

StuDocu.com

Appunti - lezioni complete del corso di Algebra Lineare - Algebra Lineare - a.a. /

Algebra Lineare (Università degli Studi di Padova)

Lezione 1

Funzioni

Se $\alpha : A \rightarrow B$ è una funzione e $b \in B$, cosa s'intende per $\alpha^{-1}(b)$?

Insiemi numerici:

- insieme dei numeri *naturali* $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \dots\}$;
- insieme dei numeri *interi* $\mathbb{Z} = \{0, 1, -1, 2, -2, \dots\}$;
- insieme dei numeri *razionali* $\mathbb{Q} = \{x \mid \exists m, n \in \mathbb{Z} : n \neq 0, x = \frac{m}{n}\}$;
- insieme dei numeri *reali* \mathbb{R} ;
- insieme dei numeri *irrazionali* $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$;
- insieme dei numeri *complessi* \mathbb{C} (vedremo in seguito).

Vale $\mathbb{N} \subseteq \mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R} \subseteq \mathbb{C}$.

42 **Notazioni 1.1.** • $\mathbb{N}^* = \mathbb{N} \setminus \{0\} = \{1, 2, 3, \dots\}$;

43 • $\mathbb{Z}^* = \mathbb{Z} \setminus \{0\}$; \mathbb{Q}^* , \mathbb{R}^* , \mathbb{C}^* sono definiti analogamente;

44 • $\mathbb{Z}^+ = \{n \in \mathbb{Z} \mid n > 0\} = \mathbb{N}^*$;


45 • \mathbb{Q}^+ , \mathbb{R}^+ sono definiti analogamente;

46 • non esiste nessun \mathbb{C}^+ !

47 **Definizione 1.2.** Siano A e B due insiemi. Una *funzione* (o *applicazione*) di A in B è individuata da una legge che ad ogni elemento di A
48 associa un ben determinato elemento di B .
49

50 **Notazione 1.3.** $\alpha : A \rightarrow B$.

51 A si dice *dominio* della funzione α , B si dice *codominio* di α .

52  La parola “codominio” può avere significato diverso da quello che
53 conoscete.

54 **Osservazione 1.4.** Una funzione consiste in tre oggetti: dominio,
55 codominio, legge.

56 Per definire una funzione descrivendone la legge (ad esempio: la
57 funzione di \mathbb{R} in \mathbb{R} che ad ogni $x \in \mathbb{R}$ associa il suo quadrato) abbiamo
58 due possibilità:

59 • $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ def. da $f(x) = x^2$, oppure

60 • $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} : x \mapsto x^2$.

61 **Definizione 1.5.** Data una funzione $\alpha : A \rightarrow B$, l'elemento associato
62 da α ad $x \in A$ si chiama *immagine di x mediante α* e si denota con
63 $\alpha(x)$.

64 Le definizioni che seguono si riferiscono ad una generica funzione
65 $\alpha : A \rightarrow B$.

66 **Definizione 1.6.** Dato $I \subseteq A$, l'immagine di I mediante α è $\alpha(I) =$
67 $\{\alpha(x) \mid x \in I\}$.

68 **Definizione 1.7.** L'immagine della funzione $\alpha : A \rightarrow B$ è

$$\text{im } \alpha = \alpha(A) = \{\alpha(x) \mid x \in A\}.$$

69 **Definizione 1.8.** Dato $J \subseteq B$ l'antiimmagine (o controimmagine) di
70 J mediante α è

$$\alpha^{-1}(J) = \{x \in A \mid \alpha(x) \in J\}.$$

71
72 **Risposta alla domanda iniziale.** $\alpha^{-1}(b)$ è $\hat{=}$ l'insieme $\hat{=}$ di tutti gli
73 $x \in A$ tali che $\alpha(x) = b$.

74 **Definizione 1.9.** Dato $b \in B$, l'antiimmagine di b mediante la funzio-
75 **ne** $\alpha : A \rightarrow B$ è

$$\alpha^{-1}(b) = \alpha^{-1}(\{b\}) = \{x \in A \mid \alpha(x) = b\}.$$

76 **Esempi 1.10.** Con riferimento a $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} : x \mapsto x^2$,

- 77 • $f(7) = 49$;
- 78 • $f([-1, 3]) = f(\{x \in \mathbb{R} \mid -1 \leq x < 3\}) = [0, 9]$;
- 79 • $\text{im } f = [0, +\infty[$;
- 80 • $f^{-1}([-4, 9]) = [-3, 3]$;

81 • $f^{-1}(25) = \{-5, 5\};$

82 • $f^{-1}(-9) = \emptyset.$

83 **Definizione 1.11.** Una funzione $\alpha : A \rightarrow B$ si dice *iniettiva* se

$$\forall x, y \in A : (\alpha(x) = \alpha(y) \Rightarrow x = y).$$

84 **Esempio 1.12.** Dimostriamo che la funzione $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} : x \mapsto x^3 + 1$
85 è iniettiva. Infatti, consideriamo $x, y \in \mathbb{R}$ tali che $g(x) = g(y)$. Segue:

$$x^3 + 1 = y^3 + 1 \Rightarrow x^3 - y^3 = 0 \Rightarrow (x - y)(x^2 + xy + y^2) = 0.$$

86 Il secondo fattore è un polinomio in x con $\Delta = -3y^2$ e quindi si annulla
87 solo per $y = 0 = x$. Se $x \neq y$, vale

$$g(x) = g(y) \Rightarrow x - y = 0 \Rightarrow x = y.$$

88 In ciascun caso da $g(x) = g(y)$ segue $x = y$. Allora g è iniettiva.

89 **Esempio 1.13.** $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} : x \mapsto x^2$ non è iniettiva, perché $f(1) =$
90 $f(-1)$ ma $1 \neq -1$.

91 **Osservazione 1.14.** Come principio generale, se voglio *dimostrare*
92 un'affermazione (proposizione/teorema) che comincia con "per ogni
93 ..." (ad es.: g è iniettiva), devo procedere in generale; se voglio *confu-*
94 *tarla* (f non è iniettiva) basta fare un *controesempio*.

95 **Definizione 1.15.** Una funzione $\alpha : A \rightarrow B$ si dice *suriettiva* se
96 $\text{im } \alpha = B$.

97 **Esempi 1.16.** f non è suriettiva perché $\text{im } f = [0, +\infty[\neq \mathbb{R}$. È invece
98 suriettiva $h : \mathbb{R} \rightarrow [0, +\infty[: x \mapsto x^2$. Poi $\text{im } g = \mathbb{R}$, quindi g è
99 suriettiva.

100 **Definizione 1.17.** $\alpha : A \rightarrow B$ si dice *funzione biiettiva* (o *biiezione*)
101 se è sia iniettiva che suriettiva.

102 **Esempi 1.18.** f non è biiettiva, h non è biiettiva, g è biiettiva.

103 **Osservazione 1.19.** Se $\alpha : A \rightarrow B$ è iniettiva, allora ogni $y \in B$
104 è immagine di *al più* un elemento del dominio. Se $\alpha : A \rightarrow B$ è
105 suriettiva, allora ogni $y \in B$ è immagine di *almeno* un elemento del
106 dominio. Quindi se $\alpha : A \rightarrow B$ è biiettiva, allora ogni $y \in B$ è
107 immagine di esattamente un $x \in A$. Associando ad ogni $y \in B$ l'unico
108 $x \in A$ tale che $\alpha(x) = b$ si ottiene una nuova funzione, detta *inversa*
109 di α , denotata con $\alpha^{-1} : B \rightarrow A$.

110 **Osservazione 1.20.** Se $\alpha : A \rightarrow B$ è biiettiva e $b \in B$, allora $\alpha^{-1}(b)$,
111 ovverosia l'immagine di b mediante α^{-1} , è un elemento di A . In base
112 però alla definizione 1.9, $\alpha^{-1}(b)$ è l'*insieme* $\{x \in A \mid \alpha(x) = b\}$,
113 formato da un solo elemento. Trascureremo questa contraddizione di
114 notazioni.

115 **Osservazione 1.21.** Se $\alpha : A \rightarrow B$ è biiettiva, allora vale:

$$\forall x \in A : \forall y \in B : (y = \alpha(x) \Leftrightarrow x = \alpha^{-1}(y)). \quad (1.1)$$

116 **Definizione 1.22.** Date $\alpha : A \rightarrow B$ e $\beta : C \rightarrow D$ tali che $\text{im } \alpha \subseteq C$,
117 la *funzione composta* di α e β è¹

$$\beta \circ \alpha : A \rightarrow D : x \mapsto \beta(\alpha(x)).$$

118 **Esempi 1.23.** Con riferimento a $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} : x \mapsto x^3 + 1$ e $h : \mathbb{R} \rightarrow$
119 $[0, +\infty[: x \mapsto x^2$ si ha

$$g \circ h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} : x \mapsto (x^2)^3 + 1 = x^6 + 1,$$

$$120 \quad h \circ g : \mathbb{R} \rightarrow [0, +\infty[: x \mapsto (x^3 + 1)^2 = x^6 + 2x^3 + 1.$$

¹ $\beta \circ \alpha$ si legge "beta tondino alfa".

121 **Osservazione 1.24.** In questo caso $g \circ h \neq h \circ g$.

122 **Definizione 1.25.** La *funzione identica* nell'insieme A è $\text{id}_A : A \rightarrow$
 123 $A : x \mapsto x$.

124 **Proposizione 1.26.** Se $\alpha : A \rightarrow B$ è una *funzione biiettiva*, allora
 125 $\alpha^{-1} \circ \alpha = \text{id}_A$ e $\alpha \circ \alpha^{-1} = \text{id}_B$.

126 *Dimostrazione.* 1) Dobbiamo dimostrare che le funzioni $\alpha^{-1} \circ \alpha$ e id_A
 127 hanno uguali dominio, codominio, legge. Il dominio di $\alpha^{-1} \circ \alpha$ è uguale
 128 al dominio di α , cioè A . Il codominio di $\alpha^{-1} \circ \alpha$ è uguale al codominio
 129 di $\alpha^{-1} : B \rightarrow A$, cioè A . Consideriamo $x \in A$ qualsiasi e poniamo
 130 $y = \alpha(x)$. Vale:

$$[\alpha^{-1} \circ \alpha](x) = \alpha^{-1}(\alpha(x)) = \alpha^{-1}(y) \stackrel{(1.1)}{=} x = \text{id}_A(x).$$

131 Quindi $\alpha^{-1} \circ \alpha$ e id_A hanno anche la stessa legge. 2) Dobbiamo dimo-
 132 strare che le funzioni $\alpha \circ \alpha^{-1}$ e id_B hanno uguali dominio, codominio,
 133 legge. Il dominio di $\alpha \circ \alpha^{-1}$ è uguale al dominio di α^{-1} , cioè B . Il
 134 codominio di $\alpha \circ \alpha^{-1}$ è uguale al codominio di α , cioè B . Consideriamo
 135 $y' \in B$ qualsiasi e poniamo $x' = \alpha^{-1}(y')$. Vale:

$$[\alpha \circ \alpha^{-1}](y') = \alpha(\alpha^{-1}(y')) = \alpha(x') \stackrel{(1.1)}{=} y' = \text{id}_B(y').$$

136 Ne segue la tesi, come prima. □

137 **Proposizione 1.27.** Se $\alpha : A \rightarrow B$ e $\beta : B \rightarrow A$ sono due funzioni
 138 tali che $\beta \circ \alpha = \text{id}_A$ e $\alpha \circ \beta = \text{id}_B$, allora α è biiettiva e $\beta = \alpha^{-1}$. (dim.
 139 omessa)

140 **Definizione 1.28.** Data una funzione $\alpha : A \rightarrow B$ e $I \subseteq A$, la
 141 *restrizione di α ad I* è la funzione

$$\alpha|_I : I \rightarrow B : x \mapsto \alpha(x).$$

142 **Esempio 1.29.** $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} : x \mapsto x^2$ non è iniettiva, ma $f|_{[0,+\infty[}$ lo è.

143 **Sfida 1.30.** Si consideri l'affermazione: *Comunque date due funzioni*
144 $\alpha : A \rightarrow B$ e $\beta : B \rightarrow A$, se vale $\beta \circ \alpha = \text{id}_A$, allora α è biiettiva.

145 (a) Dire se l'affermazione è vera o falsa. (b) Dimostrare o confutare
146 l'affermazione, a seconda del caso.

www.unidocs.it - Appunti e dispense per superare i tuoi esami universitari

www.unidocs.it - Appunti e dispense per superare i tuoi esami universitari

Lezione 2

Campi e matrici

$AB = O$ implica $A = O$ o $B = O$? (Una domanda vaga, volutamente.)

2.1 Campi

Risposta alla sfida 1.30. L'affermazione è falsa e la confuto con un controesempio. Consideriamo le funzioni

$$\alpha : [0, +\infty] \rightarrow \mathbb{R} : x \mapsto \sqrt{x},$$

$$\beta : \mathbb{R} \rightarrow [0, +\infty[: x \mapsto x^2.$$

Vale

$$\beta \circ \alpha : [0, +\infty[\rightarrow [0, +\infty[: x \mapsto \beta(\alpha(x)) = \beta(\sqrt{x}) = (\sqrt{x})^2 = x =$$

$$\text{id}_{[0, +\infty[}(x).$$

158 $\beta \circ \alpha$ e $\text{id}_{[0, +\infty[}$ hanno stessi dominio, codominio e legge, quindi $\beta \circ \alpha =$
 159 $\text{id}_{[0, +\infty[}$. Tuttavia $\text{im } \alpha = [0, +\infty[\neq \mathbb{R}$, quindi α non è suriettiva, quindi
 160 α non è biiettiva.

161 **Osservazione 2.1.** $\alpha \circ \beta : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} : x \mapsto \alpha(\beta(x)) = \alpha(x^2) = \sqrt{x^2} =$
 162 $|x|$, quindi $\alpha \circ \beta \neq \text{id}_{\mathbb{R}}$.

163 **Definizione 2.2.** Un'operazione binaria in un insieme A è una fun-
 164 zione $\omega : A \times A \rightarrow A$.

165 **Esempio 2.3.** Un'operazione binaria in \mathbb{Z} è $\omega : \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z} : (x, y) \mapsto$
 166 $x + y$.

167 **Notazione 2.4.** Se ω è un'operazione binaria in A , si usa scrivere $x\omega y$
 168 in luogo di $\omega((x, y))$, così come si usa scrivere $2 + 3$ anziché $+(2, 3)$.

169 **Definizione 2.5.** Un *campo* è una terna ordinata $(K, +, \cdot)$, dove K è
 170 un insieme e “+”, “ \cdot ” sono operazioni binarie in K , soddisfacenti le
 171 seguenti proprietà (scriveremo xy invece di $x \cdot y$).

1) Esistono due elementi distinti in K , denotati con “0” e “1”, tali che $\forall x \in K$ valgono

$$x + 0 = x \quad (2.1)$$

$$x1 = x \quad (2.2)$$

2) Per ogni $x, y, z \in K$ valgono:

$$(x + y) + z = x + (y + z) \quad (2.3)$$

$$\exists x' \in K : x + x' = 0 \quad (2.4)$$

$$x + y = y + x \quad (2.5)$$

$$(xy)z = x(yz) \quad (2.6)$$

$$x(y + z) = (xy) + (xz) \quad (2.7)$$

$$xy = yx \quad (2.8)$$

$$x \neq 0 \Rightarrow \exists x'' \in K : xx'' = 1. \quad (2.9)$$

172 **Esempi 2.6.** $(\mathbb{R}, +, \cdot)$, dove “+” e “ \cdot ” sono le normali operazioni di
 173 somma e prodotto, è un campo. Anche $(\mathbb{Q}, +, \cdot)$ è un campo, ma
 174 $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$ non lo è (non vale la 2.9), e nemmeno $(\mathbb{N}, +, \cdot)$ è un campo.

Esempio 2.7. Consideriamo l’insieme $K = \{B, R\}$, con le operazioni descritte dalle seguenti tabelle:

+	B	R
B	B	R
R	R	B

\cdot	B	R
B	B	B
R	B	R

175 Ad esempio $R + B$ si calcola guardando nella riga di R e nella colonna
 176 di B , $R + B = R$.

177 Si verifica che $(K, +, \cdot)$ soddisfa tutti gli assiomi nella def. 2.5, quin-
 178 di è un campo. In esso $0 = B$, $1 = R$. Per verificare ad esempio la
 179 (2.7) procedo riempiendo la tabella

x	y	z	$y + z$	xy	xz	$x(y + z)$	$(xy) + (xz)$
B	B	B	B	B	B	B	B
B	B	R	R	B	B	B	B
B	R	B	R	B	B	B	B
B	R	R	\dots				
R	B	B	\dots				
R	B	R	R	B	R	R	R
R	R	B	\dots				
R	R	R	\dots				

180 e verifico che le ultime due colonne siano uguali.

