① In $V_4(\mathbb{R})$ sia $A = L(A, B, C)$ dove $A = (1,0,1,0)$
$B = (0,0,0,1)$
$C = (0,1,-1,1)$

Dare una descrizione di $A^{\perp}$.

Dato V uno spazio vettoriale di dimensione finita e S un sottospazio vettoriale di V, vale che $V = S \oplus S^{\perp}$
quindi $\dim(V) = \dim(S) + \dim(S^{\perp})$

$$\dim(A^{\perp}) = \dim(V_4(\mathbb{R})) - \dim(A)$$
$$\dim(A^{\perp}) = 4 - 3 = 1$$

$$A = L(A, B, C)$$
$$A^{\perp} = (L(A,B,C))^{\perp} = \{A, B, C\}^{\perp} = \{\{A\} \cup \{B\} \cup \{C\}\}^{\perp} = A^{\perp} \cap B^{\perp} \cap C^{\perp}$$
$$A = L(\underbrace{(1,0,1,0)}_{A}, \underbrace{(0,0,0,1)}_{B}, \underbrace{(0,1,-1,1)}_{C})$$

$$A^{\perp} = \begin{cases} \langle X, A \rangle = 0 \\ \langle X, B \rangle = 0 \\ \langle X, C \rangle = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} x_1 + x_3 = 0 \\ x_4 = 0 \\ x_2 - x_3 + x_4 = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} x_1 = -x_3 \\ x_4 = 0 \\ x_2 = x_3 - \cancel{x_4} \end{cases}$$

$$A^{\perp} = \{(-x_3, x_3, x_3, 0) : x_3 \in \mathbb{R}\} = \{x_3(-1,1,1,0)\}$$
$$A^{\perp} = L((-1,1,1,0))$$

(2) Sia $V = V_2(\mathbb{R})$ $\quad \phi : V \times V \to \mathbb{R}$ $\quad (x)_{\mathcal{U}} = (x_1, x_2)$

$(y)_{\mathcal{U}} = (y_1, y_2)$

$$\phi((x_1, x_2), (y_1, y_2)) = x_1 y_1 + x_1 y_2 + x_2 y_1$$

Dimostrare che ϕ è un prodotto scalare.

1. • proprietà simmetrica $\langle x, y \rangle = \langle y, x \rangle \quad \forall x, y \in V$
2. • proprietà di bilinearità $\langle x+y, z \rangle = \langle x, z \rangle + \langle y, z \rangle \quad \forall x, y, z \in V$

$\langle x, y+z \rangle = \langle x, y \rangle + \langle x, z \rangle \quad \forall x, y, z \in V$

$\langle ax, y \rangle = a \langle x, y \rangle \quad \forall a \in \mathbb{R} \; \forall x, y \in V$

$\langle x, ay \rangle = \langle x, y \rangle a \quad \forall a \in \mathbb{R} \; \forall x, y \in V$

3. • proprietà di positività $\langle x, x \rangle \geq 0 \quad \forall x \in V$

$\langle x, x \rangle = 0 \Leftrightarrow x = 0$

1. $\phi((y_1, y_2), (x_1, x_2)) = y_1 x_1 + y_1 x_2 + y_2 x_1 = \phi((x_1, x_2), (y_1, y_2))$

SIMMETRICA

2. $\phi((x_1 + y_1, x_2 + y_2), (z_1, z_2)) \stackrel{?}{=} \phi((x_1, x_2), (z_1, z_2)) + \phi((y_1, y_2), (z_1, z_2))$

$(x_1 + y_1) \cdot z_1 + (x_1 + y_1) z_2 + (x_2 + y_2) \cdot z_1 \stackrel{?}{=} x_1 z_1 + x_1 z_2 + x_2 z_1 + y_1 z_1 + y_1 z_2 + y_2 z_1$

$x_1 z_1 + y_1 z_1 + x_1 z_2 + y_1 z_2 + x_2 z_1 + y_2 z_1 \stackrel{?}{=} x_1 z_1 + x_1 z_2 + x_2 z_1 + y_1 z_1 + y_1 z_2 + y_2 z_1$

... OK BILINEARITÀ

3. $\phi((x_1, x_2), (x_1, x_2)) = 0 \Leftrightarrow x = 0$?

