Esempio

Se prendo $V = \mathbb{R}^5$, $T : \mathbb{R}^5 \to \mathbb{R}^5$ lineare (endomorfismo);

Se B è una base t.c.

$$A_B = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \to \text{diagonale}$$

allora preso $\underline{v} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \\ w \end{pmatrix}$

è facile calcolare $T(\underline{v}) \Rightarrow T(\underline{v})$ è il vettore $\begin{pmatrix} 2x \\ 1y \\ 3z \\ 1t \\ 0 \end{pmatrix} = A_B \cdot \underline{v}$

Problema

Dato $T : V \to V$, $\dim V = n$; quando esiste una base t.c. A_B sia diagonale?

$$A_B = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & & 0 \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \lambda_n \end{bmatrix}$$

Vale a dire: quando esiste una base $B = \{ \underline{v}_1, \dots, \underline{v}_n \}$ t.c.

$T(\underline{v}_1) = \lambda_1 \underline{v}_1$, ..., $T(\underline{v}_n) = \lambda_n \underline{v}_n$?

Esempio

$V = \mathbb{R}^3$ $\qquad A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$ $\qquad L_A : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$

$L_A(\underline{x}) = A\underline{x}$

Matrice associata a L_A rispetto alla base canonica $C = \{ \underline{e}_1, \underline{e}_2, \underline{e}_3 \}$ è A.

$$L_A(\underline{x}) = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} 2x+y \\ y+2z \\ 3z \end{pmatrix}$$

Affermo che $\exists$ una base $\{\underline{v}_1, \underline{v}_2, \underline{v}_3\}$ tale che

$$L_A(\underline{v}_1) = 2\underline{v}_1 \qquad L_A(\underline{v}_2) = \underline{v}_2 \qquad L_A(\underline{v}_3) = 3\underline{v}_3$$

e $A_B = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$.

B non è la base canonica, in quanto $A_C = A \neq A_B$

Come cerco allora B?

$L_A(\underline{x}) = \begin{bmatrix} 2x+y \\ y+2z \\ 3z \end{bmatrix}$ Cerco $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$: $AX = \begin{bmatrix} 2x+y \\ y+2z \\ 3z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2x \\ 2y \\ 2z \end{bmatrix}$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2x+y = 2x \\ y+2z = 2y \\ 3z = 2z \end{cases} \qquad \begin{cases} x = \alpha \text{ qualsiasi} \\ y = 0 \\ z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} \alpha \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ è soluzione comunque scelto } \alpha.$$

Per esempio: $\underline{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ è t.c. $L_A(\underline{v}_1) = 2\underline{v}_1$

Cerco $\underline{v}_2$: $L_A(\underline{v}_2) = \underline{v}_2$

$$A\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 2x+y \\ y+2z \\ 3z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$

Sono i vettori del tipo $\begin{pmatrix} -\alpha \\ \alpha \\ 0 \end{pmatrix}$, es $\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

Cerco $\underline{v}_3$: $L_A(\underline{v}_3) = 3\underline{v}_3$

Trovo che $\underline{v}_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ va bene.

Allora:

$$B = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \quad e \quad A_B = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

Ho provato che in generale, se $T: V \mapsto V$ lineare, B base: A_B non diagonale, può esistere una base B' tale che $A_{B'}$ associata a T ma rispetto alla base B' è diagonale.

<u>DEF.</u> Autovalore

Sia T un'applicazione lineare $T: V \mapsto V$ (dim V finita) e A la matrice associata a T rispetto a una base B di V, allora

$\lambda \in \mathbb{R}$ si dice AUTOVALORE per T se esiste un vettore $\underline{v} \in V$ ($\underline{v} \neq \underline{0}$) tale che $T(\underline{v}) = \lambda \underline{v}$.

λ è anche, per definizione, autovalore della matrice A_B.

<u>Domande</u>: 1) perché cerco $\underline{v} \neq \underline{0}$?

$\underline{v} \neq 0$ poiché $\forall\, T: V \mapsto V \quad T(\underline{0}) = \underline{0}$

$\Rightarrow T(\lambda \cdot \underline{0}) = T(\underline{0}) = \underline{0} = \lambda \cdot \underline{0}$

$\Rightarrow$ qualsiasi λ andrebbe bene se $\underline{v} = \underline{0}$

2) λ autovalore può essere $\lambda = 0$?

Se $\lambda = 0$ cerco i vettori $\underline{v} \in V : T(\underline{v}) = 0\,\underline{v} = \underline{0}$

$\Rightarrow$ cerco il nucleo di T.

<u>TEO.</u>

Dato l'endomorfismo T su V, allora λ è un AUTOVALORE se e solo se $\ker T \neq \{\underline{0}\}$ ($\Leftrightarrow T$ non è invertibile)

DEF. Autovettori

Dato un autovalore λ per T (e anche per A_B), si dice AUTOVETTORE per T relativo a λ un vettore $\underline{v}$ tale che

$T(\underline{v}) = \lambda \underline{v}$ e $\underline{v} \neq \underline{0}$

Nell'esempio fatto, $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$ $\quad L_A : \underline{X} \in \mathbb{R}^3 \mapsto A\underline{X} \in \mathbb{R}^3$

abbiamo trovato autovalori $2, 1, 3$ e:

i) autovettori per 2 costituiscono il sottospazio V_2 di $\mathbb{R}^3$

$$V_2 = \left\{ \begin{pmatrix} a \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, a \in \mathbb{R} \right\}$$

ii) autovettori per 1 sono il sottospazio vett di $\mathbb{R}^3$ dato da

$$V_1 = \left\{ \begin{pmatrix} -a \\ a \\ b \end{pmatrix}, a \in \mathbb{R} \right\}$$

iii) autovettori per 3 sono il sottospazio vett. $\mathbb{R}^3$ del tipo:

$$V_3 = \left\{ \begin{pmatrix} a \\ a \\ a \end{pmatrix}, a \in \mathbb{R} \right\}$$

V_1, V_2, V_3 sono sottospazi di dimensione $= 1$.