181 **Osservazione 2.8.** La “maggior parte” delle proprietà algebriche che
 182 avete studiato a scuola (ad es. i prodotti notevoli, il quadrato di un
 183 binomio, le formule per le equazioni di secondo grado, il teorema di
 184 Ruffini, ecc.) si dimostra a partire dalle proprietà presenti nella defi-
 185 nizione di campo. Quindi *le suddette proprietà algebriche sono valide*
 186 *in ogni campo.*

187 Seguono alcuni esempi di tali proprietà.

188 **Proposizione 2.9.** *Sia $(K, +, \cdot)$ un campo. Allora per ogni $x \in K$*
 189 *vale $x0 = 0$.*

190 *Dimostrazione.* Osserviamo che

$$x0 + x \stackrel{(2.2)}{=} x0 + x1 \stackrel{(2.7)}{=} x(0 + 1) \stackrel{(2.5)}{=} x(1 + 0) \stackrel{(2.1)}{=} x1 \stackrel{(2.2)}{=} x.$$

191 Per la (2.4) esiste $x' \in K$ tale che $x + x' = 0$ e quindi dalle equazioni
 192 sopra

$$(x0 + x) + x' = 0. \quad (2.10)$$

193 Vale poi

$$(x0 + x) + x' \stackrel{(2.3)}{=} x0 + (x + x') = x0 + 0 \stackrel{(2.1)}{=} x0. \quad (2.11)$$

194 Combinando (2.10) e (2.11) si ottiene $x0 = 0$. \square

195 **Proposizione 2.10.** *Sia $(K, +, \cdot)$ un campo e $A, B \in K$. Allora $AB =$*
 196 *0 implica $A = 0$ o $B = 0$.*

197 *Dimostrazione.* Se $A = 0$ vale la tesi e la dimostrazione è finita. Con-
 198 sideriamo ora il caso $A \neq 0$. Per (2.9), (2.8) esiste $A'' \in K$ tale che
 199 $AA'' = 1$ e $A''A = 1$. Sfruttando quest'ultima equazione si ottiene

$$B \stackrel{(2.2)}{=} B1 \stackrel{(2.8)}{=} 1B = (A''A)B \stackrel{(2.6)}{=} A''(AB) \stackrel{\text{Hp}}{=} A''0 \stackrel{\text{prop. 2.9}}{=} 0.$$

200 \square

201 2.2 Matrici

202 Ecco la generica *matrice* ad m righe ed n colonne ad elementi in un
 203 campo¹ K (per es. $K = \mathbb{R}$), altrimenti detta *matrice* $m \times n$ ad elementi

¹Anche se per definizione un campo è una terna formata da un insieme e da due operazioni, in seguito esso verrà denotato solo col simbolo dell'insieme: K anzichè $(K, +, \cdot)$.

204 in K :

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}. \quad (2.12)$$

- 205 • $a_{ij} \in K$ è l'elemento generico di A , in cui
- 206 • i è l'indice di riga;
- 207 • j è l'indice di colonna;
- 208 • $\mathcal{M}(m \times n, K)$ denota l'insieme di tutte le matrici $m \times n$ ad
209 elementi in K ;
- 210 • ogni $A \in \mathcal{M}(m \times n, \mathbb{R})$ si dice *matrice reale*;
- 211 • ogni $A \in \mathcal{M}(m \times n, \mathbb{C})$ si dice *matrice complessa*.

212 La matrice in (2.12) si rappresenta anche con la seguente notazione:

$$A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}(m \times n, K).$$

213 **Esercizio 2.11.** Scrivere per esteso la matrice $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}(2 \times 3, \mathbb{R})$
214 definita ponendo $a_{ij} = 2i - j$ per ogni $i = 1, 2, j = 1, 2, 3$.

215 *Svolgimento.*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \quad (2.13)$$

216 dove per es. il valore "0" in riga 1 e colonna 2 è stato ottenuto calco-
217 lando $2i - j$ con $i = 1, j = 2$.

218 **Definizione 2.12.** La *matrice nulla* $m \times n$ è la matrice $O_{m \times n} = (z_{ij}) \in$
219 $\mathcal{M}(m \times n, K)$ definita ponendo $z_{ij} = 0$ per ogni $i = 1, 2, \dots, m, j =$
220 $1, 2, \dots, n$.

221 Talora potremo scrivere semplicemente O in luogo di $O_{m \times n}$.

222 **Definizione 2.13.** La *matrice opposta* di $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}(m \times n, K)$ è
 223 la matrice $-A = (b_{ij}) \in \mathcal{M}(m \times n, K)$ definita ponendo $b_{ij} = -a_{ij}$ per
 224 ogni $i = 1, 2, \dots, m, j = 1, 2, \dots, n$.

225 **Esempio 2.14.** L'opposta della (2.13) è

$$-A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ -3 & -2 & -1 \end{pmatrix}.$$

226 **Definizione 2.15.** La *somma* di $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}(m \times n, K)$ e $B =$
 227 $(b_{ij}) \in \mathcal{M}(m \times n, K)$ è la matrice $A + B = (c_{ij}) \in \mathcal{M}(m \times n)$ definita
 228 ponendo $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$, per ogni i, j .

Esempio 2.16.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & -2 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 2 & 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

229 **Osservazioni 2.17.** 1) Se $A \in \mathcal{M}(m \times n, K)$, allora $A + O_{m \times n} = A$.
 230 2) Se $A \in \mathcal{M}(m \times n, K)$, allora $A + (-A) = O_{m \times n}$.

231 In seguito la differenza di due matrici è definita tramite $A - B =$
 232 $A + (-B)$.

233 **Proposizione 2.18.** Se $A, B, C \in \mathcal{M}(m \times n, K)$, allora

$$\begin{aligned} (A + B) + C &= A + (B + C) && \text{(propr. associativa della somma)} \\ A + B &= B + A && \text{(propr. commutativa della somma).} \end{aligned}$$

234 **Definizione 2.19.** Il *prodotto* delle matrici $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}(m \times n, K)$
 235 e $B = (b_{jh}) \in \mathcal{M}(n \times p, K)$ è la matrice $AB = (c_{ih}) \in \mathcal{M}(m \times p, K)$
 236 definita ponendo

$$c_{ih} = \sum_{j=1}^n a_{ij} b_{jh}$$

237 per ogni $i = 1, 2, \dots, m, h = 1, 2, \dots, p$.

238 **Esempio 2.20.** Verifichiamo il prodotto:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 4 & 4 & 4 \\ 1 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 7 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 3 & -3 & 7 \\ 2 & 17 & 19 & 13 \end{pmatrix}.$$

Secondo la definizione, moltiplicando una matrice 2×3 per una 3×4 si ottiene una 2×4 . I suoi elementi sono calcolati come segue:

$$c_{11} = \sum_{j=1}^3 a_{1j}b_{j1} = a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} + a_{13}b_{31} = 1 \cdot 0 + 0 \cdot 1 + (-1) \cdot 0 = 0;$$

$$c_{12} = \sum_{j=1}^3 a_{1j}b_{j2} = a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} + a_{13}b_{32} = 1 \cdot 4 + 0 \cdot 2 + (-1) \cdot 1 = 3;$$

$$c_{13} = \sum_{j=1}^3 a_{1j}b_{j3} = a_{11}b_{13} + a_{12}b_{23} + a_{13}b_{33} = 1 \cdot 4 + 0 \cdot 1 + (-1) \cdot 0 = -3;$$

⋮

$$c_{24} = \sum_{j=1}^3 a_{2j}b_{j4} = a_{21}b_{14} + a_{22}b_{24} + a_{23}b_{34} = 3 \cdot 4 + 2 \cdot 2 + 1(-3) = 13.$$

239 Vedremo più avanti che tale definizione si motiva con il fatto che il
240 prodotto tra matrici corrisponde alla composizione di funzioni lineari.

241 **Proposizione 2.21.** Se $A, A' \in \mathcal{M}(m \times n, K)$, $B, B' \in \mathcal{M}(n \times p, K)$,
242 $C \in \mathcal{M}(p \times q, K)$, allora valgono:

$$\begin{aligned} (AB)C &= A(BC) && \text{(propr. associativa del prodotto)} \\ A(B + B') &= AB + AB' && \text{(distributiva del prodotto risp. alla somma)} \\ (A + A')B &= AB + A'B && \text{(altra propr. distributiva).} \end{aligned}$$

243 *Problema.* Vale $AB = BA$?

244 Intanto, se A e B non sono *quadrate* (cioè $m = n$) delle stesse
 245 dimensioni, risulta o che BA non è proprio definita, o ha dimensioni
 246 diverse da AB . Quindi il problema si pone solo nel caso $A, B \in \mathcal{M}(n \times$
 247 $n, K)$.

248 **Esercizio 2.22.** *Date le matrici reali*

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

249 *calcolare AB e BA .*

250 *Svolgimento.*

$$AB = \begin{pmatrix} 0 \cdot 1 + 1 \cdot 0 & 0 \cdot 0 + 1 \cdot 0 \\ 0 \cdot 1 + 0 \cdot 0 & 0 \cdot 0 + 0 \cdot 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = O_{2 \times 2};$$

251

$$BA = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

252 Due conseguenze:

- 253 1) Il prodotto tra matrici non gode della proprietà commutativa.
 254 2) *Se A, B sono matrici quadrate, $AB = O$ non implica $A = O$ o*
 255 *$B = O$.*

256 **Definizione 2.23.** Se $A, B \in \mathcal{M}(n \times n, K)$ e $AB = O_{n \times n}$, $A \neq O_{n \times n} \neq$
 257 B , allora A e B si dicono *divisori dello zero* o anche *zerodivisori*.

258 **Esempio 2.24.** Le matrici A e B nell'esercizio 2.22 sono zerodivisori.

259 **Definizione 2.25.** Le *righe* di $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}(m \times n, K)$ sono le
 260 seguenti matrici $1 \times n$:

$$\begin{aligned} A_1 &= (a_{11} \ a_{12} \ \dots \ a_{1n}), \\ A_2 &= (a_{21} \ a_{22} \ \dots \ a_{2n}), \\ &\vdots \\ A_m &= (a_{m1} \ a_{m2} \ \dots \ a_{mn}). \end{aligned}$$

261 Le *colonne* di A sono le seguenti matrici $m \times 1$:

$$A^1 = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix}, \quad A^2 = \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{pmatrix}, \quad \dots, \quad A^n = \begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{pmatrix}.$$

262 **Sfida 2.26.** Sia data una matrice $A \in \mathcal{M}(m \times n)$ e la colonna $n \times 1$

$$B = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix},$$

263 formata da tutti zeri tranne un "1" in r -esima posizione ($1 \leq r \leq n$).

264 Determinare AB .

www.unidocs.it

www.unidocs.it

www.



www.unidocs.it

www.unidocs.it



www.unidocs.it

www.unidocs.it



www.unidocs.it

www.unidocs.it

Lezione 3

Proprietà delle matrici

Supponendo $ad - bc \neq 0$, risolvere:

$$\begin{cases} ax + by = r \\ cx + dy = s. \end{cases}$$

Risposta alla sfida 2.26. La matrice B è uguale a una matrice (b_{j1}) definita ponendo $b_{r1} = 1$ e $b_{j1} = 0$ per $j = 1, 2, \dots, r - 1, r + 1, \dots, n$. Il prodotto è una matrice $m \times 1$, $C = (c_{i1})$. Per definizione di prodotto, $c_{i1} = \sum_{j=1}^n a_{ij}b_{j1}$ per ogni $i = 1, 2, \dots, m$, quindi $c_{i1} = a_{ir}b_{r1} = a_{ir}$. Quindi C è la colonna r -esima di A : $AB = A^r$.

Definizione 3.1. La *diagonale principale* di una matrice quadrata $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}(n \times n, K)$ ¹ è l' n -pla degli elementi $a_{11}, a_{22}, \dots, a_{nn}$.

¹Il simbolo K denota sempre un campo, se non diversamente specificato.

278 **Definizione 3.2.** La *matrice identica d'ordine n* è la matrice $I_n =$
 279 $(\delta_{ij}) \in \mathcal{M}(n \times n, K)$ definita ponendo

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{se } i = j, \\ 0 & \text{se } i \neq j. \end{cases}$$

Esempio 3.3.

$$I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

280 ha tutti "1" sulla diagonale principale, "0" altrove.

281 **Esercizio 3.4.** Calcolare I_2A , dove

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -2 \\ 1 & 0 & 7 \end{pmatrix}.$$

282 *Svolgimento.*

$$\begin{aligned} 283 \quad I_2A &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 & -2 \\ 1 & 0 & 7 \end{pmatrix} = \\ 284 \quad &= \begin{pmatrix} 1 \cdot 0 + 0 \cdot 1 & 1(-1) + 0 \cdot 0 & 1(-2) + 0 \cdot 7 \\ 0 \cdot 0 + 1 \cdot 1 & 0(-1) + 1 \cdot 0 & 0(-2) + 1 \cdot 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -2 \\ 1 & 0 & 7 \end{pmatrix} = A. \end{aligned}$$

284 **Proposizione 3.5.** Se $A \in \mathcal{M}(m \times n, K)$, allora $I_m A = A = A I_n$.

285 **Definizione 3.6.** Una matrice $A \in \mathcal{M}(n \times n, K)$ si dice *invertibile* se
 286 esiste $B \in \mathcal{M}(n \times n, K)$ tale che

$$AB = I_n = BA. \quad (3.1)$$

287 Se ciò si verifica, B prende il nome di *matrice inversa* di A e si denota
 288 con $B = A^{-1}$.

289 **Definizione 3.7.** Una matrice quadrata non invertibile si dice *matrice*
 290 *singolare* (o *degenere*).

291 **Esempio 3.8.** $O_{n \times n}$ è singolare.

292 **Esercizio 3.9.** Date le seguenti matrici reali, stabilire se sono inver-
293 tibili e in caso affermativo trovarne le inverse:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}.$$

Svolgimento. Si tratta di risolvere le equazioni (3.1) in cui B è una matrice incognita: $B = \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}$.

$$\begin{cases} AB = I_2 \\ BA = I_2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} \begin{pmatrix} x + 2z & y + 2t \\ 3x & 3y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} x + 3y & 2x \\ z + 3t & 2z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} x + 2z = 1 \\ y + 2t = 0 \\ 3x = 0 \\ 3y = 1 \\ x + 3y = 1 \\ 2x = 0 \\ z + 3t = 0 \\ 2z = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} t = -\frac{y}{2} = -\frac{1}{6} \\ x = 0 \\ y = \frac{1}{3} \\ z = \frac{1}{2} \end{cases}$$

294 Occorre sostituire i valori trovati dalle quattro equazioni scelte nelle
295 altre quattro (ad es. $x + 2z = 0 + 2 \cdot \frac{1}{2} = 1$) per verificare che diano delle
296 identità, come effettivamente accade. Conclusione: A è invertibile e

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1/3 \\ 1/2 & -1/6 \end{pmatrix}.$$

(Verificare che $AA^{-1} = I_2 = A^{-1}A$.) Svolgiamo lo stesso procedimento per C :

$$\begin{aligned} \begin{cases} CB = I_2 \\ BC = I_2 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \end{cases} \Leftrightarrow \\ \begin{cases} \begin{pmatrix} x - 2z & y - 2t \\ -2x + 4z & -2y + 4t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} x - 2y & -2x + 4y \\ z - 2t & -2z + 4t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \end{cases} \Leftrightarrow \\ \begin{cases} x - 2z = 1 \\ y - 2t = 0 \\ -2x + 4z = 0 \\ -2y + 4t = 1 \\ x - 2y = 1 \\ -2x + 4y = 0 \\ z - 2t = 0 \\ -2z + 4t = 1. \end{cases} \end{aligned}$$

297 Notiamo subito che il sistema non ha soluzioni: ad esempio, dalla
298 seconda equazione si ottiene $y = 2t$ e sostituendo nella quarta si ha
299 $-2(2t) + 4t = 1$, cioè $0 = 1$, assurdo. Quindi C è una matrice singolare.

300 **Osservazione 3.10.** È possibile dimostrare che se A e B sono due
301 matrici quadrate d'ordine n ad elementi in K tali che $AB = I_n$, allora
302 necessariamente $BA = I_n$. Ciò implica che nello studio dell'invertibi-
303 lità di A , anziché $2n^2$ equazioni come sopra, è sufficiente impostarne
304 n^2 . Sono comunque troppe e avremo metodi più efficaci per risolvere
305 questo tipo di problema.

306 **Proposizione 3.11.** *Se una matrice $A \in \mathcal{M}(n \times n, K)$ è invertibile,*
307 *allora non è zerodivisore.*

308 *Dimostrazione.* Innanzitutto $A \neq O_{n \times n}$ perché $O_{n \times n}$ è singolare. Sup-
 309 poniamo che valga $AB = O_{n \times n}$ con $B \in \mathcal{M}(n \times n, K)$. Ne se-
 310 gue: $A^{-1}(AB) = A^{-1}O_{n \times n} \Rightarrow (A^{-1}A)B = O_{n \times n} \Rightarrow I_n B = O_{n \times n} \Rightarrow$
 311 $B = O_{n \times n}$. Abbiamo quindi escluso la possibilità che valga $AB = O_{n \times n}$
 312 con $B \neq O_{n \times n}$. Analogamente si esclude che possa valere $CA = O_{n \times n}$
 313 con $C \neq O_{n \times n}$. Allora A non è zerodivisore. \square

314 **Osservazione 3.12.** Si può dimostrare il viceversa, cioè che se la
 315 matrice $A \neq O_{n \times n}$ non è invertibile, allora è zerodivisore. (Non è
 316 ovvio!)