$\phi((x_1, x_2), (x_1, x_2)) = x_1^2 + x_1 x_2 + x_2 x_1$ $\qquad x_1^2 + 2x_1 x_2 = 0$

$x_1 = 0 \qquad x_1 = -2x_2$

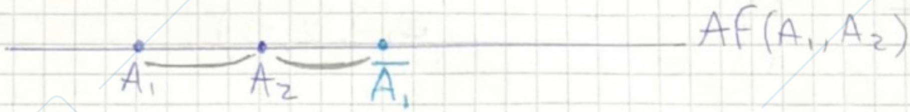
NO POSITIVITÀ

$\phi((x_1, x_2), (x_1, x_2)) \geq 0 \; \forall x \in V$? $\qquad x_1^2 + 2x_1 x_2 \geq 0 \; \forall x \in V$? NO!

ϕ non è un prodotto scalare.

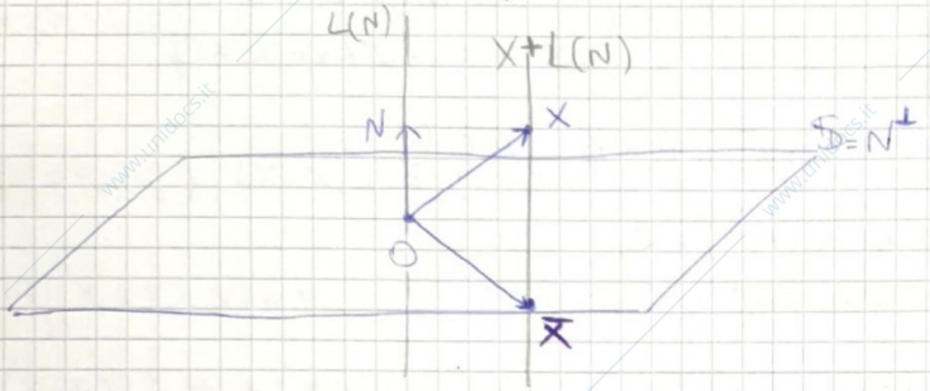
Definizione

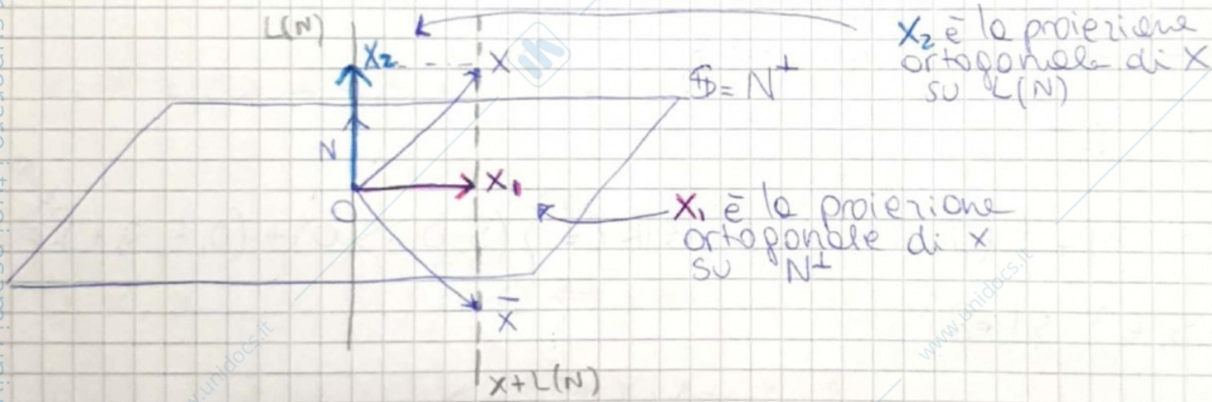
Sia V spazio Euclideo. Dati A_1 e A_2 punti distinti di V, il simmetrico $\overline{A_1}$ di A_1 rispetto ad A_2 è definito come il punto $\overline{A_1} \in AF(A_1, A_2)$ tale che $d(A_1, A_2) = d(A_2, \overline{A_1})$