$B = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ è una base di $\mathbb{R}^3$ costituita da autovettori.

$$A_B = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

Def. Diagonalizzabile

Un endomorfismo $T : V \to V$ si dice DIAGONALIZZABILE se esiste una base per V composta da autovettori di T.

oss.

La definizione di autovalori e autovettori può essere data per app. lineari su spazi vettoriali qualsiasi (anche di dimensione infinita)

es. $X = \{ f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \text{ derivabili} \}$ e $T = f'$, allora

$$f(x) = e^{3x} \qquad f'(x) = 3e^{3x}$$

$\Rightarrow \lambda = 3$ è autovalore per la derivata e $f(x) = e^{3x}$ è un autovettore relativo a 3.

Oss.

Sia $T : V \to V$ lineare, B base, A_B matrice associata

$\underline{x} \in V$ $\quad T(\underline{x})$ ha coordinate rispetto a B date da $A_B \cdot \underline{x}$.

Se $\underline{v} : T(\underline{v}) = \lambda$, allora

$B = \{ \underline{v}_1, \dots, \underline{v}_n \}$ $\qquad \underline{v} = x_1 \underline{v}_1 + \dots + x_n \underline{v}_n$

$$T(\underline{v}) = \lambda (x_1 \underline{v}_1 + \dots + x_n \underline{v}_n) = (\lambda x_1 \underline{v}_1 + \dots + \lambda x_n \underline{v}_n)$$

$$\Rightarrow A_B \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$ $\leftarrow$ autovettore per la matrice associata A_B

Def.

Una matrice quadrata A di n righe e n colonne, si dice DIAGONALIZZABILE se è simile a una matrice diagonale

(ovvero esiste una matrice invertibile N tale che

$N^{-1} A N = D$ sia diagonale.)

Lezione 13 - 10/05/22

Ripreso: autovalori e autovettori per un endomorfismo

- Se $T: V \mapsto V$ è endomorfismo, $\lambda \in K(\mathbb{R})$ è autovalore se $\exists\, \underline{v} \neq \underline{0}$ t.c.

$$T(\underline{v}) = \lambda \underline{v}$$

(Se $M = T_{\beta \leftarrow \beta}$ allora vuol dire

$$M \underline{X}_\beta = \lambda \underline{X}_\beta$$)

- Non può essere $\underline{v} = \underline{0}$
- $\lambda = 0 \Rightarrow \underline{v}$ autovettore relativo a $\lambda \in \ker T$
- $T: V \mapsto V$ con $\dim V = n$ finita è diagonalizzabile $\Leftrightarrow \exists$ base di V composta da autovettori per T.
- $A \in M_{n,n}(\mathbb{K})$ è diagonalizzabile se è simile a una matrice D diagonale (ovvero $\exists$ matrice invertibile N : $N^{-1}AN = D$)

Esercizio

Dire se $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$ è diagonalizzabile.

$\Rightarrow$ verificare se esiste base di autovettori per T.

NB: è molto utile pensare a T come a L_A : $L_A(\underline{X}) = A\underline{X}$

$\Rightarrow$ trovare una base di autovettori per L_A.

Ci stiamo chiedendo se $\exists\, \lambda_i \in \mathbb{R}$ e $\underline{v}_i \in \mathbb{R}^3$: $A\underline{v}_i = \lambda_i \underline{v}_i$

e se $\{\underline{v}_i\}$ sia una base.

- Quanti devono essere i $\underline{v}_i$? 3 $\Leftarrow \dim \mathbb{R}^3 = 3$

Ricordiamo che λ_0 è autovalore per L_A se $\exists\, \underline{X} \neq 0 \in \mathbb{R}^3$: $A\underline{X} = \lambda_0 \underline{X}$

$\Rightarrow \lambda_0$ è autovalore $\Leftrightarrow$ il sistema lineare $A\underline{X} - \lambda_0 \underline{X}$ ha soluzioni non nulle $(\neq \underline{0})$

Scriviamo $\underline{A}\,\underline{X} - \lambda_0 \underbrace{\underline{I}\,\underline{X}}$ $= \underline{0}$

dà il vettore $\underline{X} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$

ovvero $(A - \lambda_0 I)\,\underline{X} = \underline{0}$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$ cerco $\lambda_0 \in \mathbb{R}$: $\exists\, \underline{X} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ con

$$A\underline{X} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \lambda_0 \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$

Scrivo:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \lambda_0 \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} - \lambda_0 \underline{I} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \underline{0}$$

$$\Rightarrow \left(\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} - \lambda_0 \underline{I} \right) \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \underline{0}$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} 1-\lambda_0 & 2 & 0 \\ 0 & 1-\lambda_0 & 2 \\ 0 & 0 & 3-\lambda_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \underline{0} \rightarrow$$ sistema lineare omogeneo