317 **Definizione 3.13.** Dati $h \in K$ e $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}(m \times n, K)$, il *prodotto*
 318 *esterno* di h per A è la matrice $hA = (b_{ij}) \in \mathcal{M}(m \times n, K)$ definita
 319 ponendo $b_{ij} = ha_{ij}$ per ogni i, j .

Esempio 3.14.

$$7 \begin{pmatrix} 0 & -1 & -2 \\ 1 & 0 & 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -7 & -14 \\ 7 & 0 & 49 \end{pmatrix}.$$

Proposizione 3.15. Se $h, h' \in K$, $A, A' \in \mathcal{M}(m \times n, K)$, $B \in \mathcal{M}(n \times p, K)$, valgono:

$$h(A + A') = hA + hA', \quad (h + h')A = hA + h'A,$$

$$h(AB) = (hA)B = A(hB).$$

320 (dim. omessa)

321 **Proposizione 3.16.** Data una matrice $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}(2 \times 2, K)$,

322 (i) se $ad - bc \neq 0$, allora A è invertibile e

$$A^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}.$$

323 (ii) se $ad - bc = 0$, allora A è singolare.

Dimostrazione. Vale:

$$A \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ad - bc & 0 \\ 0 & ad - bc \end{pmatrix};$$

$$\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} A = \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ad - bc & 0 \\ 0 & ad - bc \end{pmatrix}.$$

Se $A = O_{2 \times 2}$, allora $ad - bc = 0$ e A non è invertibile. Se $A \neq O_{2 \times 2}$ e $ad - bc = 0$, le equazioni sopra implicano che A è zerodivisore, quindi singolare. Infine, se $ad - bc \neq 0$, da tali equazioni si ricava, moltiplicando per $1/(ad - bc)$:

$$A \left[\frac{1}{ad - bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} \right] = I_2;$$

$$\left[\frac{1}{ad - bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} \right] A = I_2,$$

324 cioè A è invertibile e la sua inversa è la matrice descritta in (i). \square

325
326 *Risposta alla domanda iniziale.* Il sistema assegnato si può esprimere
327 in forma cosiddetta *matriciale* $AX = B$, dove

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \quad X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} r \\ s \end{pmatrix}.$$

328 Infatti, $AX = \begin{pmatrix} ax + by \\ cx + dy \end{pmatrix}$. Visto che per la prop. precedente A è
329 invertibile, vale:

$$AX = B \Leftrightarrow A^{-1}(AX) = A^{-1}B \Leftrightarrow (A^{-1}A)X = A^{-1}B \Leftrightarrow X = A^{-1}B.$$

330 Quindi l'equazione $AX = B$ ha soluzione unica $X = A^{-1}B$, da cui

$$X = \frac{1}{ad - bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r \\ s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{dr - bs}{ad - bc} \\ \frac{-cr + as}{ad - bc} \end{pmatrix},$$

331 cioè $x = (dr - bs)/(ad - bc)$, $y = (-cr + as)/(ad - bc)$. In generale, ogni
 332 sistema di m equazioni di primo grado in n incognite si può esprimere
 333 in forma matriciale $AX = B$, dove A è una matrice $m \times n$.

334 **Teorema 3.17.** *Se le matrici $A, B \in \mathcal{M}(n \times n, K)$ sono invertibili,*
 335 *allora anche AB è invertibile e $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.*

336 *Dimostrazione.* Poniamo $X = B^{-1}A^{-1}$ e calcoliamo:

$$\begin{aligned} (AB)X &= A(BB^{-1})A^{-1} = AI_nA^{-1} = AA^{-1} = I_n, \\ X(AB) &= B^{-1}(A^{-1}A)B = B^{-1}I_nB = B^{-1}B = I_n. \end{aligned}$$

337 Resta dimostrato che AB è invertibile e X è la sua inversa. \square

338 “L’inversa del prodotto di due matrici invertibili è il prodotto delle
 339 inverse, prese in ordine contrario.”

www.unidocs.it - Appunti e dispense per superare i tuoi esami universitari

www.unidocs.it - Appunti e dispense per superare i tuoi esami universitari

Lezione 4

Il campo complesso

Calcolare $(1 - i\sqrt{3})^{100}$

Definizione 4.1. L'insieme dei *numeri complessi* è

$$\mathbb{C} = \mathbb{R}^2 = \{(a, b) \mid a, b \in \mathbb{R}\};$$

le operazioni \oplus , \odot tra numeri complessi si definiscono come segue:

$$\begin{aligned} \text{somma} \quad (a, b) \oplus (c, d) &= (a + c, b + d), \\ \text{prodotto} \quad (a, b) \odot (c, d) &= (ac - bd, ad + bc), \quad \forall a, b, c, d \in \mathbb{R}. \end{aligned} \tag{4.1}$$

Teorema 4.2. $(\mathbb{C}, \oplus, \odot)$ è un campo.

Ricordiamo che un campo è una terna $(K, +, \cdot)$, dove K è un insieme e “+”, “ \cdot ” sono operazioni binarie soddisfacenti le proprietà algebriche da (2.1) a (2.9) descritte a pag. 14.

351 *Dimostrazione. (Parte.)* Cerchiamo gli elementi neutri. Per la somma,
 352 cerchiamo $(c, d) \in \mathbb{C}$ tale che $\forall (a, b) \in \mathbb{C}$ valga $(a, b) \oplus (c, d) = (a, b)$.
 353 Chiaramente ciò si ottiene con $(c, d) = (0, 0)$. Cerchiamo poi $(c', d') \in$
 354 \mathbb{C} tale che $\forall (a, b) \in \mathbb{C}$ valga $(a, b) \odot (c', d') = (a, b)$. Sfruttando la
 355 (4.1): $(ac' - bd', ad' + bc') = (a, b)$, si ottiene il risultato con $c' = 1,$
 356 $d' = 0$. Le proprietà da (2.3) a (2.9) sono di verifica elementare, a parte
 357 l'ultima, che si riformula come segue: se $(\alpha, \beta) \in \mathbb{C}, (\alpha, \beta) \neq (0, 0),$
 358 esiste $(x, y) \in \mathbb{C}$ tale che $(\alpha, \beta) \odot (x, y) = (1, 0)$. Usiamo la (4.1):
 359 $(\alpha x - \beta y, \alpha y + \beta x) = (1, 0) \Leftrightarrow$

$$\begin{cases} \alpha x + \beta y = 1 \\ \beta x + \alpha y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} \alpha & -\beta \\ \beta & \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

360 Siccome $ad - bc = \alpha^2 + \beta^2 \neq 0$, la matrice a sinistra è invertibile e il
 361 sistema ha soluzione unica:

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \alpha & -\beta \\ \beta & \alpha \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{\alpha^2 + \beta^2} \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta & \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \\ &= \frac{1}{\alpha^2 + \beta^2} \begin{pmatrix} \alpha \\ -\beta \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

362 L'inverso cercato è

$$(x, y) = \left(\frac{\alpha}{\alpha^2 + \beta^2}, \frac{-\beta}{\alpha^2 + \beta^2} \right).$$

363

□

364 Conseguenza: “in \mathbb{C} valgono usuali regole dall'algebra”, in partico-
 365 lare quadrati e potenze di binomi, formule per le equazioni di secondo
 366 grado, teorema di Ruffini, ecc.

367 **Osservazione 4.3.** La funzione $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C} : x \mapsto (x, 0)$ è iniettiva.
 368 *Conveniamo* di identificare ogni $x \in \mathbb{R}$ con $F(x) \in \mathbb{C}$, cioè “ $x = (x, 0)$ ”.
 369 Quindi $\mathbb{R} \subseteq \mathbb{C}$.

370 Siccome allora ogni numero reale è anche un numero complesso, si
 371 pongono problemi del tipo: vale $2 + 5 = 2 \oplus 5$? Consideriamo $x, y \in \mathbb{R}$.
 372 Vale:

$$\begin{aligned}x \oplus y &= (x, 0) \oplus (y, 0) = (x + y, 0) = x + y, \\x \odot y &= (x, 0) \odot (y, 0) \stackrel{(4.1)}{=} (xy - 0, 0 + 0) = xy.\end{aligned}$$

373 Quindi le operazioni \oplus e \odot sono estensioni a tutto \mathbb{C} delle normali
 374 operazioni di somma e prodotto di numeri reali. Non essendo possibili
 375 ambiguità, d'ora in poi scriveremo “+” e “.” al posto di “ \oplus ” e “ \odot ”.

376 **Definizione 4.4.** L'unità immaginaria è $i = (0, 1) \in \mathbb{C}$.

377 **Osservazione 4.5.** Siano $a, b \in \mathbb{R}$. Vale:

$$a + ib = (a, 0) + (0, 1)(b, 0) \stackrel{(4.1)}{=} (a, 0) + (0, b) = (a, b).$$

378 **Definizione 4.6.** La *forma algebrica* del numero complesso $\alpha = (a, b)$
 379 è

$$\alpha = a + ib, \quad a, b \in \mathbb{R}. \quad (4.2)$$

380 Ogni numero complesso ha un'unica forma algebrica. Con riferi-
 381 mento ad α in (4.2), il numero reale $\Re(\alpha) = a$ si dice *parte reale* di α
 382 e $\Im(\alpha) = b$ si dice *coefficiente dell'immaginario* in α .

383 **Esercizio 4.7.** Esprimere in forma algebrica i^2 .

384 *Svolgimento.*

$$i^2 = i \cdot i = (0, 1)(0, 1) \stackrel{(4.1)}{=} (-1, 0) = -1.$$

385 **Esercizio 4.8.** Esprimere in forma algebrica i numeri complessi $\alpha =$
 386 $(1 - i\sqrt{3})^2$, $\beta = \frac{1}{1+2i}$.

387 *Svolgimento.* Usando la formula del quadrato di un binomio:

$$\alpha = 1 + (i\sqrt{3})^2 - 2i\sqrt{3} = 1 + 3i^2 - 2i\sqrt{3} = 1 - 3 - 2i\sqrt{3} = -2 - i2\sqrt{3}.$$

$$388 \quad \beta = \frac{1}{1+2i} \cdot \frac{1-2i}{1-2i} = \frac{1-2i}{1-(2i)^2} = \frac{1-2i}{1-4i^2} = \frac{1-2i}{5} = \frac{1}{5} - i\frac{2}{5}.$$

389 Quella moltiplicazione in colore blu è un metodo standard che funziona
390 sempre.

$$(1 - i\sqrt{3})^{100} = 1 - 100i\sqrt{3} + \binom{100}{2}(i\sqrt{3})^2 - \binom{100}{3}(i\sqrt{3})^3 + \dots??$$

391

392 **Definizione 4.9.** Dato $\alpha = a + ib$ ($a, b \in \mathbb{R}$), il *modulo* di α è

$$\rho = |\alpha| = \sqrt{a^2 + b^2} \quad (4.3)$$

393 e l'*argomento* (o *anomalia*) è un qualsiasi $\theta \in \mathbb{R}$ tale che valgano

$$a = \rho \cos \theta, \quad b = \rho \sin \theta. \quad (4.4)$$

394 Il modulo di α è unico. Per $\alpha \neq 0$ l'argomento è definito a meno
395 di multipli di 2π , cioè se θ è argomento di α , allora anche θ' lo è se, e
396 solo se, $\theta' = \theta + 2k\pi$ per un $k \in \mathbb{Z}$.

- 397 • Il piano cartesiano, quando viene identificato con \mathbb{C} , si chiama
398 *piano di Gauss*.
- 399 • L'asse delle x è l'*asse reale*.
- 400 • L'asse y è l'*asse immaginario*.

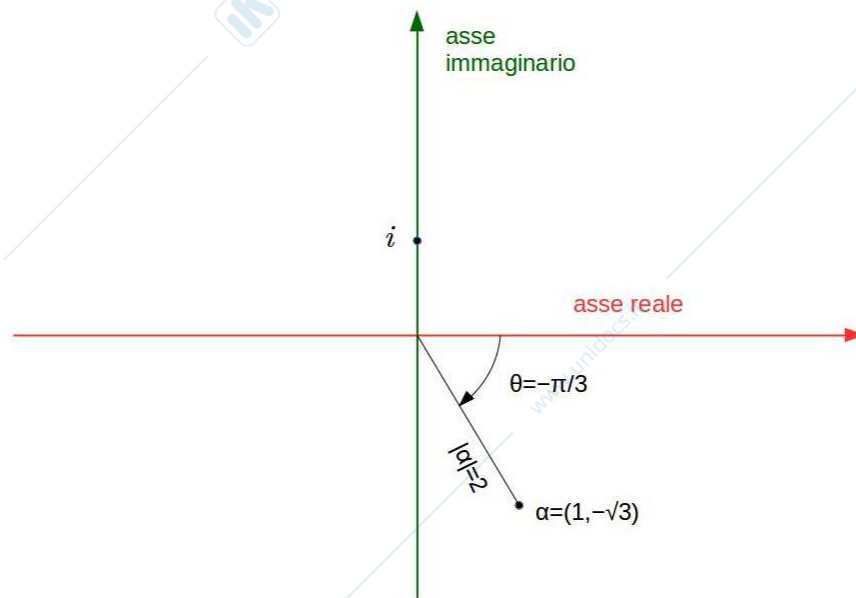


Figura 4.1: Modulo e argomento

401 Sostituendo (4.4) in (4.2), otteniamo la *forma trigonometrica* di α :

$$\alpha = \rho(\cos \theta + i \sin \theta), \quad \rho, \theta \in \mathbb{R}, \quad \rho \geq 0. \quad (4.5)$$

402

403 **Esercizio 4.10.** *Esprimere in forma trigonometrica* $\alpha = 1 - i\sqrt{3}$.

404 *Svolgimento.* Il modulo è $\rho \stackrel{(4.3)}{=} \sqrt{1 + (-\sqrt{3})^2} = 2$, l'argomento si
405 deduce dalle (4.4):

$$1 = 2 \cos \theta, \quad -\sqrt{3} = 2 \sin \theta \Rightarrow \theta = -\pi/3$$

406 (cfr. fig. 4.1). Quindi

$$\alpha = 2 \left(\cos \left(-\frac{\pi}{3} \right) + i \sin \left(-\frac{\pi}{3} \right) \right). \quad (4.6)$$

407 **Proposizione 4.11.** *Il prodotto di due numeri complessi α e β è un*
 408 *numero complesso il cui modulo è il prodotto dei moduli $|\alpha|$ e $|\beta|$ e il*
 409 *cui argomento è la somma degli argomenti.*

410 *Dimostrazione.* Consideriamo α in (4.5) e $\beta = \sigma(\cos \varphi + i \sin \varphi)$, $\sigma, \varphi \in$
 411 \mathbb{R} , $\sigma \geq 0$. Vale

$$\begin{aligned} \alpha\beta &= \rho\sigma(\cos \theta + i \sin \theta)(\cos \varphi + i \sin \varphi) = \\ &= \rho\sigma[(\cos \theta \cos \varphi - \sin \theta \sin \varphi) + i(\cos \theta \sin \varphi + \sin \theta \cos \varphi)] = \\ &= \rho\sigma[\cos(\theta + \varphi) + i \sin(\theta + \varphi)]. \end{aligned}$$

412 Quest'ultimo è proprio il numero complesso di modulo $\rho\sigma$ e argomento
 413 $\theta + \varphi$. □

414 **Corollario 4.12.** *Se α è il numero complesso in (4.5) e $n \in \mathbb{N}$, allora*

$$\alpha^n = \rho^n[\cos(n\theta) + i \sin(n\theta)]. \quad (4.7)$$

415 **Esercizio 4.13.** *Definendo $\alpha^{-n} = 1/\alpha^n$ per $\alpha \in \mathbb{C}^*$ e $n \in \mathbb{N}^*$, dimo-*
 416 *strare che la (4.7) vale per ogni $n \in \mathbb{Z}$.*

417
 418 *Risposta alla domanda iniziale.* Abbiamo visto che $\alpha = 1 - i\sqrt{3}$ ha
 419 forma trigonometrica (4.6). Applico la (4.7) con $n = 100$:

$$\begin{aligned} \alpha^{100} &= 2^{100} \left[\cos \left(-\frac{100}{3}\pi \right) + i \sin \left(-\frac{100}{3}\pi \right) \right] = \\ &= 2^{100} \left[\cos \left(34\pi - \frac{100}{3}\pi \right) + i \sin \left(34\pi - \frac{100}{3}\pi \right) \right] = \\ &= 2^{100} \left[\cos \left(\frac{2}{3}\pi \right) + i \sin \left(\frac{2}{3}\pi \right) \right] = 2^{100} \left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} \right) = \\ &= -2^{99} + i2^{99}\sqrt{3}. \end{aligned}$$

420 **Proprietà algebriche del modulo.** Per ogni $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ valgono:

$$\begin{aligned} (i) \quad & |\alpha\beta| = |\alpha| |\beta|. \\ (ii) \quad & \text{Se } \beta \neq 0, \quad \left| \frac{\alpha}{\beta} \right| = \frac{|\alpha|}{|\beta|}. \\ (iii) \quad & \left| |\alpha| - |\beta| \right| \leq |\alpha + \beta| \leq |\alpha| + |\beta|. \end{aligned} \quad (4.8)$$

421 L'ultima relazione è la *disuguaglianza triangolare*.

422 *Dimostrazione. (Parte.)* (i) sta nella prop. 4.11. Per (ii), poniamo
423 $\gamma = \alpha/\beta$, vale:

$$|\alpha| = |\beta\gamma| = |\beta| |\gamma| = |\beta| \left| \frac{\alpha}{\beta} \right|,$$

424 che è la tesi. Per la disuguaglianza triangolare vedi in figura 4.2. \square

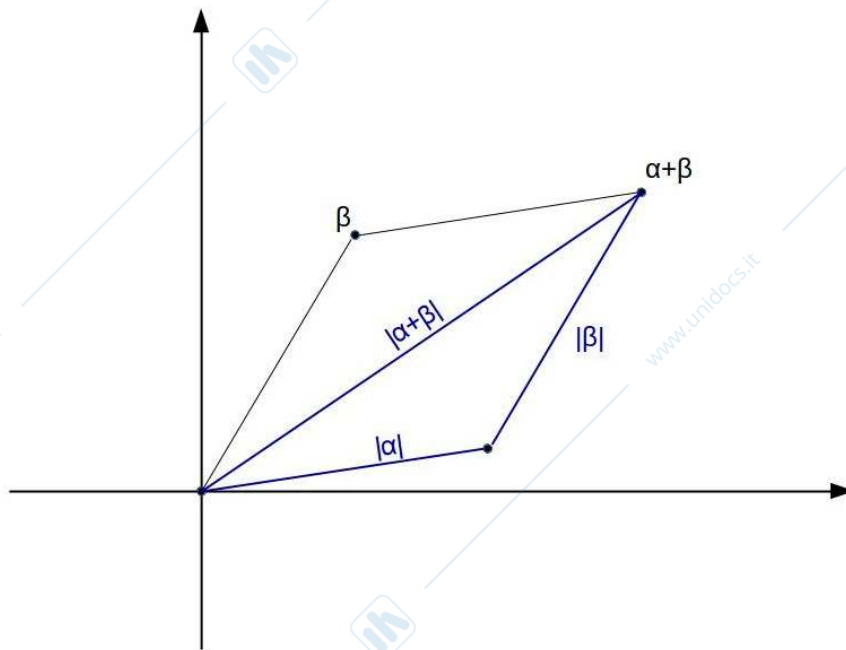


Figura 4.2: Disuguaglianza triangolare.