Definizione

Sia V spazio Euclideo. Dato $S = N^\perp$ $(N \neq 0)$ e dato $x \in V$, il simmetrico di x rispetto all'iperpiano $N^\perp$ è il punto $\overline{x} \in x + L(N)$ tale che $\|x\| = \|\overline{x}\|$





$x = x_1 + x_2$; $\overline{x} = x_1 - x_2$ $\Rightarrow$ $\overline{x} = x - x_2 - x_2 = x - 2x_2$

$\hookrightarrow x_1 = x - x_2$

$x_2 = \pi_N^\perp(x) = \dfrac{\langle x, N\rangle}{\langle N, N\rangle} N$ $\qquad$ $\overline{x} = x - 2 \cdot \dfrac{\langle x, N\rangle}{\langle N, N\rangle} N$

③ In $V_4(\mathbb{R})$

Dato $S_1 = \begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = 0 \\ x_2 + 2x_3 = 0 \end{cases}$ descrivere $S_1^\perp$.

$\dim(S_1) = 2 \Rightarrow \dim(S_1^\perp) = 2$

$S_1^\perp = L((1,1,-1,0),(0,1,2,0))$

④ In $V_4(\mathbb{R})$, siano A e B due sottospazi lineari di $V_4(\mathbb{R})$ aventi le seguenti rappresentazioni cartesiane:

$A = \begin{cases} x_1 - x_3 = 0 \\ x_2 + x_4 = 0 \end{cases}$ $B = \begin{cases} x_1 - x_2 - x_3 + x_4 = 0 \\ 2x_1 + x_2 - 2x_3 - x_4 = 0 \end{cases}$

Descrivere $A^\perp$, $B^\perp$, $(A+B)^\perp$, $A+B$, $A \cap B$

$\dim(A) = 2$ $\dim(A^\perp) = 2$

$\dim(B) = 2$ $\dim(B^\perp) = 2$

$A^\perp = L((1,0,-1,0),(0,1,0,1))$

$B^\perp = L((1,-1,-1,1),(2,1,-2,-1))$

$(A+B)^\perp = A^\perp \cap B^\perp$

$A^\perp = \{s(1,0,-1,0) + t(0,1,0,1) : s,t \in \mathbb{R}\} = \{(s,0,-s,0) + (0,t,0,t) : s,t \in \mathbb{R}\}$

$= \{(s,t,-s,t) : s,t \in \mathbb{R}\}$

$B^\perp = \{(u+2v, -u+v, -u-2v, u-v) : u,v \in \mathbb{R}\}$

$A^\perp \cap B^\perp : \begin{cases} s = u+2v \\ t = -u+v \\ -s = -u-2v \\ t = u-v \end{cases} \rightarrow u - v = -u + v \rightarrow u = v \rightarrow \begin{matrix} t=0 \\ s=3u \end{matrix}$

$A^\perp \cap B^\perp : \{(3u,0,-3u,0) : u \in \mathbb{R}\}$ $A^\perp \cap B^\perp = L((1,0,-1,0)) = (A+B)^\perp$

$\dim((A+B)^\perp) = 1$ $\dim((A+B)) = 3$

$A+B = x_1 - x_3 = 0$

$\dim(A \cap B) = \dim(A) + \dim(B) - \dim(A+B) = 2+2-3 = 1$

$A \cap B : \begin{cases} x_1 - x_3 = 0 & \varepsilon_1 \\ x_2 + x_4 = 0 & \varepsilon_2 \\ x_1 - x_2 - x_3 + x_4 = 0 & \varepsilon_3 \\ \cancel{2x_1 + x_2 - 2x_3 - x_4 = 0} & \varepsilon_4 \end{cases}$ $\varepsilon_4 = 3\varepsilon_1 - \varepsilon_3$

3 equazioni!! ∴ $A \cap B = \begin{cases} x_1 - x_3 = 0 \\ x_2 + x_4 = 0 \\ x_1 - x_2 - x_3 + x_4 = 0 \end{cases}$