Abbiamo detto che λ_0 è autovalore se $\exists \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \neq \underline{0}$:

$$\begin{bmatrix} 1-\lambda_0 & 2 & 0 \\ 0 & 1-\lambda_0 & 2 \\ 0 & 0 & 3-\lambda_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \underline{0} \Rightarrow$$ il sistema deve avere soluzioni non banali

→ con B quadrata (se no niente det)

Ricordiamo che $B\underline{X} = \underline{0}$ ha soluzioni $\underline{X} \neq \underline{0}$ $\Leftrightarrow$ $\det B = 0$

$$\Rightarrow \det \begin{bmatrix} 1-\lambda_0 & 2 & 0 \\ 0 & 1-\lambda_0 & 2 \\ 0 & 0 & 3-\lambda_0 \end{bmatrix} = 0$$

Sviluppo secondo la 1ª colonna : $(1-\lambda_0) \det \begin{bmatrix} 1-\lambda_0 & 2 \\ 0 & 3-\lambda_0 \end{bmatrix} = (1-\lambda_0)(1-\lambda_0)(3-\lambda_0)$

$(1-\lambda_0)(1-\lambda_0)(3-\lambda_0) = 0 \Rightarrow$ autovalori di L_A (e di A matrice associata a L_A) sono 1 e 3.

La domanda era : L_A è diagonalizzabile ?

cioè devo trovare se esistono 3 autovettori linearmente indipendenti

i) $\underline{X} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ è autovettore relativo a $\lambda_0 = 1$ $\Leftrightarrow$ $A\underline{X} = 1 \cdot \underline{X}$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \underline{0} \Rightarrow \begin{cases} 2y = 0 \\ 2z = 0 \end{cases}$$

A con $\lambda_0 = 1$ $\quad$ $\det = 0 \Rightarrow$ ci sono soluzioni non banali

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \text{ è soluzione} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \left\{ \begin{pmatrix} \alpha \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3, \alpha \in \mathbb{R} \right\} = V_1$$

ii) Per $\lambda_0 = 3$

$$\begin{bmatrix} -2 & 2 & 0 \\ 0 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \underline{0}$$ risolvo il sist. lin. omogeneo

$\det = 0 \Rightarrow$ soluzioni non banali

$$\begin{cases} -2x + 2y = 0 \\ -2y + 2z = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} x = y \\ y = z \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \text{ è soluzione} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \left\{ \begin{pmatrix} \alpha \\ \alpha \\ \alpha \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3, \alpha \in \mathbb{R} \right\} = V_3$$

Allora A (e L_A) è diagonalizzabile ?

No poiché un autovettore o è del tipo $\begin{pmatrix} \alpha \\ 0 \\ \alpha \end{pmatrix} \in V_1$ o del tipo $\begin{pmatrix} \beta \\ \beta \\ \beta \end{pmatrix} \in V_3$

$\Rightarrow$ non troverò tre vettori L.I. , infatti :

- V_3 è sottospazio vett. di dim = 1 $\rightarrow$ generato da $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$
- V_1 è sottospazio vett. di dim = 1 $\rightarrow$ generato da $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

$\rightarrow$ non è possibile trovare 3 autovettori L.I. (ne trovo al massimo 2)

DEF. Autospazio

(la prof questa la chiama anche A_β o $A_{\beta \in \beta}$)

Sia T (equivalentemente $T_{\beta \in \beta}$) un' applicazione lineare da V in V.

Se λ_0 è un autovalore per T , si dice AUTOSPAZIO relativo a λ_0 l'insieme

$$V_{\lambda_0} = \{ \underline{v} \in V : T(\underline{v}) = \lambda_0 \underline{v} \}$$

TEO.

Se λ_0 è un autovalore per T, allora V_{λ_0} è un sottospazio vett. di V.

DIM.

$\underline{0} \in V_{\lambda_0}$ $\quad \underline{v} \in V_{\lambda_0}$ $\quad \alpha \underline{v} \in V_{\lambda_0}$ $\quad \underline{v}_1 , \underline{v}_2 \in V_{\lambda_0}$ $\quad \underline{v}_1 + \underline{v}_2 = V_{\lambda_0}$

⋮

TEO.

Se $\lambda_1 , \lambda_2 , \dots , \lambda_r$ sono autovalori distinti di un endomorfismo $T: V \mapsto V$

e $\underline{v}_1 , \dots , \underline{v}_r$ sono autovettori rispettivamente per $\lambda_1 , \dots , \lambda_r$ $(\Rightarrow T(\underline{v}_i) = \lambda_i \underline{v}_i)$

allora

$\underline{v}_1 , \dots , \underline{v}_r$ sono linearmente indipendenti.

Corollario

Se $\dim V = n$ e $T: V \mapsto V$ ha n autovalori distinti, allora T é diagonalizzabile.

(in quanto avró n autovettori L.I. e $\dim V = n$ $\Rightarrow$ autovettori son base di V.)

NB: NON é vero il viceversa!!

Se T non ha n autovalori distinti, T puó comunque essere diagonalizzabile.

Per convincersene si prenda $T: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ con $T(\underline{v}) = \underline{v}$ $\forall \underline{v} \in \mathbb{R}^n$

$\Rightarrow T(\underline{v}) = 1 \cdot \underline{v}$ $\forall \underline{v} \in V$ $\Rightarrow$ ogni vettore $\in \mathbb{R}^n$ é autovettore relativo a 1

$\Rightarrow$ qualsiasi base di $\mathbb{R}^n$ sará composta da autovettori per 1.