425 **Definizione 4.14.** Il *coniugato* del numero complesso $\alpha = a+ib$ ($a, b \in$
426 \mathbb{R}) è $\bar{\alpha} = a - ib$.

427 **Osservazione 4.15.** Un numero complesso α risulta reale se, e solo
428 se, $\bar{\alpha} = \alpha$.

429 **Sfida 4.16.** Dato $\alpha \in \mathbb{C}$, determinare $\alpha + \bar{\alpha}$ e $\alpha\bar{\alpha}$.

430 **Sfida 4.17.** Trovare un argomento del numero complesso $\alpha = -\cos \theta +$
431 $i \sin \theta$ dove $\theta \in \mathbb{R}$. (Cfr. eserc. 6.7.)

Lezione 5

Radici n -esime

Quante e quali sono le soluzioni complesse dell'equazione $x^3 = -8$?

Risposta alla sfida 4.16. Poniamo $\alpha = a + ib$, $a, b \in \mathbb{R}$. Vale:

$$\alpha + \bar{\alpha} = a + ib + a - ib = 2a = 2\Re(\alpha); \quad (5.1)$$

$$\alpha\bar{\alpha} = (a + ib)(a - ib) = a^2 - (ib)^2 = a^2 + b^2 = |\alpha|^2. \quad (5.2)$$

Osservazione 5.1. Per ogni numero complesso α , i numeri $\alpha + \bar{\alpha}$ e $\alpha\bar{\alpha}$ sono *reali*.

Per trasformare in forma algebrica una frazione complessa basta moltiplicare numeratore e denominatore per il coniugato del denominatore. Ad es.

$$\frac{1 + 2i}{-3 - 4i} = \frac{1 + 2i}{-3 - 4i} \cdot \frac{-3 + 4i}{-3 + 4i} = \frac{-3 + 4i - 6i - 8}{25} = -\frac{11}{25} - i\frac{2}{25}.$$

444 **Proposizione 5.2.** Per ogni $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ valgono: $\overline{\alpha + \beta} = \overline{\alpha} + \overline{\beta}$; $\overline{\alpha\beta} =$
 445 $\overline{\alpha}\overline{\beta}$.

446 *Dimostrazione.* Lasciamo la verifica della prima equazione per eserci-
 447 zio. Poniamo $\alpha = a + ib$, $\beta = c + id$, $a, b, c, d \in \mathbb{R}$. Vale:

$$\begin{aligned}\overline{\alpha\beta} &= \overline{[(ac - bd) + i(bc + ad)]} = ac - bd - i(bc + ad), \\ \overline{\alpha}\overline{\beta} &= (a - ib)(c - id) = ac - iad - ibc - bd = ac - bd - i(bc + ad).\end{aligned}$$

448

□

449 **Definizione 5.3.** L'esponenziale di $x + iy$ ($x, y \in \mathbb{R}$) è il numero
 450 complesso

$$e^{x+iy} = e^x(\cos y + i \sin y). \quad (5.3)$$

451 Quindi e^{x+iy} è il numero complesso di modulo e^x e argomento y .

452 **Motivazione** (approssimativa): si vuole estendere al campo complesso
 453 la serie di Taylor

$$e^z = 1 + z + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \dots$$

454 Sostituendovi $z = iy$,

$$\begin{aligned}e^{iy} &= 1 + iy - \frac{y^2}{2!} - i\frac{y^3}{3!} + \dots \\ &= \left(1 - \frac{y^2}{2!} + \dots\right) + i\left(y - \frac{y^3}{3!} + \dots\right) = \cos y + i \sin y,\end{aligned}$$

455 che coincide con la (5.3) con $x = 0$.

456 Combiniamo le equazioni $e^{iy} = \cos y + i \sin y$ ed $e^{-iy} = \cos y -$
 457 $i \sin y$ ($y \in \mathbb{R}$) ottenute dalla (5.3). Sommandole e dividendo per due
 458 otteniamo

$$\cos y = \frac{e^{iy} + e^{-iy}}{2}. \quad (5.4)$$

459 Sottraendo la seconda dalla prima e dividendo per $2i$ otteniamo

$$\sin y = \frac{e^{iy} - e^{-iy}}{2i}. \quad (5.5)$$

460 Le (5.3), (5.4) e (5.5) sono le *formule di Eulero*.

461 **Esercizio 5.4.** *Esprimere in forma algebrica il numero complesso $e^{i\pi}$.*

462 *Svolgimento.* Dalla (5.3): $e^{i\pi} = \cos \pi + i \sin \pi = -1$.

463 **Osservazione 5.5.** $e^{i\pi} + 1 = 0$.

464 La *forma esponenziale* del numero complesso α di modulo ρ e
465 argomento θ è

$$\alpha = \rho e^{i\theta}, \quad \rho, \theta \in \mathbb{R}, \quad \rho \geq 0. \quad (5.6)$$

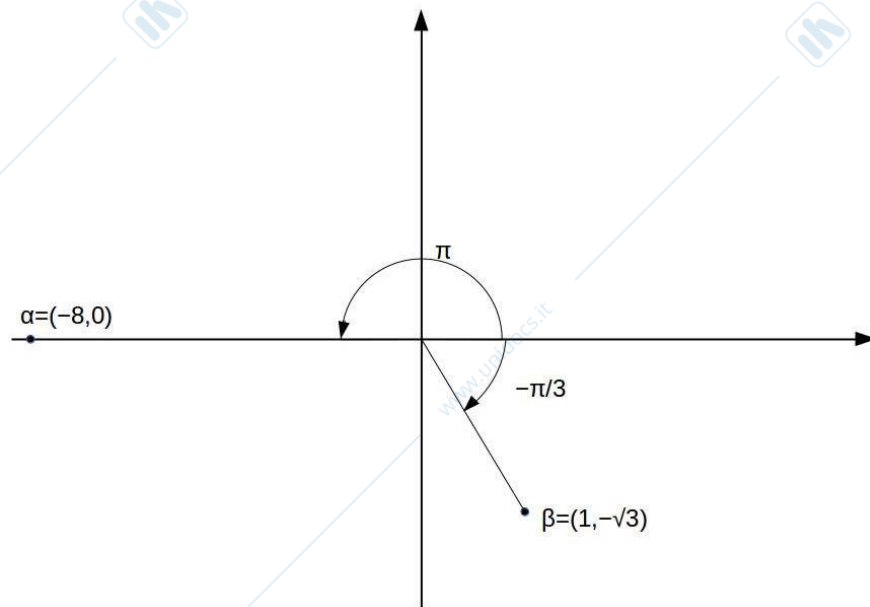
466
467 **Esercizio 5.6.** *Esprimere in forma esponenziale i numeri complessi*
468 $\alpha = -8$, $\beta = 1 - i\sqrt{3}$, $\gamma = \alpha/\beta^4$.

469 *Svolgimento.* Occorre calcolare modulo e argomento di α e β . Vale
470 $|\alpha| = 8$, l'argomento di α è π , quindi $\alpha = 8e^{i\pi}$.

Poi $|\beta| = \sqrt{1+3} = 2$, dalla formula $a = \rho \cos \theta$ deduco che
l'argomento θ di β soddisfa $\cos \theta = a/\rho = 1/2 \Rightarrow \beta = 2e^{-i\pi/3}$.

$$\begin{aligned} \gamma &= \frac{\alpha}{\beta^4} = \frac{8e^{i\pi}}{(2e^{-i\pi/3})^4} = \frac{8e^{i\pi}}{2^4 e^{-i\frac{4}{3}\pi}} = \\ &= \frac{1}{2} e^{i\pi + i\frac{4}{3}\pi} = \frac{1}{2} e^{i\frac{7}{3}\pi} = \frac{1}{2} e^{i\frac{\pi}{3}}. \end{aligned}$$

471 Per togliere la frazione ho usato la regola sugli esponenti, che in base
472 alla definizione di esponenziale complesso si motiva con il fatto che la
473 divisione tra numeri complessi dà luogo alla differenza degli argomenti.



474 Problema: risolvere l'equazione $z^n = \alpha$, dove $\alpha \in \mathbb{C}^*$, $n \in \mathbb{N}^*$ e
 475 l'incognita z è complessa.

476 Le soluzioni di tale equazione si chiamano *radici n-esime* di α .
 477 Esprimiamo α e l'incognita z in forma esponenziale:

$$\alpha = \rho e^{i\theta}, \quad z = \sigma e^{i\varphi}, \quad \rho, \theta, \sigma, \varphi \in \mathbb{R}, \quad \rho, \sigma > 0.$$

478 Vale:

$$z^n = \alpha \Leftrightarrow (\sigma e^{i\varphi})^n = \rho e^{i\theta} \Leftrightarrow \sigma^n e^{in\varphi} = \rho e^{i\theta};$$

479 l'ultima è un'equazione in due incognite reali σ, φ , equivalente a

$$\begin{cases} \sigma^n = \rho \\ n\varphi = \theta + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sigma = \sqrt[n]{\rho} \\ \varphi = \frac{\theta}{n} + \frac{2k\pi}{n}, \quad k \in \mathbb{Z}. \end{cases}$$

480 L'equazione di partenza ha come soluzioni i numeri complessi di mo-
 481 dulo $\sqrt[n]{\rho}$ e argomenti

$$\frac{\theta}{n}, \quad \frac{\theta}{n} + \frac{2\pi}{n}, \quad \frac{\theta}{n} + \frac{4\pi}{n}, \quad \dots, \quad \frac{\theta}{n} + \frac{2(n-1)\pi}{n}.$$

482 Abbiamo sostituito $k = 0, 1, \dots, n-1$. Gli altri valori di k danno luogo
 483 a ripetizioni degli stessi numeri complessi: ad es. $k = n$ dà $\frac{\theta}{n} + 2\pi$ che
 484 come argomento equivale a $\frac{\theta}{n}$; $k = n+1$ dà $\frac{\theta}{n} + \frac{2(n+1)\pi}{n} = \frac{\theta}{n} + \frac{2\pi}{n} + 2\pi$ che
 485 equivale a $\frac{\theta}{n} + \frac{2\pi}{n}$; eccetera. Concludendo le soluzioni sono esattamente
 486 n :

$$z_k = \sqrt[n]{\rho} e^{i\left(\frac{\theta}{n} + \frac{2k\pi}{n}\right)}, \quad k = 0, 1, \dots, n-1. \quad (5.7)$$

488 **Esercizio 5.7.** *Quante e quali sono le soluzioni complesse dell'equa-*
 489 *zione $x^3 = -8$?*

490 *Svolgimento.* Le soluzioni sono tre e si ottengono dalla (5.7) ponendovi
 491 $n = 3$, $\rho = |-8| = 8$, $\theta = \pi$ (cfr. eserc. 5.6). Otteniamo:

$$z_k = \sqrt[3]{8} e^{i\left(\frac{\pi}{3} + \frac{2k\pi}{3}\right)}, \quad k = 0, 1, 2.$$

492 **Esercizio 5.8.** *Esprimere in forma algebrica le soluzioni trovate e*
 493 *rappresentarle nel piano di Gauss.*

494 *Svolgimento.*

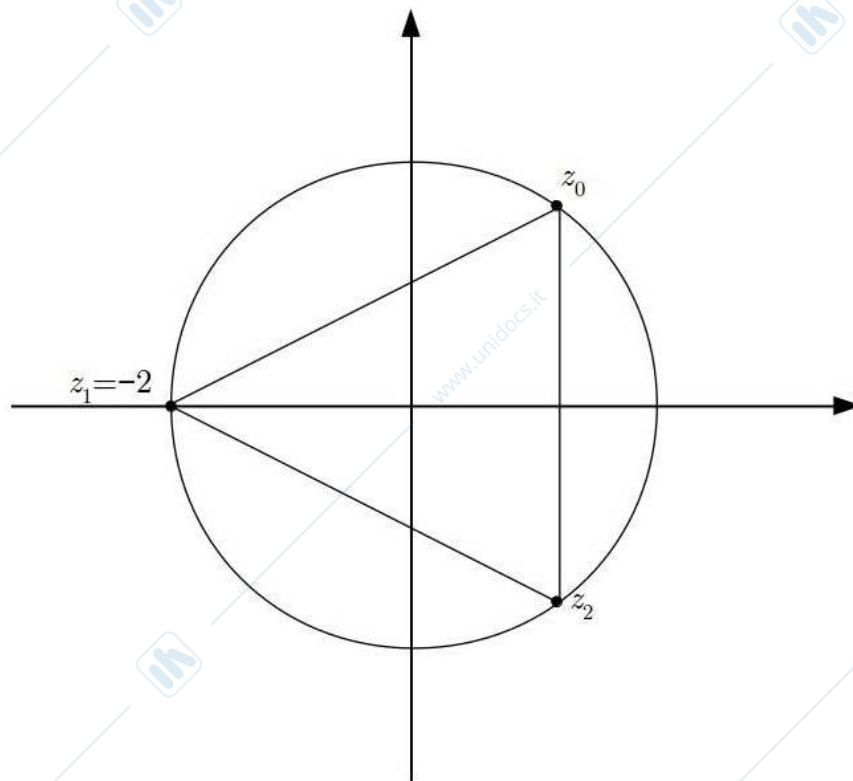
$$z_0 = 2e^{i\frac{\pi}{3}} = 2\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right) = 2\left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 1 + i\sqrt{3};$$

$$z_1 = 2e^{i\pi} = 2(\cos\pi + i\sin\pi) = -2;$$

$$z_2 = 2e^{i\frac{5}{3}\pi} = 2\left(\cos\left(\frac{5}{3}\pi\right) + i\sin\left(\frac{5}{3}\pi\right)\right) = 2\left(\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 1 - i\sqrt{3}.$$

495 *Esiste un procedimento "algebrico" per risolvere l'equazione $x^3 = -8$?*
 496 La risposta è affermativa. Vale

$$x^3 = -8 \Leftrightarrow x^3 + 8 = 0 \Leftrightarrow (x+2)(x^2 - 2x + 4) = 0.$$



497 L'equazione $x + 2 = 0$ ha soluzione $x = -2$. Risolvo $x^2 - 2x + 4 = 0$
 498 con la formula per le equazioni di secondo grado:

$$\frac{2 \pm \sqrt{-12}}{2} = \frac{2 \pm 2i\sqrt{3}}{2} = 1 \pm i\sqrt{3}.$$

499 Il simbolo $\sqrt{-12}$ non ha significato da solo, mentre $\pm\sqrt{-12}$ rappresenta
 500 l'insieme dei due numeri complessi il cui quadrato è -12 , ed essi sono
 501 $\pm i\sqrt{12} = \pm 2i\sqrt{3}$.

502 Dalla (5.7) deduciamo che le soluzioni di $z^n = \alpha$ hanno tutte lo
 503 stesso modulo (che nel piano complesso è la distanza da O) e argomenti
 504 uguali a θ/n , più multipli di un n -esimo di angolo giro. Quindi le

505 soluzioni di $z^n = \alpha$ si dispongono nel piano di Gauss come i vertici di
 506 un poligono regolare con n lati e centro in O .

