}) = P \cdot \underline{v} \longrightarrow$ Proiezione ortogonale.

25) Soluzione ai minimi quadrati di un sistema lineare.

Si consideri la situazione in cui si vogliono effettuare N misurazioni per vari fenomeni x_1, x_2, x_n ottenendo quindi valori y_1, y_2, y_n.
L'obiettivo è quello di rappresentare con un polinomio (in modo più specifico con una retta $deg\,m = 1$), che renda minima la somma dei quadrati degli errori.

- Se $A\underline{x} = \underline{y}$ ha soluzioni, $\exists$ polinomio di grado n che passa per tutti i punti.
- Se $A\underline{x} = \underline{y}$ non ha soluzioni, bisogna considerare il sistema con $A^H A\underline{x} = A^H \cdot \underline{y}$

C'è poi un teorema che dice che se $A = QR$ una decomposizione normalizzata QR, si ha: $A^H \cdot A\underline{x} = A^H \cdot \underline{y}$ equivale $R\underline{x} = Q^H\underline{y}$.

26) Matrice complementare e cofattore (i, j) di una matrice quadrata

Sia A quadrata $m \times m$. Il suo determinante è un valore che dipende da A.
Nel caso in cui $m \geq 2$, quindi
$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = [a_{11}\ a_{12}] \begin{bmatrix} A_{11} \\ A_{12} \end{bmatrix}$$
In questo A_{11}, A_{12} sono i cofattori di posto (i, j) e indicano:
$A_{11} = (-1)^{1+1} \cdot Det\, C_{ij}$.

C_{ij} è la matrice che si ottiene eliminando la i-esima riga e la j-esima colonna.
Corrisponde alla matrice complementare al posto (i, j)

27) Autovalore e spettro di una matrice; autovettori e autospazi

Sia A $m \times m$ (quadrata) con $k \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$.

- Si dice autovalore di A uno scalare $\lambda \in k$ t.c $\exists\ \underline{v} \in k^m$, $\underline{v} \neq 0$ per cui $A\underline{v} = \lambda \cdot \underline{v}$
- L'insieme di tutti gli autovalori di A, si dice spettro di A, indicato con $Spec(A) = \{\lambda_i\}$

- Se $E_A(\lambda) = \{0\}$, λ non è autovalore di A.

  Se $E_A(\lambda) \neq \{0\}$, λ è autovalore di A.

  $E_A(\lambda) = \{ \underline{v} \in k^n \mid A\underline{v} = \lambda \underline{v} \}$

  $\overset{!}{=} \{ \underline{v} \in k^n \mid A\underline{v} - \lambda \underline{v} \cdot I_n = 0 \}$

  $\overset{!}{=} \{ \underline{v} \in k^n \mid \underline{v}(A - \lambda I_n) = 0 \}$

  $\overset{!}{=} N(A - \lambda I_n)$ [Spazio nullo di A]

  Da $E_A(\lambda) = N(A - \lambda I_n)$ ne segue:

- $E_A(\lambda) \leq k^n$, si dice autospazio relativo all'autovalore λ.
- $E_A(\lambda) \neq \{0\}$ (quindi λ autovalore). Ogni elemento non nullo di A, si dice autovettore di A relativo all'autovalore λ.

28) Matrici simili

Due matrici A e B si dicono simili se $\exists$ S invertibile tale che $A = SBS^{-1}$.

Perciò:

A é simile a B $\Leftrightarrow$ B è simile ad A

A è simile a B $\Leftrightarrow$ $\exists$ S t.c $A = SBS^{-1}$

$$A = SBS^{-1} \xrightarrow[\text{Premoltiplico per } S^{-1}]{} S^{-1}A = \cancel{S^{-1}S}BS^{-1} \xrightarrow[\text{Premoltiplico per } S]{} S^{-1}AS = B\cancel{S^{-1}S} \longrightarrow B = S^{-1}AS$$

29) Matrici diagonalizzabili

Una matrice A $n \times n$ si dice diagonalizzabile se è simile ad una matrice diagonale, cioè $\exists$ S invertibile ed $\exists$ D diagonale t.c. $A = SDS^{-1}$.

Vengono utilizzate per calcolare le potenze di matrice.

Esempio:

$$A^2 = SD\cancel{S^{-1}S}DS^{-1} \overset{!}{=} SD^2S^{-1} \xrightarrow[\text{In generale}]{} A^k = SD^kS^{-1}$$

30) Matrici unitarie e ortogonali

- Una matrice U si dice unitaria se $U^{-1} = U^H$
- Una matrice U si dice ortogonale se $U^{-1} = U^T$

Se : U unitaria, U reale $\}$ U ortogonale perché se $k \in \mathbb{R}$ $A^H = A^T$

31) Matrici normali e unitariamente diagonalizzabili

- Una matrice A si dice normale se $AA^H = A^HA$.

  Per esempio le matrici hermitiane, simmetriche, anti-hermitiane e anti-simmetriche.
- Una matrice si dice unitariamente diagonalizzabile se $\exists D$ diagonale e $\exists U$ unitaria t.c. $A = UDU^{-1}$
  $\quad \| \; UDU^H$

Teorema dice che : $\left(A \text{ unitariamente diagonalizzabile} \right) \iff \left(A \text{ è normale} \right)$