Cerchiamo delle condizioni per decidere se abbiamo abbastanza autovettori per T.

Def. Molteplicitá geometrica

Se λ_0 é autovalore per $T: V \mapsto V$, allora si dice MOLTEPLICITÁ GEOMETRICA di λ_0 la $\dim V_{\lambda_0}$ (cioé dell'autospazio relativo a λ_0)

Def. Polinomio caratteristico

Sia $T: V \mapsto V$ lineare con $\dim V = n$, allora si dice POLINOMIO CARATTERISTICO di T il $\det\left(T_{\beta \leftarrow \beta} - \lambda I\right)$ nell'incognita λ.

Nell'esempio iniziale il polinomio caratteristico era $(\lambda - 1)^2 (\lambda - 3)$ e abbiamo cercato i λ tali che: det fosse $= 0$, cioé le RADICI del polinomio caratteristico sono gli autovalori di T.

Def. Molteplicitá algebrica

Si dice MOLTEPLICITÁ (ALGEBRICA) di una radice α del polinomio $f(x)$ in $\mathbb{R}[x]$ il massimo r tale che il polinomio $(x - \alpha)^r$ divida $f(x)$.

Lezione 14 - 12/05/22

① $T: V \mapsto V$ λ autovalore se $\exists\, \underline{v} \neq \underline{0} : T(\underline{v}) = \lambda \underline{v}$

con $\underline{v}$ autovettore relativo a λ

Se $T_{B \leftarrow B}$ è la matrice associata a T rispetto alla base $B = \{\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_n\}$

$$\Rightarrow T_{B \leftarrow B} = \begin{bmatrix} | & & | \\ [T(\underline{v}_1)]_B & \cdots & [T(\underline{v}_n)]_B \\ | & & | \end{bmatrix}$$

Se $\underline{v} = x_1 \underline{v}_1 + \dots + x_n \underline{v}_n$ e $\underline{X} = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$, allora

$$T(\underline{X}) = T_{B \leftarrow B}\, \underline{X} = \lambda \underline{X}$$

$\Rightarrow \lambda$ è autovalore per la matrice $T_{B \leftarrow B}$

② Se λ_0 è autovalore per $T: V \mapsto V$, si dice autospazio per T relativo a λ_0:

$$V_{\lambda_0} = \{ \underline{v} \in V : T(\underline{v}) = \lambda_0 \underline{v} \}$$

V_{λ_0} è sottospazio vett. di V e

NB: V_{λ_0} contiene tutti gli autovettori relativi a λ_0 e in più il vettore $\underline{0}$ (così da essere sottospazio)

③ Se $T: V \mapsto V$ lineare, B una base per V, allora si dice polinomio caratteristico di T:

$$p_T(\lambda) = \det(A - \lambda I) \quad \text{con incognita } \lambda$$

dove $A = T_{B \leftarrow B}$.

λ_0 è autovalore per T $\iff$ la matrice $A - \lambda_0 I$ è <u>non</u> invertibile

$\iff$ λ_0 è radice del polinomio caratteristico $p_T(\lambda)$.

↳ α tale che $p_T(\lambda) = 0$

④ Se λ_0 è autovalore per T, allora si dice molteplicità geometrica di λ_0 la dimensione dell'autospazio V_{λ_0}.

Si dice molteplicità algebrica di λ_0 la molteplicità di λ_0 come radice di $p_T(\lambda_0)$

Ricordiamo che T è diagonalizzabile se ammette una base formata solo da autovettori.

NB: Se $p(x) \in \mathbb{R}[x]$ di grado n, $p(x)$ ha al più n radici (contate con la dovuta molteplicità).

es. $(x-1)^3$ ha una radice di molteplicità 3 : ha 3 radici.

NB: Se $T: V \mapsto V$ lineare con $\dim V = n$, il polinomio caratteristico di T ha grado n.

Teo.

Se λ_0 è autovalore per T, allora la molteplicità geometrica è minore o uguale alla molteplicità algebrica.

Esercizi

1) Sia $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$ quadrata di ordine 2 su $\mathbb{R}$.

A è diagonalizzabile?

Cerco gli autovalori di A.

$L_A(\underline{X}) = A\underline{X}$

Scrivo il polinomio caratteristico : $p_A(\lambda) = \det \begin{bmatrix} -\lambda & 1 \\ -1 & -\lambda \end{bmatrix} = \lambda^2 + 1$

$\Rightarrow$ In $\mathbb{R}$ $p_A(\lambda)$ non ha radici. $\Rightarrow$ A non è diagonalizzabile.