507 Abbiamo visto che l'equazione complessa $z^n - \alpha = 0$ ha sempre solu-
 508 zioni; anzi, ne ha precisamente n . Vedremo che questa proprietà si ge-
 509 neralizza ad ogni equazione algebrica (un'equazione algebrica consiste
 510 in un polinomio uguagliato a zero) come conseguenza del

511 **Teorema 5.9** (Teorema fondamentale dell'Algebra). *Data l'equazione*
 512 *di grado n nell'incognita complessa z :*

$$a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \dots + a_1 z + a_0 = 0,$$

513 *dove $a_n, a_{n-1}, \dots, a_0 \in \mathbb{C}, a_n \neq 0, n > 0$, essa ha almeno una soluzione*
 514 *nel campo complesso.*

515 **Esercizio 5.10.** *Esprimere in forma algebrica le soluzioni dell'equa-*
 516 *zione $iz^2 + 2z - 2\sqrt{2} = 0$.*

517 *Svolgimento.*

$$z = \frac{-1 \pm \sqrt{1 + i2\sqrt{2}}}{i}.$$

A parte calcolo $\pm\sqrt{\Delta}$, cioè risolvo l'equazione $w^2 = 1 + i2\sqrt{2}$. Pongo
 $w = x + iy$ ($x, y \in \mathbb{R}$), quindi ottengo

$$\begin{aligned} (x + iy)^2 = 1 + i2\sqrt{2} &\Leftrightarrow x^2 - y^2 + i2xy = 1 + i2\sqrt{2} \\ \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - y^2 = 1 \\ 2xy = 2\sqrt{2} \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - y^2 = 1 \\ y = \frac{\sqrt{2}}{x} \end{cases} \Leftrightarrow \\ \begin{cases} x^2 - \frac{2}{x^2} = 1 \\ y = \frac{\sqrt{2}}{x} \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} x^4 - x^2 - 2 = 0 \\ y = \frac{\sqrt{2}}{x} \end{cases}. \end{aligned}$$

518 Dalla prima equazione $x^2 = (1 \pm 3)/2$, da cui $x^2 = 2$ o $x^2 = -1$.
 519 Siccome x è reale la seconda equazione non è accettabile, quindi $x =$

520 $\pm\sqrt{2}$, sostituendo si ottiene $y = \pm 1$ e infine $w = \pm(\sqrt{2} + i)$. Le
521 soluzioni dell'esercizio sono

$$z = \frac{-1 \pm (\sqrt{2} + i)}{i};$$

522 la prima è

$$z_1 = \frac{-1 + \sqrt{2} + i}{i} \cdot \frac{-i}{-i} = 1 + i(1 - \sqrt{2});$$

523 la seconda è

$$z_2 = \frac{-1 - \sqrt{2} - i}{i} \cdot \frac{-i}{-i} = -1 + i(1 + \sqrt{2}).$$

Lezione 6

Polinomi a coefficienti reali

528 *Il polinomio $P(x) = x^4 + 1$ può essere scomposto nel prodotto di due*
529 *polinomi a coefficienti reali e di grado minore di quattro?*

530 **Teorema 6.1** (Ruffini). *Sia K un campo e $\alpha \in K$. Se $P(x) = a_n x^n +$
531 $a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$ è un polinomio di grado $n > 0$ a coefficienti
532 $a_n, a_{n-1}, \dots, a_0 \in K$ e $P(\alpha) = 0$, allora esiste un polinomio $Q(x)$ a
533 coefficienti in K di grado $n - 1$ tale che $P(x) = (x - \alpha)Q(x)$.*

534 **Corollario 6.2** (corollario del Teorema fondamentale dell'Algebra).
535 *Ogni polinomio di grado $n > 0$ a coefficienti complessi si scompone nel*
536 *prodotto di n polinomi di primo grado a coefficienti complessi.*

537 *Dimostrazione.* Sia $P(z)$ il polinomio in questione. Per il Teorema fon-
538 *damentale dell'Algebra*, esiste $\alpha_1 \in \mathbb{C}$ tale che $P(\alpha_1) = 0$. Per il teo-
539 *rema di Ruffini*, esiste un polinomio $Q_1(z)$ di grado $n - 1$ a coefficienti

540 complessi tale che

$$P(z) = (z - \alpha_1)Q_1(z). \quad (6.1)$$

541 Se $n > 1$, si applica ancora il Teorema fondamentale dell'Algebra al-
542 l'equazione $Q_1(z) = 0$, da cui esiste $\alpha_2 \in \mathbb{C}$ tale che $Q_1(\alpha_2) = 0$, poi
543 (Ruffini)

$$Q_1(z) = (z - \alpha_2)Q_2(z), \quad (6.2)$$

544 dove $Q_2(z)$ ha grado $n - 2$. Si prosegue in questo modo ottenendo altre
545 $n - 2$ equazioni analoghe alle (6.1) e (6.2,) delle quali l'ultima è

$$Q_{n-1}(z) = (z - \alpha_n)Q_n(z), \quad (6.3)$$

546 dove $Q_n(z)$ è un polinomio di grado $n - n = 0$, cioè $Q_n(z) = c \neq 0$
547 costante. Combinando tutte le n equazioni si deduce

$$P(z) = (z - \alpha_1)(z - \alpha_2) \cdot \dots \cdot (z - \alpha_n)c. \quad (6.4)$$

548

□

549 Dalla (6.4) otteniamo che le soluzioni dell'equazione $P(z) = 0$ sono
550 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$. Diremo *radice* di un polinomio $P(x)$ a coefficienti in
551 K ogni $\alpha \in K$ tale che $P(\alpha) = 0$; chiameremo poi *molteplicità della*
552 *radice* α di $P(x)$, o anche *molteplicità della soluzione* α dell'equazione
553 $P(x) = 0$, il numero naturale m tale che $P(x) = (x - \alpha)^m Q(x)$ dove
554 $Q(x)$ è un polinomio tale che $Q(\alpha) \neq 0$. Con queste definizioni si ha

555 **Corollario 6.3.** *Ogni equazione algebrica di grado $n > 0$ a coefficienti*
556 *in \mathbb{C} ammette precisamente n soluzioni in \mathbb{C} , purché ciascuna sia*
557 *contata con la propria molteplicità.*

558 **Proposizione 6.4.** *Se $\alpha \in \mathbb{C}$ è una radice del polinomio $P(z) =$*
559 *$a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \dots + a_1 z + a_0$ a coefficienti reali (cioè $a_n, a_{n-1}, \dots,$*
560 *$a_0 \in \mathbb{R}$), allora anche $\bar{\alpha}$ è una radice di $P(z)$.*

561 *Dimostrazione.* Per ipotesi, $P(\alpha) = 0$. Ricordiamo le proprietà $\overline{\alpha + \beta} =$
 562 $\overline{\alpha} + \overline{\beta}$, $\overline{\alpha\beta} = \overline{\alpha}\overline{\beta}$, da cui $\overline{\alpha^n} = (\overline{\alpha})^n$ per $n \in \mathbb{N}$, e l'equivalenza
 563 $\alpha \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \alpha = \overline{\alpha}$. Vale allora

$$\begin{aligned} 0 &= \overline{0} = \overline{P(\alpha)} = \overline{a_n\alpha^n + a_{n-1}\alpha^{n-1} + \dots + a_1\alpha + a_0} = \\ &= \overline{a_n\alpha^n} + \overline{a_{n-1}\alpha^{n-1}} + \dots + \overline{a_1\alpha} + \overline{a_0} = \\ &= \overline{a_n} \cdot \overline{\alpha^n} + \overline{a_{n-1}} \cdot \overline{\alpha^{n-1}} + \dots + \overline{a_1} \cdot \overline{\alpha} + \overline{a_0} = \\ &= \overline{a_n}(\overline{\alpha})^n + \overline{a_{n-1}}(\overline{\alpha})^{n-1} + \dots + \overline{a_1} \cdot \overline{\alpha} + \overline{a_0} = \\ &\quad (\text{sfruttando } a_i \in \mathbb{R} \text{ per } i = 0, 1, \dots, n) \\ &= a_n(\overline{\alpha})^n + a_{n-1}(\overline{\alpha})^{n-1} + \dots + a_1\overline{\alpha} + a_0 = P(\overline{\alpha}). \end{aligned}$$

564

□

565 **Teorema 6.5.** *Se un polinomio $P(z)$ a coefficienti reali di grado $n > 0$*
 566 *non è divisibile per alcun polinomio di grado uno a coefficienti reali,*
 567 *allora esso è divisibile per un polinomio di grado due a coefficienti reali.*

568 *Dimostrazione.* Sia $P(z)$ un polinomio soddisfacente l'ipotesi di cui
 569 sopra. Per il Teorema fondamentale dell'Algebra, esiste $\alpha \in \mathbb{C}$ tale
 570 che $P(\alpha) = 0$. Se fosse $\alpha \in \mathbb{R}$, per il teorema di Ruffini $P(z)$ sarebbe
 571 divisibile per $z - \alpha$, a coefficienti reali, e ciò non è. Quindi $\alpha \notin \mathbb{R}$.
 572 Applicando il teorema di Ruffini si ottiene un'equazione nella forma

$$P(z) = (z - \alpha)Q(z) \quad (6.5)$$

573 con $Q(z)$ polinomio di grado $n-1$. Sostituiamo $z = \overline{\alpha}$ in tale equazione:
 574 $P(\overline{\alpha}) = (\overline{\alpha} - \alpha)Q(\overline{\alpha})$ da cui, per la prop. 6.4, $0 = (\overline{\alpha} - \alpha)Q(\overline{\alpha})$. Per
 575 l'oss. 5.1 vale $\overline{\alpha} \neq \alpha$; ne deduciamo $Q(\overline{\alpha}) = 0$. Riapplicando il teor. di
 576 Ruffini,

$$Q(z) = (z - \overline{\alpha})R(z), \quad (6.6)$$

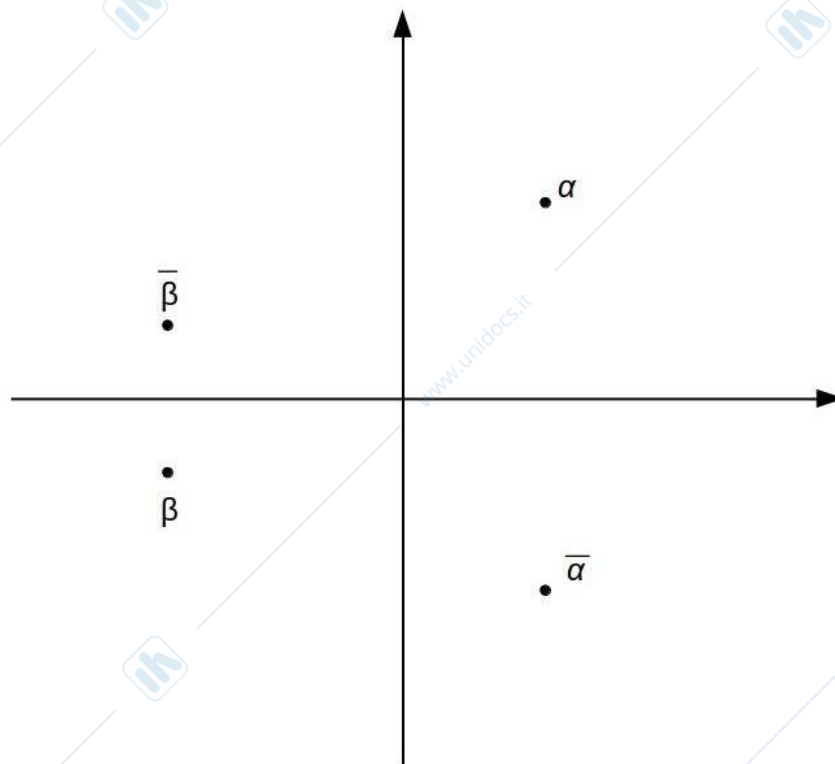


Figura 6.1: Le radici di un polinomio di quarto grado, privo di radici reali, sono a coppie complesse coniugate.

577 con $R(z)$ di grado $n - 2$. Combinando le due scomposizioni (6.5) e
578 (6.6):

$$P(z) = (z - \alpha)(z - \bar{\alpha})R(z) \Rightarrow P(z) = [z^2 - (\alpha + \bar{\alpha})z + \alpha\bar{\alpha}]R(z) \Rightarrow$$

$$\text{(cfr. (5.1), (5.2))} \Rightarrow P(z) = [z^2 - 2\Re(\alpha)z + |\alpha|^2]R(z). \quad (6.7)$$

579 Siccome il polinomio tra parentesi quadre è a coefficienti reali si ha la
580 tesi. \square

581 Per il teor. 6.5, ogni scomposizione di un polinomio a coefficienti

582 reali che contenga fattori di grado superiore a due può essere ulterior-
583 mente raffinata. Quindi vale il seguente:

584 **Teorema 6.6.** *Ogni polinomio a coefficienti reali si può esprimere*
585 *come prodotto di polinomi a coefficienti reali, ciascuno di grado non*
586 *superiore a due.*

587
588 *Risposta alla domanda iniziale.* Il teorema 6.6 dà risposta affermativa
589 alla domanda.

590 Troviamo esplicitamente la scomposizione; nell'equazione (6.7) ab-
591 biamo visto che se $P(\alpha) = 0$, allora un polinomio divisore a coefficienti
592 reali è $(z - \alpha)(z - \bar{\alpha})$. Risolviamo $x^4 + 1 = 0$, cioè $x^4 = -1$. Il numero
593 -1 in forma esponenziale è $e^{i\pi}$. Applichiamo la (5.7) con $n = 4$, $\rho = 1$,
594 $\theta = \pi$:

$$z_k = e^{i\left(\frac{\pi}{4} + \frac{2k\pi}{4}\right)}, \quad k = 0, 1, 2, 3.$$

$$z_0 = e^{i\frac{\pi}{4}} = \cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2} + i \frac{\sqrt{2}}{2},$$

$$z_1 = e^{i\frac{3}{4}\pi} = \cos \left(\frac{3}{4}\pi\right) + i \sin \left(\frac{3}{4}\pi\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2} + i \frac{\sqrt{2}}{2},$$

$$z_2 = e^{i\frac{5}{4}\pi} = \cos \left(\frac{5}{4}\pi\right) + i \sin \left(\frac{5}{4}\pi\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2} - i \frac{\sqrt{2}}{2} = \bar{z}_1,$$

$$z_3 = e^{i\frac{7}{4}\pi} = \cos \left(\frac{7}{4}\pi\right) + i \sin \left(\frac{7}{4}\pi\right) = \frac{\sqrt{2}}{2} - i \frac{\sqrt{2}}{2} = \bar{z}_0.$$

596 La scomposizione in polinomi a coefficienti reali si ottiene aggregando
597 le radici coniugate:

$$\begin{aligned}
 x^4 + 1 &= (x - z_0)(x - z_1)(x - \bar{z}_1)(x - \bar{z}_0) = \\
 &= [(x - z_0)(x - \bar{z}_0)][(x - z_1)(x - \bar{z}_1)] = \\
 &= \left[\left(x - \frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2} \right) \left(x - \frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2} \right) \right] \cdot \\
 &\quad \cdot \left[\left(x + \frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2} \right) \left(x + \frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2} \right) \right] = \\
 &= \left[\left(x - \frac{\sqrt{2}}{2} \right)^2 - \left(i\frac{\sqrt{2}}{2} \right)^2 \right] \left[\left(x + \frac{\sqrt{2}}{2} \right)^2 - \left(i\frac{\sqrt{2}}{2} \right)^2 \right] = \\
 &= \left(x^2 + \frac{1}{2} - \sqrt{2}x + \frac{1}{2} \right) \left(x^2 + \frac{1}{2} + \sqrt{2}x + \frac{1}{2} \right) = \\
 &= (x^2 - \sqrt{2}x + 1)(x^2 + \sqrt{2}x + 1).
 \end{aligned}$$

598 **Esercizio 6.7.** Esprimere in forma esponenziale $\alpha = 1/(-e^{i\theta})$, $\theta \in \mathbb{R}$.

599 *Svolgimento.*

$$\frac{1}{-e^{i\theta}} = -e^{-i\theta} = -(\cos(-\theta) + i \sin(-\theta)) = -\cos \theta + i \sin \theta.$$

600 Questo è un numero complesso di modulo $\sqrt{(-\cos \theta)^2 + (\sin \theta)^2} = 1$.

601 Il suo argomento φ soddisfa $a = \rho \cos \varphi$, $b = \rho \sin \varphi$, cioè

$$\begin{cases} \cos \varphi = -\cos \theta \\ \sin \varphi = \sin \theta. \end{cases}$$

602 Ora

$$\begin{aligned}
 \cos(\pi - \theta) &= \cos \pi \cos \theta + \sin \pi \sin \theta = -\cos \theta, \\
 \sin(\pi - \theta) &= \sin \pi \cos \theta - \cos \pi \sin \theta = \sin \theta,
 \end{aligned}$$

603 da cui un argomento è $\varphi = \pi - \theta$ e $\alpha = -e^{-i\theta} = e^{i(\pi - \theta)}$.