2) Sia $V = \mathbb{R}_2[x] = \{ a + bx + cx^2 \; ; \; a, b, c \in \mathbb{R} \}$

Si consideri $T : (a + bx + cx^2) \longmapsto (a + 2b + c) + (3b + c)x + (5b - c)x^2$

?. Trovare i) autovalori per T ii) autospazi per T iii) diagonalizzabilità di T

- Scelgo una base per $\mathbb{R}_2[x]$: $B = \{ 1, x, x^2 \}$ $\qquad \dim \mathbb{R}_2[x] = 3$

- Scrivo

$$T_{B \leftarrow B} = \Big[[T(1)]_B \quad [T(x)]_B \quad [T(x^2)]_B \Big]$$

$T(1) = 1 = 1 \cdot 1 + 0 \cdot x + 0 \cdot x^2 \quad \Rightarrow [T(1)]_B = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

$T(x) = x = 2 + 3x + 5x^2 \quad \Rightarrow [T(x)]_B = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 5 \end{bmatrix}$

$T(x^2) = 1 + x - x^2 \quad \Rightarrow [T(x^2)]_B = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$

$$\Rightarrow T_{B \leftarrow B} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 5 & -1 \end{bmatrix}$$

Polinomio caratteristico di T : $p_T(\lambda) = \det\left(T_{B \leftarrow B} - \lambda I\right) =$

$$= \det \begin{bmatrix} 1-\lambda & 2 & 1 \\ 0 & 3-\lambda & 1 \\ 0 & 5 & -1-\lambda \end{bmatrix} = (1-\lambda) \det \begin{bmatrix} 3-\lambda & 1 \\ 5 & -1-\lambda \end{bmatrix} = (1-\lambda)\Big[-(3-\lambda)(1+\lambda) - 5 \Big] =$$

$$= (1-\lambda)(\lambda^2 - 2\lambda - 8) \quad \Rightarrow \text{autovalori} : \lambda_1 = 1 \; , \; \lambda_2 = 4 \; , \; \lambda_3 = -2$$

$\Rightarrow p_T(\lambda)$ ha grado $3 = \dim \mathbb{R}_2[x]$

$\Rightarrow$ iii) T è diagonalizzabile poiché :

3 autovalori distinti $\Rightarrow$ 3 autovettori L.I.

- Troviamo gli autospazi :

$V_1 = \{ v \in \mathbb{R}_2[x] : T(v) = 1 \cdot v \}$

$V_4 = \{ v \in \mathbb{R}_2[x] : T(v) = 4 \cdot v \}$

$V_{-2} = \{ v \in \mathbb{R}_2[x] : T(v) = -2 \cdot v \}$

• V_1 : risolvo il sistema lineare : $\left(T_{B\leftarrow B} - 1\cdot I\right)\underline{X} = \underline{0}$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 5 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \underline{0} \qquad \begin{cases} 2y + z = 0 \\ 5y - 2z = 0 \end{cases} \Rightarrow \text{sol. del tipo } \begin{bmatrix} \alpha \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

det = 0 (ovviamente, l'ho imposto con gli autovalori)

ma $\begin{bmatrix} \alpha \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ è autovettore per T ? No, è autovettore per la matrice $T_{B\leftarrow B}$;

devo scrivere :

$$V_1 = \{ \alpha + 0\cdot x + 0\cdot x^2 \, , \, \alpha \in \mathbb{R} \}$$

• V_4 : risolvo $\left(T_{B\leftarrow B} - 4I\right)\underline{X} = \underline{0}$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} -3 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 5 & -5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \underline{0} \Rightarrow \begin{cases} -3x + 2y + z = 0 \\ -y + z = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} y = z \\ -3x + 3z = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = z \\ x = z \end{cases} \Rightarrow V_4 : \text{vettori le cui coordinate sono del tipo } \begin{bmatrix} \alpha \\ \alpha \\ \alpha \end{bmatrix}, \alpha \in \mathbb{R}$$

quindi $V_4 = \{ \alpha + \alpha x + \alpha x^2 \, , \, \alpha \in \mathbb{R} \}$

• V_{-2} : risolvo $\left(T_{B\leftarrow B} - (-2)I\right)\underline{X} = \underline{0}$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 0 & 5 & 1 \\ 0 & 5 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \underline{0} \Rightarrow \begin{cases} 3x + 2y + z = 0 \\ 5y + z = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} 3x + 2y - 5y = 0 \\ z = -5y \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = y \\ z = -5y \end{cases} \Rightarrow V_{-2} : \text{vettori con coordinate } \begin{bmatrix} \alpha \\ \alpha \\ -5\alpha \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow V_{-2} = \{ \alpha + \alpha x - 5\alpha x^2 , \, \alpha \in \mathbb{R} \}$$

$\Rightarrow$ 3 autospazi (con dim = 1) $\Rightarrow$ T diagonalizzabile

- Se volessi trovare una base per $\mathbb{R}_2[x]$ di autovettori, una possibile è:

$$B = \{ v_1 = 1 \ ; \ v_2 = 1 + x + x^2 \ ; \ v_3 = 1 + x - 5x^2 \}$$

- Ulteriore domanda: trovare N invertibile : $N^{-1} T_{B \leftarrow B} N = D$ con D diagonale.

Una N simile <u>deve</u> esistere, poiché sappiamo che T è diagonalizzabile.

$$N = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} | & | & | \\ [v_1]_\gamma & [v_2]_\gamma & [v_3]_\gamma \\ | & | & | \end{bmatrix}$$

dove γ = base canonica di $\mathbb{R}_2[x]$

N è matrice di cambio base $N_{\gamma \leftarrow B}$.

- Inoltre:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix} \overset{??}{=} T_{B \leftarrow B}$$

Se prendessi la base $\{ 1 + x + x^2 , 1 , 1 + x - 5x^2 \}$ troverei la matrice:

$$\begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}$$ che è diversa da $T_{B \leftarrow B}$ (concetto di base ordinata)

3) Trovare autovalori e autovettori per $L_A : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $\underline{x} \to A\underline{x}$ con $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -1 & 4 & 0 \\ -3 & 6 & 2 \end{bmatrix}$

i) Scelgo la base canonica $B = \{ e_1, e_2, e_3 \}$

$T_{B \leftarrow B} = A$ (verifica per esercizio)

(<u>In generale</u>, se $A \in M_{n,n}(\mathbb{R})$ e $L_A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, $\underline{x} \to A\underline{x}$ e $B_n = \{ e_1, \dots, e_n \}$

$T_{B \leftarrow B} = A$ (intuitivo))

ii) Calcolo

$$\det(A - \lambda I) = \det \begin{bmatrix} 2-\lambda & 0 & 0 \\ -1 & 4-\lambda & 0 \\ -3 & 6 & 2-\lambda \end{bmatrix} = (2-\lambda)^2 (4-\lambda)$$

Quindi autovalori : 2 con molteplicità algebrica = 2
4 " = 1

$\Rightarrow$ non posso dire (ancora) se T è diagonalizzabile o meno.

In particolare, dovrò vedere se l'autospazio V_2 ha molteplicità geometrica pari a 2 ($\Rightarrow$ T diag.) o 1 ($\Rightarrow$ T <u>non</u> diag.)

- Autospazi:

$V_2 = \{ \underline{v} \in \mathbb{R}^3 : T(\underline{v}) = 2\underline{v} \}$ $\rightarrow$ soluzioni di $(A - 2I)\underline{x} = \underline{0}$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ -3 & 6 & 0 \end{bmatrix} \underline{x} = \underline{0}$$

$\rightarrow$ rango $= 1$ $\Rightarrow$ $\dim V_2 = 2$ $\Rightarrow$ A è diagonalizzabile

Trovo un autovettore in V_4 e 2 in V_2.

Determino V_2: $-x + 2y = 0$ $\quad x = 2y$

Base di V_2

$$\Rightarrow V_2 = \left\{ \begin{bmatrix} 2\alpha \\ \alpha \\ \beta \end{bmatrix} ; \alpha, \beta \in \mathbb{R} \right\} = \text{SPAN}\left(\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right)$$

Determino V_4: soluzioni di $(A - 4I)\underline{x} = \underline{0}$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ -3 & 6 & -2 \end{bmatrix} \underline{x} = \underline{0} \Rightarrow \begin{cases} -2x = 0 \\ -x = 0 \\ -3x + 6y - 2z = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} x = 0 \\ 6y = 2z \end{cases} \quad \begin{cases} x = 0 \\ z = 3y \end{cases}$$

$$\Rightarrow V_4 = \left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ \alpha \\ 3\alpha \end{bmatrix} ; \alpha \in \mathbb{R} \right\} \qquad \text{Base per } V_4 : \left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix} \right\}$$

- Base per $\mathbb{R}^3$ di autovettori: $\left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$

<u>OSS.</u>

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -1 & 4 & 0 \\ -3 & 6 & 2 \end{bmatrix}$$ triangolare inf. $\Rightarrow$ autovalori: elementi sulla diagonale.

È vero per ogni matrice triangolare.

Lezione 15 - 13/05/22

Ripasso

Polinomio caratteristico

Sia $T: V \mapsto V$ endomorfismo e $\dim V = n$ e B base di V, allora:

se $T_{B \leftarrow B}$ è matrice associata a T rispetto a B

$$p_T(\lambda) = \det\left(T_{B \leftarrow B} - \lambda I\right)$$

Proprietà:

i) $p_T(\lambda)$ è un polinomio di grado n

ii) λ_0 è radice di $p_T(\lambda)$ $\Leftrightarrow$ λ_0 è autovalore per T

iii) Si dice molteplicità algebrica di λ_0 (radice di $p_T(\lambda)$) la molteplicità di λ_0 come radice di $p_T(\lambda)$.

Problema: $T: V \mapsto V$ endomorfismo. B, B_1 basi per V.

Posso considerare $T_{B \leftarrow B}$ e $T_{B_1 \leftarrow B_1}$.

Pol. caratteristico: $\det\left(T_{B \leftarrow B} - \lambda I\right)$ ma anche $\det\left(T_{B_1 \leftarrow B_1} - \lambda I\right)$.

$\Rightarrow$ Le radici dei due polinomi (quindi dei due determinanti) devono essere le stesse (non può dipendere dalla base impiegata, in quanto il polinomio è definito per l'endomorfismo, non solo per la matrice associata!)

Teo.

Il polinomio caratteristico di T non dipende dalla scelta della base (e quindi dalla matrice associata).

NB: diciamo "radici del det" poiché $\det\left(T_{B \leftarrow B} - \lambda I\right)$ è un polinomio con incognita λ).

$\rightarrow$ Cosa vuol dire che $p_T(\lambda)$ non dipende dalla matrice?

$T_{B \leftarrow B}$ e $T_{B_1 \leftarrow B_1}$ sono legate tra di loro?

Teo. $\exists$ N invertibile matrice di cambio base da B a B_1 tale che:

$$T_{B_1 \leftarrow B_1} = N^{-1} \, T_{B \leftarrow B} \, N$$

TEO.

$$\det(T_{B_1 \leftarrow B_1} - \lambda I) = \det(T_{B \leftarrow B} - \lambda I)$$

DIM. (cenno) Si usa il Teo. di Binet: $\det(AB) = \det(A)\det(B)$ con $A, B \in M_{n,n}$

$$\det(T_{B_1 \leftarrow B_1} - \lambda I) = \det(N^{-1} T_{B \leftarrow B} N - \lambda N^{-1} I N) =$$

$$= \det N^{-1}(T_{B_1 \leftarrow B_1} - \lambda I) N = \det N^{-1} \det(T_{B \leftarrow B} - \lambda I) \cdot \det(N)$$

$$= \det(T_{B \leftarrow B} - \lambda I)$$

DEF. Autovalore regolare

Un autovalore λ_0 per T si dice REGOLARE se la molteplicità algebrica di λ_0 è uguale alla sua molteplicità geometrica ($\dim V_{\lambda_0}$)

TEO.