604 **Osservazione 6.8.** Si poteva raggiungere subito il risultato sfruttando
605 $e^{i\pi} = -1$:

$$-e^{-i\theta} = (-1)e^{-i\theta} = e^{i\pi}e^{-i\theta} = e^{i(\pi - \theta)}.$$

606 **Esercizio 6.9.** *Esprimere in forma algebrica il numero complesso*

$$\alpha = \left(-\cos\left(\frac{\pi}{8}\right) + i \sin\left(\frac{\pi}{8}\right) \right)^{12}.$$

607 *Svolgimento.*

$$\begin{aligned} \alpha &= \left[-\left(\cos\left(\frac{\pi}{8}\right) - i \sin\left(\frac{\pi}{8}\right) \right) \right]^{12} = \\ &= \left[\cancel{\left(\cos\left(-\frac{\pi}{8}\right) + i \sin\left(-\frac{\pi}{8}\right) \right)} \right]^{12} = \\ &= \left(e^{-i\frac{\pi}{8}} \right)^{12} = e^{-i\frac{3}{2}\pi} = e^{i\frac{\pi}{2}} = \\ &= \cos\frac{\pi}{2} + i \sin\frac{\pi}{2} = i. \end{aligned}$$

608 **Esercizio 6.10.** *Esprimere in forma algebrica la somma e il prodotto*
609 *delle due soluzioni della seguente equazione: $iz^2 + 2z - 2\sqrt{2} = 0$*

610 *Primo svolgimento (sconsigliato).* Si risolve l'equazione (cfr. eserc.
611 5.10). Le soluzioni sono

$$z_1 = 1 + i(1 - \sqrt{2}), \quad z_2 = -1 + i(1 + \sqrt{2}).$$

612 Sommando e moltiplicando, $z_1 + z_2 = 2i$ e

$$\begin{aligned} z_1 z_2 &= [i + (1 - i\sqrt{2})][i - (1 - i\sqrt{2})] = i^2 - (1 - i\sqrt{2})^2 = \\ &= -1 - 1 + 2 + i2\sqrt{2} = i2\sqrt{2}. \end{aligned}$$

613 *Secondo svolgimento (consigliato).* Per ogni equazione $az^2 + bz + c = 0$
614 le due radici soddisfano

$$z_1 + z_2 = -\frac{b}{a}, \quad z_1 z_2 = \frac{c}{a},$$

615 quindi

$$z_1 + z_2 = -\frac{2}{i} \cdot \frac{-i}{-i} = 2i,$$
$$z_1 z_2 = \frac{-2\sqrt{2}}{i} \cdot \frac{-i}{-i} = i2\sqrt{2}.$$

616

617 **Sfida 6.11.** È dato il sistema:

$$\begin{cases} x + y = \cos \theta \\ ix - iy = -\sin \theta, \end{cases} \quad (\theta \in \mathbb{R}).$$

618 Trasformare il sistema in equazione matriciale $AX = B$ e ricavarne le
619 soluzioni in forma esponenziale.

Lezione 7

Esercitazione sui numeri complessi

Esercizio 7.1. *Esprimere in forma algebrica il numero complesso*

$$\alpha = \frac{(\sqrt{3} - i)^{13}}{(-1 + i)^{25}}.$$

Svolgimento. Il numero complesso $\sqrt{3} - i$ ha modulo 2, argomento θ soddisfacente l'equazione $a = \rho \cos \theta \Leftrightarrow \sqrt{3} = 2 \cos \theta$ ed è nel quarto quadrante, quindi $\theta = -\pi/6$. Invece $-1 + i$ ha modulo $\sqrt{2}$, argomento φ soddisfacente $-1 = \sqrt{2} \cos \varphi$ nel secondo quadrante, quindi $\varphi = 3\pi/4$.

630 Ne segue

$$\begin{aligned}\alpha &= \frac{(2e^{-i\frac{\pi}{6}})^{13}}{(\sqrt{2}e^{i\frac{3}{4}\pi})^{25}} = \frac{2^{13}e^{-i\frac{13}{6}\pi}}{2^{\frac{25}{2}}e^{i\frac{75}{4}\pi}} = \frac{\sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{6}}}{e^{i\frac{3}{4}\pi}} = \frac{\sqrt{2}(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{i}{2})}{-\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}} = \\ &= \frac{\sqrt{6} - i\sqrt{2}}{-\sqrt{2} + i\sqrt{2}} \cdot \frac{-\sqrt{2} - i\sqrt{2}}{-\sqrt{2} - i\sqrt{2}} = \frac{-2\sqrt{3} - 2 + i(-2\sqrt{3} + 2)}{4} = \\ &= \frac{-\sqrt{3} - 1 + i(-\sqrt{3} + 1)}{2} = \frac{-\sqrt{3} - 1}{2} + i\frac{-\sqrt{3} + 1}{2}.\end{aligned}$$

631 **Esercizio 7.2.** Esprimere in forma algebrica le soluzioni della seguente
632 equazione nell'incognita complessa z :

$$z = \frac{iz + 1}{iz - 1}.$$

633 *Svolgimento.* Sotto la condizione $iz - 1 \neq 0$, equivalente a $z \neq 1/i = -i$,
634 eliminiamo il denominatore:

$$iz^2 - z - iz - 1 = 0 \Leftrightarrow iz^2 - (1 + i)z - 1 = 0.$$

635 La formula risolutiva dà

$$\frac{1 + i \pm \sqrt{2i + 4i}}{2i} = \frac{1 + i \pm \sqrt{3}(1 + i)}{2i} \cdot \frac{-2i}{-2i} = \frac{-2i + 2 \pm \sqrt{3}(-2i + 2)}{4},$$

636 quindi le soluzioni sono

$$\frac{1 + \sqrt{3}}{2} - i\frac{1 + \sqrt{3}}{2}, \quad \frac{1 - \sqrt{3}}{2} + i\frac{-1 + \sqrt{3}}{2},$$

637 entrambe accettabili.

638 **Esercizio 7.3.** Esprimere in forma algebrica le soluzioni della seguente
639 equazione nell'incognita complessa z : $z^3 = (\sqrt{2} - i\sqrt{2})^3$.

640 *Svolgimento.* Il modulo di $\alpha = \sqrt{2} - i\sqrt{2}$ è $\rho = \sqrt{2+2} = 2$, l'argomento
 641 è determinato da $a = \rho \cos \theta \Leftrightarrow \sqrt{2} = 2 \cos \theta$ con la considerazione
 642 aggiuntiva che il punto $(\sqrt{2}, -\sqrt{2})$ è nel quarto quadrante. Si ottiene
 643 $\theta = -\pi/4$. L'equazione da risolvere è quindi

$$z = \left(2e^{-i\frac{\pi}{4}}\right)^3 = 8e^{-i\frac{3}{4}\pi}.$$

644 Dalla formula (5.7), sostituendovi $n = 3$, $\rho = 8$, $\theta = -3\pi/4$ otteniamo
 645 le tre soluzioni

$$z_k = 2e^{-i\left(\frac{\pi}{4} + \frac{2k\pi}{3}\right)}, \quad k = 0, 1, 2.$$

646 Otteniamo:

$$z_0 = 2e^{-i\frac{\pi}{4}} = 2\left(\frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \sqrt{2} - i\sqrt{2},$$

$$\begin{aligned} z_1 &= 2e^{i\left(-\frac{\pi}{4} + \frac{2\pi}{3}\right)} = 2\left[\cos\left(-\frac{\pi}{4} + \frac{2\pi}{3}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{4} + \frac{2\pi}{3}\right)\right] = \\ &= 2\left[-\frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + i\left(\frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}\right)\right] = \\ &= \frac{-\sqrt{2} + \sqrt{6}}{2} + i\frac{\sqrt{2} + \sqrt{6}}{2}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} z_2 &= 2e^{i\left(-\frac{\pi}{4} + \frac{4\pi}{3}\right)} = 2\left[\cos\left(-\frac{\pi}{4} + \frac{4\pi}{3}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{4} + \frac{4\pi}{3}\right)\right] = \\ &= 2\left[-\frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + i\left(\frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}\right)\right] = \\ &= \frac{-\sqrt{2} - \sqrt{6}}{2} + i\frac{\sqrt{2} - \sqrt{6}}{2}. \end{aligned}$$

647 **Esercizio 7.4.** Esprimere in forma algebrica le soluzioni della seguente
 648 equazione nell'incognita complessa z : $z^3 = (1 + 2i)^3$.

649 Siccome in questo caso l'argomento non è un arco noto, applichiamo
650 la seguente proposizione:

651 **Proposizione 7.5.** *Si indichino con u_0, u_1, \dots, u_{n-1} le soluzioni com-*
652 *plesse dell'equazione $u^n = 1$. Se w è una qualsiasi soluzione dell'equa-*
653 *zione $z^n = \alpha$, allora tutte le soluzioni di $z^n = \alpha$ sono $wu_0, wu_1, \dots,$*
654 *wu_{n-1} .*

655 Nel caso dell'esercizio si ha $n = 3$, quindi

$$u_0 = 1, \quad u_1 = e^{i2\pi/3} = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}, \quad u_2 = e^{i4\pi/3} = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

656 È poi evidente che una soluzione dell'equazione assegnata è $w = 1 + 2i$.
657 Applicando quindi la prop. 7.5 otteniamo che le soluzioni sono:

$$\begin{aligned} wu_0 &= 1 + 2i, \\ wu_1 &= (1 + 2i) \frac{-1 + i\sqrt{3}}{2} = \frac{-1 + i\sqrt{3} - 2i - 2\sqrt{3}}{2} = \\ &= \frac{-1 - 2\sqrt{3}}{2} + i \frac{\sqrt{3} - 2}{2}, \\ wu_2 &= (1 + 2i) \frac{-1 - i\sqrt{3}}{2} = \frac{-1 - i\sqrt{3} - 2i + 2\sqrt{3}}{2} = \\ &= \frac{-1 + 2\sqrt{3}}{2} + i \frac{-\sqrt{3} - 2}{2}. \end{aligned}$$

658 **Esercizio 7.6.** *Risolvere l'esercizio 7.3 con il metodo dell'esercizio 7.4.*

659 **Esercizio 7.7.** *Esprimere in forma algebrica la somma e il prodotto*
660 *delle soluzioni della seguente equazione nell'incognita complessa z :*

$$2e^{i\frac{2}{3}\pi} z^2 - z - 2e^{i\frac{\pi}{3}} = 0.$$

Svolgimento. La somma e il prodotto delle soluzioni dell'equazione $az^2 + bz + c = 0$ ($a \neq 0$) sono, rispettivamente, $-b/a$ e c/a . Quindi la somma delle soluzioni è

$$\begin{aligned} \frac{1}{2e^{i\frac{2}{3}\pi}} &= \frac{e^{-i\frac{2}{3}\pi}}{2} = \frac{1}{2} \left[\cos\left(-\frac{2}{3}\pi\right) + i \sin\left(-\frac{2}{3}\pi\right) \right] = \\ &= \frac{1}{2} \left(-\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2} \right) = -\frac{1}{4} - i\frac{\sqrt{3}}{4}. \end{aligned}$$

Il prodotto è

$$\begin{aligned} \frac{-2e^{i\frac{\pi}{3}}}{2e^{i\frac{2}{3}\pi}} &= -e^{-i\frac{\pi}{3}} = -\left(\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) + i \sin\left(-\frac{\pi}{3}\right) \right) = \\ &= -\left(\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2} \right) = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}. \end{aligned}$$

661 **Esercizio 7.8.** (i) Esprimere in forma algebrica le soluzioni dell'e-
662 quazione $z^3 = i$ nell'incognita complessa z . (ii) Esprimere in forma
663 algebrica le soluzioni dell'equazione $(x - 2)^3 = i(x + i)^3$ nell'incognita
664 complessa x .

665 *Svolgimento.* (i) Esprimendo i in forma esponenziale, l'equazione equi-
666 vale a $z^3 = e^{i\pi/2}$. Dalla formula (5.7) con $n = 3$, $\rho = 1$ e $\theta = \pi/2$
667 risulta

$$z_k = e^{i\left(\frac{\pi}{6} + \frac{2k\pi}{3}\right)}, \quad k = 0, 1, 2,$$

668 da cui

$$\begin{aligned} z_0 &= e^{i\frac{\pi}{6}} = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{i}{2}; \\ z_1 &= e^{i\frac{5}{6}\pi} = -\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{i}{2}; \\ z_2 &= e^{i\frac{3}{2}\pi} = -i. \end{aligned}$$

669 (ii) $x = -i$ non è una soluzione, quindi si può dividere per $(x + i)^3$
 670 e l'equazione equivale a

$$\left(\frac{x-2}{x+i}\right)^3 = i,$$

671 ponendo $z = (x-2)/(x+i)$ essa si trasforma in $z^3 = i$, risolta al punto
 672 precedente. Quindi le soluzioni si ottengono da

$$\frac{x-2}{x+i} = z_k, \quad k = 0, 1, 2.$$

Per $k = 0$,

$$\begin{aligned} \frac{x-2}{x+i} &= \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{i}{2} \Leftrightarrow 2x - 4 = (x+i)(\sqrt{3} + i) \\ &\Leftrightarrow (2 - \sqrt{3} - i)x = 4 + i\sqrt{3} - 1. \end{aligned}$$

673 Ricaviamo dunque

$$\begin{aligned} x &= \frac{3 + i\sqrt{3}}{2 - \sqrt{3} - i} \cdot \frac{2 - \sqrt{3} + i}{2 - \sqrt{3} + i} = \frac{6 - 3\sqrt{3} - \sqrt{3} + i(3 + 2\sqrt{3} - 3)}{8 - 4\sqrt{3}} = \\ &= \frac{3 - 2\sqrt{3}}{4 - 2\sqrt{3}} + i \frac{\sqrt{3}}{4 - 2\sqrt{3}}. \end{aligned} \quad (7.1)$$

Stesso procedimento con $k = 1$:

$$\begin{aligned} \frac{x-2}{x+i} &= -\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{i}{2} \Leftrightarrow 2x - 4 = (x+i)(-\sqrt{3} + i) \\ &\Leftrightarrow (2 + \sqrt{3} - i)x = 4 - i\sqrt{3} - 1. \end{aligned}$$

674 Ricaviamo

$$\begin{aligned} x &= \frac{3 - i\sqrt{3}}{2 + \sqrt{3} - i} \cdot \frac{2 + \sqrt{3} + i}{2 + \sqrt{3} + i} = \frac{6 + 3\sqrt{3} + \sqrt{3} + i(3 - 2\sqrt{3} - 3)}{8 + 4\sqrt{3}} = \\ &= \frac{3 + 2\sqrt{3}}{4 + 2\sqrt{3}} - i \frac{\sqrt{3}}{4 + 2\sqrt{3}}. \end{aligned} \quad (7.2)$$

Infine, con $k = 2$,

$$\begin{aligned} \frac{x-2}{x+i} = -i &\Leftrightarrow x-2 = -ix+1 \Leftrightarrow (1+i)x = 3 \\ &\Leftrightarrow x = \frac{3}{1+i} \cdot \frac{1-i}{1-i} = \frac{3}{2} - i\frac{3}{2}. \end{aligned} \quad (7.3)$$

Le soluzioni cercate sono (7.1), (7.2) e (7.3).

Esercizio 7.9. È dato il polinomio $P(z) = z^4 + z^3 + z^2 + 2$. (i) Esprimere in forma algebrica $P(\sqrt{2}e^{-i\frac{3}{4}\pi})$. (ii) Trovare un polinomio a coefficienti reali, divisore di $P(z)$ e di grado minore di quattro.

Svolgimento. (i)

$$\begin{aligned} P(\sqrt{2}e^{-i\frac{3}{4}\pi}) &= 4e^{-i3\pi} + 2\sqrt{2}e^{-i\frac{9}{4}\pi} + 2e^{-i\frac{3}{2}\pi} + 2 = \\ &= 4e^{-i\pi} + 2\sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}} + 2e^{i\frac{\pi}{2}} + 2 = 4(-1) + 2\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) + 2i + 2 \\ &= -4 + 2 - 2i + 2i + 2 = 0. \end{aligned}$$

(ii) Ricordiamo che se $\alpha \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ è una radice del polinomio a coefficienti reali $P(z)$, allora $P(z)$ è divisibile per $z^2 - (\alpha + \bar{\alpha})z + \alpha\bar{\alpha}$, che è a coefficienti reali. Sappiamo che $\alpha = \sqrt{2}e^{-i\frac{3}{4}\pi}$ è radice di $P(z)$. In forma algebrica,

$$\alpha = \sqrt{2}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = -1 - i.$$

Un polinomio divisore di $P(z)$ è:

$$\begin{aligned} Q(z) &= z^2 - (-1 - i - 1 + i)z + (-1 - i)(-1 + i) = \\ &= z^2 + 2z + 2. \end{aligned}$$

684 **Osservazione 7.10.** Volendo proprio trovare la scomposizione di $P(z)$,
 685 si può dividere $P(z)$ per $z - \alpha$, poi il quoziente ancora per $z - \bar{\alpha}$. La
 686 divisione per $z - (-1 - i)$ si rappresenta come segue:

$$\begin{array}{r|rrrr|r} -1-i & 1 & 1 & 1 & 0 & 2 \\ & & -1-i & -1+i & 1-i & -2 \\ \hline & 1 & -i & i & 1-i & // \end{array}$$

687 da cui $(z^4 + z^3 + z^2 + 2) : [z - (-1 - i)] = z^3 - iz^2 + iz + 1 - i$. Ora
 688 dividiamo il quoziente $z^3 - iz^2 + iz + 1 - i$ per $z - (-1 + i)$:

$$\begin{array}{r|rrr|r} -1+i & 1 & -i & i & 1-i \\ & & -1+i & 1-i & -1+i \\ \hline & 1 & -1 & 1 & // \end{array}$$

689 Quindi $(z^3 - iz^2 + iz + 1 - i) : [z - (-1 + i)] = z^2 - z + 1$. Concludendo,
 690 $P(z) = (z^2 + 2z + 2)(z^2 - z + 1)$.