Se $T : V \mapsto V$ lineare con $\dim V = n$, sono equivalenti i seguenti fatti:

i) T è diagonalizzabile

ii) T ammette una base di autovettori

iii) Ogni autovalore di T è regolare (molt. geom = molt. alg)

iv) Per ogni scelta di una base B, $T_{B \leftarrow B}$ è simile a una matrice diagonale.

Supponiamo di aver scoperto che T è diagonalizzabile

$\Rightarrow \exists N : N^{-1} T_{B \leftarrow B} N = D$. Come trovo N?

Avevamo considerato: $T : \mathbb{R}_2[x] \mapsto \mathbb{R}_2[x]$

$a + bx + c \to (a + 2b + c) + (3b + c)x + (5b - c)x^2$

Autovalori $1, 4, -2$ $\quad B = \{1, x, x^2\}$ $\quad T_{B \leftarrow B} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 5 & -1 \end{bmatrix}$

$$\exists N : N^{-1} T_{B \leftarrow B} N = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}$$

$\hookrightarrow$ $T_{B \leftarrow B}$ diagonalizzata

3 autovettori per $T_{B \leftarrow B}$ L.I. erano: $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1/15 \\ -1/5 \\ 1 \end{pmatrix}$

Allora $N = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1/15 \\ 0 & 1 & -1/5 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ $\rightarrow$ coordinate degli autovettori relative allo spazio di partenza $\Rightarrow$ è la matrice di cambio di base!

Domanda: 2 matrici simili hanno lo stesso polinomio caratteristico? SI

↳ Se A e B sono matrici simili e A è diagonalizzabile, anche B lo è? SI

↳ Se 2 matrici hanno lo stesso polinomio caratteristico, sono simili?

NO: una volta ottenuto il pol. car., devo ancora studiare la molteplicità algebrica e geometrica.

es.

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

Calcoliamo $p_A(\lambda)$ (che è $p_{L_A}(\lambda)$, con $L_A : \underline{x} \mapsto A\underline{x}$ e $A = T_{C \leftarrow C}$ con C = base canonica in $\mathbb{R}^n$)

$$p_A(\lambda) = (2-\lambda)^2 (1-\lambda)^2$$ $\leftarrow$ A è triangolare sup. $\Rightarrow$ autovalori sulla diagonale.

$$B = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$p_B(\lambda) = (2-\lambda)^2 (1-\lambda)^2 = p_A(\lambda)$

$\Rightarrow$ B è diagonale, quindi è diagonalizzabile.

Per verificare che A sia diagonalizzabile, controllo la molteplicità geometrica:

$\lambda_0 = 1$: $\underline{v} : T(\underline{v}) = 1 \cdot \underline{v}$ $\Rightarrow$ cerco $(A - I)$

$$(A - 1 \cdot I) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Se A è diagonalizzabile, l'insieme delle soluzioni di $(A - I)\underline{x} = \underline{0}$ deve essere un sottospazio di dim = 2.

Invece $(A - I)$ ha rango = 3

$\Rightarrow \dim V_1 = 1$

$\Rightarrow$ molt. algebrica di 1 = 2 $\neq$ molt. geometrica di 1 = 1

$\Rightarrow$ A e B <u>non</u> sono simili.

Prodotto Scalare

DEF. Prodotto scalare

Sia V uno spazio vett. su $\mathbb{R}$. Si dice PRODOTTO INTERNO o SCALARE su V una funzione

$$< , > : V \times V \longrightarrow \mathbb{R}$$

tale che:

i. $\forall \underline{v} \in V$

$$<\underline{v}, \underline{v}> \geq 0 \quad ; \quad <\underline{v}, \underline{v}> = 0 \iff \underline{v} = 0$$

ii. $\forall \underline{v}, \underline{w} \in V$

$$<\underline{v}, \underline{w}> = <\underline{w}, \underline{v}>$$ (simmetria del prodotto scalare)

iii. $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $\forall \underline{v}, \underline{u}, \underline{w} \in V$

$$<\alpha \underline{v} + \beta \underline{u}, \underline{w}> = \alpha <\underline{v}, \underline{w}> + \beta <\underline{u}, \underline{w}>$$

Esempio

$\mathbb{R}^2 = V$ $\quad \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} = \underline{X}$ $\quad \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} = \underline{Y}$, allora

$<\underline{X}, \underline{Y}> = x_1 \cdot x_2 + y_1 \cdot y_2$ é un prodotto scalare.