691 **Esercizio 7.11.** (i) Trovare il valore del numero complesso α tale che
 692 il polinomio $P(z) = z^4 - 4z^3 + 11z^2 - 14z + \alpha$ ammetta $1 - 2i$ come
 693 radice. (ii) Per tale valore di α esprimere in forma algebrica le altre
 694 radici di $P(z)$.

695 *Svolgimento.* (i) Supponiamo che $\beta = 1 - 2i$ sia una radice: quindi
 696 $P(z)$ è divisibile per $z - \beta$. Calcoliamo il quoziente della divisione:

$$\begin{array}{r|rrrr|r} 1-2i & 1 & -4 & 11 & -14 & \alpha \\ & & 1-2i & -7+4i & 12-4i & -10 \\ \hline & 1 & -3-2i & 4+4i & -2-4i & // \end{array}$$

697 Quindi $\alpha = 10$.

698 (ii) Essendo il polinomio a coefficienti reali, un'altra radice è $\bar{\beta} =$
 699 $1 + 2i$. Dividendo il quoziente della precedente divisione:

$$\begin{array}{r|rrr|r} 1+2i & 1 & -3-2i & 4+4i & -2-4i \\ & & 1+2i & -2-4i & 2+4i \\ \hline & 1 & -2 & 2 & // \end{array}$$

700 Vale quindi $P(z) = (z - 1 + 2i)(z - 1 - 2i)(z^2 - 2z + 2)$. Il polinomio
 701 $z^2 - 2z + 2$ ha radici $1 \pm \sqrt{-1} = 1 \pm i$. Concludendo, le quattro radici
 702 sono $1 \pm 2i$ e $1 \pm i$.

703 **Esercizio 7.12.** *Scomporre il polinomio $P(z) = z^4 - 2z^2 + 4$ nel*
 704 *prodotto di polinomi a coefficienti reali irriducibili.*

705 **Esercizio 7.13.** *Esprimere in forma algebrica le soluzioni della se-*
 706 *guente equazione nell'incognita complessa z :*

$$z^3 = \left(\frac{1+i}{\sqrt{3}+i} \right)^3.$$

707 **Esercizio 7.14.** *Esprimere in forma algebrica il numero complesso*

$$\alpha = \frac{1}{\left[-\cos\left(\frac{\pi}{12}\right) + i \sin\left(\frac{\pi}{12}\right) \right]^{100}}.$$

708 **Esercizio 7.15.** *Esprimere in forma algebrica le soluzioni della se-*
 709 *guente equazione nell'incognita complessa z :*

$$\left(i + \frac{1}{z} \right)^2 = 3 + 4i.$$

710 **Esercizio 7.16.** (i) *Determinare i numeri complessi $a + ib$, $a, b \in \mathbb{R}$,*
 711 *tali che $(a+ib)^3 - i^3 = 0$. (ii) *Esprimere in forma algebrica le soluzioni*
 712 *della seguente equazione nell'incognita complessa z :**

$$\left(i - \frac{1}{z} \right)^3 - i^3 = 0.$$

713 **Esercizio 7.17.** *Trovare $a \in \mathbb{C}$ tale che $z = -i$ sia radice del polinomio*
 714 *$P(z) = z^3 - z^2 + z + 1 + a$. Per tale valore di a scomporre $P(z)$ nel*
 715 *prodotto di polinomi irriducibili a coefficienti reali e nel prodotto di*
 716 *polinomi irriducibili a coefficienti complessi.*

Lezione 8

Spazi vettoriali

Cos'è un vettore?

8.1 Relazioni d'equivalenza

Definizione 8.1. Una *relazione* in un insieme A è un sottoinsieme \sim^1 di $A \times A$.

Notazioni 8.2. Anziché $(x, y) \in \sim$ si scrive $x \sim y$ (si legge “ x è in relazione tilde con y ”) e se invece $(x, y) \notin \sim$ si scrive $x \not\sim y$.

Esempio 8.3. Una relazione in \mathbb{Z} è

$$\approx = \{(x, y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \mid \exists k \in \mathbb{Z} : x - y = 2k\}.$$

Risulta: $13 \approx 7$, $18 \not\approx 7$, $-1 \approx 7$, ...

¹Si legge “tilde”.

730 **Definizione 8.4.** Una relazione \sim in un insieme A si dice *relazione*
731 *d'equivalenza* se soddisfa le seguenti proprietà:

732 (i) riflessiva, $\forall x \in A : x \sim x$,

733 (ii) simmetrica, $\forall x, y \in A : (x \sim y \Rightarrow y \sim x)$,

734 (iii) transitiva $\forall x, y, z \in A : (x \sim y \wedge y \sim z \Rightarrow x \sim z)$.

735 **Esempio 8.5.** La relazione " \leq " in \mathbb{R} è riflessiva e transitiva, ma non
736 simmetrica, quindi " \leq " non è una relazione d'equivalenza.

737 **Esempio 8.6.** La relazione " \approx " sopra definita è d'equivalenza, infatti:

738 (i) $\forall x \in \mathbb{Z}$ vale $x - x = 2 \cdot 0$, quindi $x \approx x$.

739 (ii) Supponiamo $x \approx y$, $x, y \in \mathbb{Z}$. Ciò implica $x - y = 2k$ con $k \in \mathbb{Z}$.
740 Ne segue $y - x = 2(-k)$ e siccome $-k \in \mathbb{Z}$ vale $y \approx x$.

741 (iii) Supponiamo $x \approx y$, $y \approx z$, $x, y, z \in \mathbb{Z}$. Quindi $\exists k_1, k_2 \in \mathbb{Z}$ tali
742 che $x - y = 2k_1$, $y - z = 2k_2$. Sommando le due equazioni si ricava
743 $x - z = 2(k_1 + k_2)$ e siccome $k_1 + k_2 \in \mathbb{Z}$ vale $x \approx z$.

744 **Definizione 8.7.** Data una relazione d'equivalenza " \sim " in A e $x \in A$,
745 la *classe d'equivalenza di x rispetto a \sim* è

$$[x]_{\sim} = \{y \in A \mid y \sim x\}.$$

746 **Esempio 8.8.** Descriviamo gli elementi di $[7]_{\approx}$ per tentativi:

$$0 \not\approx 7, 1 \approx 7, 2 \not\approx 7, 3 \approx 7, \dots, -1 \approx 7, -2 \not\approx 7, \dots$$

747 quindi $[7]_{\approx} = \{1, -1, 3, -3, \dots\}$ è l'insieme dei numeri dispari.

748 **Osservazione 8.9.** $[7]_{\approx} = [1]_{\approx}$.

749 **Osservazione 8.10.** L'osservazione precedente si generalizza nella se-
750 guente:

751 **Proposizione 8.11.** Sia \sim una relazione d'equivalenza in un insieme
 752 A e $x, y \in A$. Se $x \sim y$, allora $[x]_{\sim} = [y]_{\sim}$; se invece $x \not\sim y$, allora
 753 $[x]_{\sim} \cap [y]_{\sim} = \emptyset$.

754 Dunque, le classi d'equivalenza rispetto a una relazione d'equiva-
 755 lenza in A formano una *partizione* di A , cioè una collezione di insiemi
 756 a due a due disgiunti, la cui unione è A stesso.

757 **Osservazione 8.12.** Ogni insieme A ha due relazioni d'equivalenza
 758 *banali*:

- 759 1) la *relazione identica* \sim_I , definita da $x \sim_I y$ se, e solo se, $x = y$;
- 760 2) la *relazione totale* \sim_T , definita da $x \sim_T y \forall x, y \in A$.

761 8.1.1 Similitudine tra matrici

762 **Definizione 8.13.** Date due matrici $A, B \in \mathcal{M}(n \times n, K)$, si dice che
 763 A è simile a B se esiste $C \in \mathcal{M}(n \times n, K)$ invertibile tale che

$$C^{-1}AC = B. \quad (8.1)$$

764 **Proposizione 8.14.** La relazione di similitudine in $\mathcal{M}(n \times n, K)$ è
 765 una relazione d'equivalenza.

766 *Dimostrazione.* Denotiamo l'affermazione “ A è simile a B ” con $A \sim B$.

767 (i) I_n è invertibile e $I_n^{-1} = I_n$; ponendo $C = I_n$, si ottiene $C^{-1}AC =$
 768 $I_n A I_n = A$, da cui $A \sim A$ per ogni $A \in \mathcal{M}(n \times n, K)$.

769 (ii) Consideriamo $A, B \in \mathcal{M}(n \times n, K)$ tali che $A \sim B$; cioè vale
 770 la (8.1). Poniamo $D = C^{-1}$, moltiplichiamo la (8.1) a sinistra per
 771 $D^{-1} = C$ e a destra per D , ottenendo $(D^{-1}C^{-1})A(CD) = D^{-1}BD$
 772 $\Rightarrow I_n A I_n = D^{-1}BD \Rightarrow D^{-1}BD = A$, da cui $B \sim A$.

773 (iii) Consideriamo $A, B, D \in \mathcal{M}(n \times n, K)$ tali che $A \sim B$ e $B \sim D$;
 774 cioè valgono la (8.1) e

$$E^{-1}BE = D, \quad (8.2)$$

775 dove $E \in \mathcal{M}(n \times n, K)$ è invertibile. Sostituiamo $B = C^{-1}AC$ nella
 776 (8.2):

$$E^{-1}C^{-1}ACE = D \Rightarrow (CE)^{-1}A(CE) = D$$

777 da cui $A \sim D$. □

778 **Sfida 8.15.** Stabilire se le due matrici reali seguenti sono simili:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$$

779 *Suggerimento.* Applicare la def. (8.1) nella sua forma equivalente: $AC =$
 780 CB dove $C = \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}$ è invertibile.

8.1.2 Equipollenza tra segmenti orientati

782 **Definizione 8.16.** Un *segmento orientato* nello spazio è una coppia
 783 ordinata di punti (P, Q) .

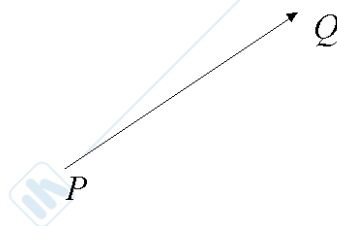



Figura 8.1: Rappresentazione del segmento orientato (P, Q) .

784  Un segmento orientato è anche detto *vettore applicato*, ma non si
785 tratta di un vettore nel senso che preciseremo.

786 **Osservazione 8.17.** $(P, Q) = (Q, P)$ se, e solo se, $P = Q$.

787 **Definizione 8.18.** Due segmenti orientati (P, Q) e (R, S) si dicono
788 *equipollenti* se $PQRS$ è un parallelogramma (eventualmente degenere).

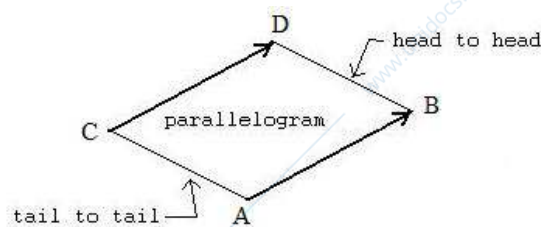



Figura 8.2: I segmenti orientati (A, B) e (C, D) sono equipollenti.

789 **Proposizione 8.19.** *L'equipollenza è una relazione d'equivalenza.*

790 **Definizione 8.20.** Un *vettore geometrico* (o *vettore libero*) è una classe
791 d'equivalenza rispetto alla relazione di equipollenza.

792 **Notazione 8.21.** Il vettore geometrico individuato da (P, Q) si denota
793 con \overrightarrow{PQ} .

794 Per definizione di classe di equivalenza, \overrightarrow{PQ} è l'unione di tutti i
795 segmenti orientati equipollenti a (P, Q) .

796  Nella fig. 8.2, i segmenti orientati (A, B) e (C, D) sono equi-
797 pollenti (ma diversi), mentre \overrightarrow{AB} e \overrightarrow{CD} sono *lo stesso vettore*.

798 **Proposizione 8.22.** *Per ogni vettore geometrico \mathbf{v} e ogni punto P ,*
799 *esiste un unico punto Q tale che $\mathbf{v} = \overrightarrow{PQ}$.*

800 **Notazione 8.23.** \mathcal{V} denota l'insieme di tutti i vettori geometrici dello
801 spazio.

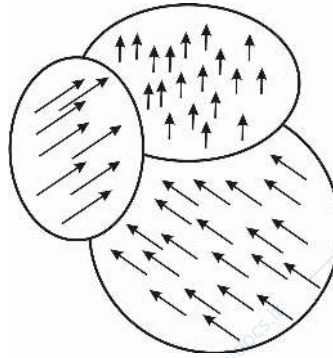


Figura 8.3: Un vettore è un insieme di infiniti segmenti orientati equipollenti.

8.2 Spazi vettoriali

Nel seguito avremo a che fare con la nozione di *n-pla ordinata di numeri reali* (dove $n \in \mathbb{N}^*$):

$$(x_1, x_2, \dots, x_n), \quad x_i \in \mathbb{R}, \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (8.3)$$

Si tratta di una lista di n numeri reali presi in ordine. Ad esempio, per $n = 3$, vale $(1, 1, 2) \neq (1, 2, 1)$. x_1, x_2, \dots, x_n si chiamano *componenti* della *n-pla* (8.3).

Usiamo il termine *componenti* e non *coordinate*, che avrà un altro significato.

Per $n = 2, 3, 4$ si parla rispettivamente di coppie, terne, quaterne ordinate di numeri reali.

Definizione 8.24. $\mathbb{R}^n = \{(x_1, x_2, \dots, x_n) \mid x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}\}$ è l'insieme di tutte le *n-plesse* ordinate di numeri reali.

Definizione 8.25. Un *vettore* di \mathbb{R}^n è un qualsiasi elemento di \mathbb{R}^n .

815 Definiamo ora delle operazioni in \mathbb{R}^n . Fissiamo

$$\mathbf{v} = (x_1, x_2, \dots, x_n), \quad \mathbf{w} = (y_1, y_2, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n.$$

816 **Definizione 8.26.** La *somma* di \mathbf{v} e \mathbf{w} è $\mathbf{v} + \mathbf{w} = (x_1 + y_1, x_2 +$
817 $y_2, \dots, x_n + y_n)$.

818 **Definizione 8.27.** Il *vettore nullo* di \mathbb{R}^n è $\mathbf{0} = (0, 0, \dots, 0)$.

819 **Definizione 8.28.** Il *vettore opposto* di \mathbf{v} è $-\mathbf{v} = (-x_1, -x_2, \dots, -x_n)$.

820 **Definizione 8.29.** La *differenza* di \mathbf{w} e \mathbf{v} è $\mathbf{w} - \mathbf{v} = \mathbf{w} + (-\mathbf{v})$, quindi
821 $\mathbf{w} - \mathbf{v} = (y_1 - x_1, y_2 - x_2, \dots, y_n - x_n)$.

822 **Definizione 8.30.** Chiameremo *scalare* ogni elemento di \mathbb{R} .

823 **Definizione 8.31.** Il *prodotto esterno* di uno scalare h per il vettore
824 \mathbf{v} è il vettore $h\mathbf{v} = (hx_1, hx_2, \dots, hx_n)$.

825 **Proposizione 8.32.** Per ogni scelta dei vettori e degli scalari coinvolti
826 valgono le equazioni:

$$\begin{aligned} (\mathbf{v} + \mathbf{w}) + \mathbf{u} &= \mathbf{v} + (\mathbf{w} + \mathbf{u}); & \mathbf{v} + (-\mathbf{v}) &= \mathbf{0}; & h(\mathbf{v} + \mathbf{w}) &= h\mathbf{v} + h\mathbf{w}; \\ (-h)\mathbf{v} &= -(h\mathbf{v}); & h\mathbf{0} &= \mathbf{0}; & \mathbf{v} + \mathbf{0} &= \mathbf{v}; & \mathbf{v} + \mathbf{w} &= \mathbf{w} + \mathbf{v}; \\ (h + k)\mathbf{v} &= h\mathbf{v} + k\mathbf{v}; & 1\mathbf{v} &= \mathbf{v}; & 0\mathbf{v} &= \mathbf{0}; & (hk)\mathbf{v} &= h(k\mathbf{v}). \end{aligned} \tag{8.4}$$

827 **Definizione 8.33.** Uno *spazio vettoriale* costruito su K è una quaterna
828 ordinata $(V, K, +, \omega)$, dove

- 829 1) V è un insieme non vuoto, i cui elementi si diranno *vettori*;
- 830 2) K è un campo, i cui elementi si diranno *scalari*;
- 831 3) “+” è un’operazione binaria in V , detta *somma di vettori*;

- 832 4) $\omega : K \times V \rightarrow V$ è una funzione detta *prodotto esterno*; useremo la
 833 notazione $h\mathbf{v}$ per $\omega(h, \mathbf{v})$;
- 834 5) sono fissati un *vettore nullo* $\mathbf{0}$ e per ogni $\mathbf{v} \in V$ un *vettore opposto*
 835 $-\mathbf{v}$;
- 836 6) valgono tutte le proprietà (8.4).