Verifichiamolo:

i) $<\underline{X}, \underline{X}> \geq 0$

$$<\underline{X}, \underline{X}> = x_1^2 + y_1^2$$ siamo in $\mathbb{R} \Rightarrow a^2 + b^2 \geq 0$ $\quad (= 0 \iff x_1 = y_1 = 0)$

ii) $<\underline{X}, \underline{Y}> = <\underline{Y}, \underline{X}>$

$$<\underline{Y}, \underline{X}> = x_2 \cdot x_1 + y_2 \cdot y_1 = <\underline{X}, \underline{Y}>$$

iii) $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ $\quad \underline{X}, \underline{Y}, \underline{Z} = \begin{pmatrix} x_3 \\ y_3 \end{pmatrix}$

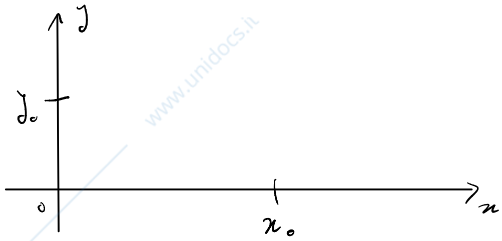
$$<\alpha \underline{X} + \beta \underline{Y}, \underline{Z}> = < \begin{pmatrix} \alpha_1 x_1 + \beta x_2 \\ \alpha y_1 + \beta y_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_3 \\ y_3 \end{pmatrix} > =$$

$$= (\alpha_1 x_1 + \beta x_2) \cdot x_3 + (\alpha y_1 + \beta y_2) \cdot y_3 = \alpha x_1 x_3 + \beta x_2 x_3 + \alpha y_1 y_3 + \beta y_2 y_3 =$$

$$= \alpha <\underline{X}, \underline{Z}> + \beta (\underline{Y}, \underline{Z})$$

Esempio

$\mathbb{R}^2$ con riferimento cartesiano



Notiamo che $P = (x_0, 0)$ $Q = (0, y_0)$ $\Rightarrow$ $<P, Q> = 0$

In generale:

su $\mathbb{R}^m$ la funzione $<\underline{A}, \underline{B}> = a_1 b_1 + \dots + a_m b_m$

dove:

$$\underline{A} = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_m \end{pmatrix}, \quad \underline{B} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

è un prodotto scalare su $\mathbb{R}^m$.

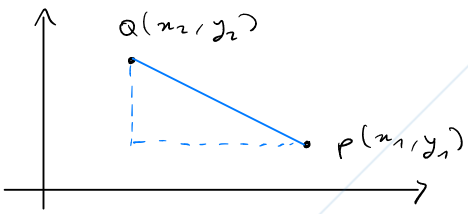
Esempio

In $\mathbb{R}_m[x]$ considero

$$<p(x), q(x)> = \int_{-1}^{1} p(x)\, q(x)\, dx$$

è un prodotto scalare.

Distanza tra punti in $\mathbb{R}^2$



La distanza tra P e Q è la lunghezza di $\overline{QP}$

$$\overline{QP} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} = \sqrt{<Q-P, Q-P>}$$

Def. **Norma**

Sia V spazio vett. su $\mathbb{R}$, si dice NORMA di $\underline{v} \in V$

$$\|\underline{v}\| = \sqrt{<\underline{v}, \underline{v}>}$$

Lezione 16 - 19/05/22

Prodotto scalare (o interno)

$\langle \, , \, \rangle : V \times V \mapsto \mathbb{R}$ con V spazio vettoriale su $\mathbb{R}$

Notazione : $\langle \underline{v}_1 , \underline{v}_2 \rangle \equiv g(\underline{v}_1, \underline{v}_2)$

g gode delle seguenti proprietà :

i) $\forall \underline{v} \in V$, $g(\underline{v}, \underline{v}) \geq 0$, $= 0 \iff \underline{v} = \underline{0}$

ii) $\forall \underline{v}, \underline{w} \in V$ $g(\underline{v}, \underline{w}) = g(\underline{w}, \underline{v})$

iii) $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $\forall \underline{v}, \underline{u}, \underline{w} \in V$

$$g(\alpha \underline{u} + \beta \underline{v}, \underline{w}) = \alpha \, g(\underline{u}, \underline{w}) + \beta \, g(\underline{v}, \underline{w})$$

Esempi

i. Su $\mathbb{R}^n$ $\underline{A} = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$ $\underline{B} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$ $\langle \underline{A}, \underline{B} \rangle = a_1 b_1 + \dots + a_n b_n$

ii. X_n = spazio dei polinomi su $\mathbb{R}$ di grado $\leq n$.

$$g(p(x), q(x)) = \int_{-1}^{1} p(x) \, q(x) \, dx$$

DEF. Norma (1)

Se V è spazio vett. su $\mathbb{R}$, si dice NORMA su V una funzione

$\| \cdot \| : V \mapsto \mathbb{R}$ tale che

i. $\|\underline{v}\| \geq 0$ $\forall \underline{v} \in V$ $\|\underline{v}\| = 0 \iff \underline{v} = \underline{0}$

ii. $\forall \underline{v}, \underline{w} \in V$ $\|\underline{v} + \underline{w}\| \leq \|\underline{v}\| + \|\underline{w}\|$ ← Disuguaglianza triangolare

iii. $\forall \alpha \in \mathbb{R}$, $\underline{v} \in V$ $\|\alpha \underline{v}\| = |\alpha| \cdot \|\underline{v}\|$

$$\sqrt{g(\alpha \underline{v}, \alpha \underline{v})} = \sqrt{\alpha^2 g(\underline{v}, \underline{v})} = |\alpha| \sqrt{g(\underline{v}, \underline{v})}$$

DEF. Norma (2)

Se $g : V \times V$ è prodotto scalare su V, si dice NORMA di $\underline{v}$

$$\|\underline{v}\| = \sqrt{g(\underline{v}, \underline{v})}$$