837 **Notazione 8.34.** Uno spazio vettoriale costruito su K si denota anche
 838 con V_K (sottintendendo $+$ e ω).

839 **Definizione 8.35.** Ogni $V_{\mathbb{R}}$ si dice *spazio vettoriale reale*. Ogni $V_{\mathbb{C}}$ si
 840 dice *spazio vettoriale complesso*.

841 8.2.1 Esempi di spazio vettoriale

842 Per definire un nuovo spazio vettoriale occorre dare gli oggetti numerati
 843 da 1) a 5) nella definizione e verificare la validità di tutte le proprietà
 844 (8.4).

845 **Esempio 8.36.** Posto $V = \mathbb{R}^n$ e $K = \mathbb{R}$, con le operazioni definite
 846 nelle definizioni 8.26 e 8.31 le proprietà (8.4) sono soddisfatte, quindi
 847 otteniamo uno spazio vettoriale reale.

Esempio 8.37. Definiamo $V = C^0(\mathbb{R})$, che è l'insieme di tutte le
 funzioni continue su \mathbb{R} e $K = \mathbb{R}$. Somma e prodotto esterno sono
 definite come segue:

$$f + g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} : x \mapsto f(x) + g(x), \quad \forall f, g \in C^0(\mathbb{R});$$

$$cf : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} : x \mapsto cf(x), \quad \forall c \in \mathbb{R}, \forall f \in C^0(\mathbb{R}).$$

848 Come vettore nullo definiamo la funzione costante

$$\mathbf{0} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} : x \mapsto 0$$

849 e il vettore opposto di $f \in C^0(\mathbb{R})$ è

$$-f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} : x \mapsto -f(x).$$

850 Valgono le (8.4). Ne otteniamo uno spazio vettoriale in cui i vettori
851 sono funzioni.

852
853 *Risposta alla domanda iniziale.* La nozione di vettore ha senso nel
854 contesto di uno spazio vettoriale, che è una quaterna $(V, K, +, \omega)$ sod-
855 disfacente determinati assiomi. Un vettore di un tale spazio vettoriale
856 è un elemento dell'insieme V . Spazi vettoriali diversi hanno in generale
857 vettori diversi.

www.unidocs.it

www.unidocs.it

www.



www.unidocs.it

www.unidocs.it



www.unidocs.it

www.unidocs.it



www.unidocs.it

www.unidocs.it

Lezione 9

Sottospazi

Cosa si può dire a priori dell'insieme delle soluzioni del seguente sistema lineare?

$$\begin{cases} x + y - 2z = 0 \\ 2x - y - z = 0 \\ -3y + 3z = 0 \end{cases}$$

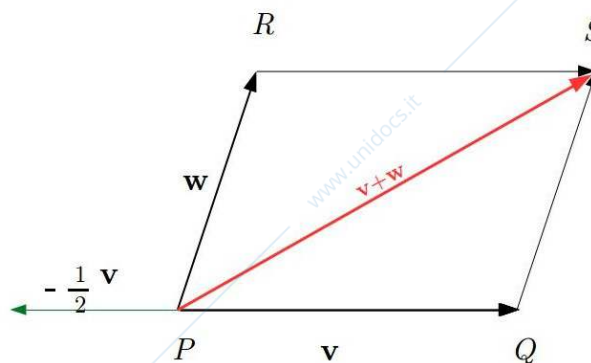
Proseguiamo con altri esempi di spazio vettoriale.

Esempio 9.1. Sia K un campo, $m, n \in \mathbb{N}^*$ e $V = \mathcal{M}(m \times n, K)$. Come somma e prodotto esterno prendiamo quelli definiti a suo tempo per le matrici. Come vettore nullo prendiamo $\mathbf{0} = O_{m \times n}$. Valgono le (8.4). Otteniamo uno spazio vettoriale.

Il successivo esempio è lo spazio vettoriale dei vettori geometrici. Poniamo $V = \mathcal{V}$ e $K = \mathbb{R}$ e definiamo le operazioni.

Definizione 9.2. Consideriamo $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathcal{V}$ e un punto P arbitrario. Allora esistono e sono unici due punti Q e R tali che $\mathbf{v} = \overrightarrow{PQ}$ e $\mathbf{w} =$

874 \overrightarrow{PR} . Si definisce la *somma* $\mathbf{v} + \mathbf{w} = \overrightarrow{PS}$, dove S è tale che $PQSR$ sia
 875 un parallelogramma.



876 **Osservazione 9.3.** Posto $\mathbf{0} = \overrightarrow{PP}$, vale $\mathbf{v} + \mathbf{0} = \mathbf{v}$, $\forall \mathbf{v} \in \mathcal{V}$.

877 **Definizione 9.4.** Sia $\mathbf{v} = \overrightarrow{PQ} \in \mathcal{V}$ e $h \in \mathbb{R}$. Se $\mathbf{v} = \mathbf{0}$ si pone $h\mathbf{v} = \mathbf{0}$.
 878 Se $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$, si pone $h\mathbf{v} = \overrightarrow{PT}$, dove T è il punto della retta PQ che ha
 879 ascissa h nel sistema di riferimento in cui P è origine e Q ha ascissa 1.

880 Si dimostra che valgono le (8.4). Quindi è possibile definire:

881 **Esempio 9.5.** Lo spazio vettoriale dei vettori geometrici ha come in-
 882 sieme di vettori V l'insieme \mathcal{V} dei vettori geometrici (cfr. def. refvetto-
 883 regeometrico), come insieme degli scalari \mathbb{R} , come operazioni e vettore
 884 nullo ciò che è stato definito sopra.

885 **Esempio 9.6.** Come V prendiamo l'insieme dei polinomi in una in-
 886 determinata a coefficienti reali (che si denota con $\mathbb{R}[x]$). Poi $K = \mathbb{R}$.
 887 Come operazioni e vettore nullo gli stessi dell'es. 8.37. Otteniamo un
 888 altro spazio vettoriale reale.

889 **Definizione 9.7.** Un *sottospazio* di uno spazio vettoriale V_K è un
 890 insieme $W \subseteq V$ soddisfacente le seguenti proprietà:

$$\begin{aligned} (i) \quad & \mathbf{0} \in W \\ (ii) \quad & \forall h, k \in K : \forall \mathbf{u}, \mathbf{v} \in W : h\mathbf{u} + k\mathbf{v} \in W. \end{aligned} \quad (9.1)$$

891 La (9.1) (ii) si esprime dicendo che W è “chiuso” rispetto alle
 892 operazioni di spazio vettoriale.

893 **Esempio 9.8.** $W = \mathbb{R}[x]$ è un sottospazio dello spazio vettoriale
 894 $C^0(\mathbb{R})$. Ogni polinomio è una funzione continua, quindi $\mathbb{R}[x] \subseteq C^0(\mathbb{R})$.
 895 Poi (i) il vettore nullo $\mathbf{0}$ di $C^0(\mathbb{R})$, che è la funzione nulla, è anche un
 896 polinomio e quindi appartiene a W ; (ii) se $c, d \in \mathbb{R}$ e $f, g \in \mathbb{R}[x]$, anche
 897 $cf + dg$ è un polinomio e quindi appartiene a $\mathbb{R}[x]$.

898 **Osservazione 9.9.** Uno spazio vettoriale V_K ha sempre due *sottospazi*
 899 *banali*: il *sottospazio nullo* $W_1 = \{\mathbf{0}\}$ e $W_2 = V$.

900 **Esercizio 9.10.** Stabilire se $W_1 = \{(x, 0) \mid x \in \mathbb{R}\}$ è un sottospazio di
 901 \mathbb{R}^2 .

902 *Svolgimento.* (i) Il vettore nullo di \mathbb{R}^2 è $(0, 0) = (x, 0)$ per $x = 0$; quindi
 903 $(0, 0) \in W_1$.

904 (ii) Consideriamo $h, k \in \mathbb{R}$ e $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in W_1$. Per definizione di W_1 esistono
 905 $x, y \in \mathbb{R}$ tali che $\mathbf{u} = (x, 0)$, $\mathbf{v} = (y, 0)$. Ne segue: $h\mathbf{u} + k\mathbf{v} = (hx, 0) +$
 906 $(ky, 0) = (hx + ky, 0)$. Tale vettore appartiene a W_1 .

907 Conclusione: per $W = W_1$ valgono le (9.1), quindi W_1 è un sottospazio.

908 **Esercizio 9.11.** Stabilire se $W_2 = \{(x, y) \mid x, y \in \mathbb{R}, x + y = 0\}$ è un
 909 *sottospazio* di \mathbb{R}^2 .

910 *Svolgimento.* (i) Da $0 + 0 = 0$ segue $(0, 0) \in W_2$.

911 (ii) Consideriamo $h, k \in \mathbb{R}$ e $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in W_2$. Per definizione di W_2 , esistono

912 $x, y, x', y' \in \mathbb{R}$ tali che $x + y = 0 = x' + y'$ e $\mathbf{u} = (x, y)$, $\mathbf{v} = (x', y')$.
 913 Vale:

$$\begin{aligned} h\mathbf{u} + k\mathbf{v} &= h(x, y) + k(x', y') = (hx, hy) + (kx', ky') = \\ &= (hx + kx', hy + ky'). \end{aligned}$$

914 Per decidere se tale vettore è in W_2 , calcolo:

$$(hx + kx') + (hy + ky') = h(\cancel{x+y}) + k(\cancel{x'+y'}) = 0,$$

915 quindi $h\mathbf{u} + k\mathbf{v} \in W_2$. Conclusione: W_2 è un sottospazio di \mathbb{R}^2 .

916 **Esercizio 9.12.** Stabilire se $W_3 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x, y \in \mathbb{R}, xy = 0\}$ è
 917 un sottospazio di \mathbb{R}^2 .

918 *Svolgimento.* (i) Da $0 \cdot 0 = 0$ segue $(0, 0) \in W_3$.

919 (ii) Consideriamo $h, k \in \mathbb{R}$ e $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in W_3$. Per definizione di W_3 , esistono
 920 $x, y, x', y' \in \mathbb{R}$ tali che $xy = 0 = x'y'$ e $\mathbf{u} = (x, y)$, $\mathbf{v} = (x', y')$. Vale
 921 (con gli stessi calcoli di sopra):

$$h\mathbf{u} + k\mathbf{v} = (hx + kx', hy + ky').$$

922 Per decidere se tale vettore è in W_3 , calcolo

$$(hx + kx')(hy + ky') = \cancel{h^2xy} + hkxy' + hkx'y + \cancel{k^2x'y'} = hk(xy' + x'y).$$

923 Tale espressione risulta diversa da zero per $h = k = x = y' = 1$ e
 924 $x' = y = 0$, mentre per tali valori vale $xy = 0 = x'y'$. Quindi esistono
 925 $h, k \in \mathbb{R}$ e $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in W_3$ tali che $h\mathbf{u} + k\mathbf{v} \notin W_3$ e W_3 non è un sottospazio.

926 *Svolgimento alternativo (migliore):* W_3 non è un sottospazio, perché
 927 $(1, 0), (0, 1) \in W_3$ e $(1, 0) + (0, 1) \notin W_3$ (W_3 non è chiuso rispetto alla
 928 somma di vettori).

929

930 *Risposta alla domanda iniziale.* Il sistema è nella forma $AX = O_{3 \times 1}$,
 931 dove

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 2 & -1 & -1 \\ 0 & -3 & 3 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}.$$

932 L'insieme delle soluzioni è

$$W = \{T \in \mathcal{M}(3 \times 1, \mathbb{R}) \mid AT = O_{3 \times 1}\}$$

e W è un sottospazio di $\mathcal{M}(3 \times 1, \mathbb{R})$, infatti:

(i) $AO_{3 \times 1} = O_{3 \times 1}$, quindi $O_{3 \times 1} \in W$.

(ii) Consideriamo $h, k \in \mathbb{R}$ e $T_1, T_2 \in W$. Per decidere se $hT_1 + kT_2 \in W$ calcolo:

$$\begin{aligned} A(hT_1 + kT_2) &= A(hT_1) + A(kT_2) = h(AT_1) + k(AT_2) = \\ &= hO_{3 \times 1} + kO_{3 \times 1} \quad \text{perché } T_1, T_2 \in W = O_{3 \times 1}. \end{aligned}$$

933 La conclusione è che le soluzioni del sistema formano uno spazio vet-
 934 toriale, sottospazio di $\mathcal{M}(3 \times 1, \mathbb{R})$. Più in generale, **le soluzioni di**
 935 **ogni sistema lineare omogeneo (cioè con termini costanti uguali a zero)**
 936 **formano uno spazio vettoriale.**

937 **Proposizione 9.13.** Siano W_1 e W_2 due sottospazi di uno spazio
 938 vettoriale V_K . Allora $W_1 \cap W_2$ è un sottospazio di V_K .

939 *Dimostrazione.* (i) Siccome per ipotesi W_1 e W_2 sono sottospazi, vale
 940 $\mathbf{0} \in W_1$ e $\mathbf{0} \in W_2$, da cui $\mathbf{0} \in W_1 \cap W_2$.

941 (ii) Consideriamo $h, k \in K$ e $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in W_1 \cap W_2$, quindi $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in W_i$
 942 per $i = 1, 2$. Per ipotesi W_i è un sottospazio per $i = 1, 2$, quindi
 943 $h\mathbf{u} + k\mathbf{v} \in W_i$ per $i = 1, 2$. Ne segue $h\mathbf{u} + k\mathbf{v} \in W_1 \cap W_2$. \square

944 **Osservazione 9.14.** In realtà la proposizione si estende all'intersezio-
 945 ne di un numero qualsiasi di sottospazi, anche infinito.

946 **Esempio 9.15.** Osserviamo che W_1 (cfr. eserc. 9.10) e $U = \{(0, y) \mid$
947 $y \in \mathbb{R}\}$ sono sottospazi di \mathbb{R}^2 . Risulta $W_1 \cup U = W_3 = \{(x, y) \in$
948 $\mathbb{R}^2 \mid x, y \in \mathbb{R}, xy = 0\}$ (cfr. eserc. 9.12), che non è un sottospazio. Ne
949 deduciamo che *non* necessariamente l'unione di due sottospazi di uno
950 spazio vettoriale è un sottospazio.

Lezione 10

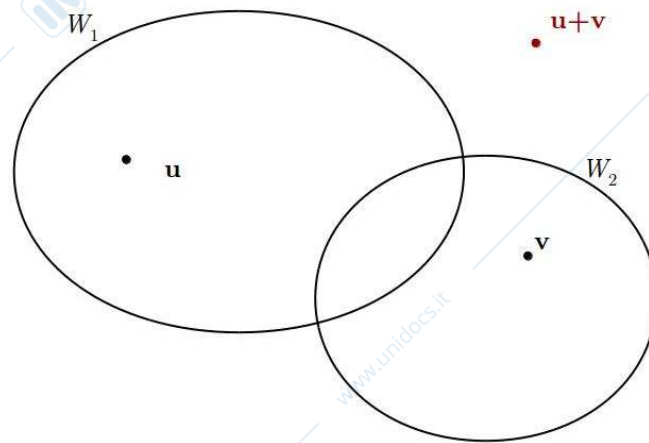
Somma di due sottospazi

Determinare tutti i sottospazi di \mathbb{R}^3 contenenti entrambi i seguenti:

$$W_1 = \{(x, 0, 0) \mid x \in \mathbb{R}\}, \quad W_2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x = 0, y = z\}. \quad (10.1)$$

Proposizione 10.1. *Siano W_1 e W_2 sottospazi di uno spazio vettoriale V_K . Supponiamo che nessuno dei due sia contenuto nell'altro. Allora $W_1 \cup W_2$ non è un sottospazio di V_K .*

Dimostrazione. Per ipotesi $W_1 \not\subseteq W_2$, quindi esiste un vettore $\mathbf{u} \in W_1 \setminus W_2$. Sempre per ipotesi $W_2 \not\subseteq W_1$, quindi esiste $\mathbf{v} \in W_2 \setminus W_1$. Supponiamo che $W_1 \cup W_2$ sia un sottospazio di V_K . Tale $W_1 \cup W_2$ contiene \mathbf{u} , \mathbf{v} e siccome è un sottospazio anche $\mathbf{u} + \mathbf{v}$. Quindi $\mathbf{u} + \mathbf{v} \in W_1$, oppure $\mathbf{u} + \mathbf{v} \in W_2$. Se $\mathbf{u} + \mathbf{v} \in W_1$, dalla definizione di sottospazio applicata ai vettori $\mathbf{u} + \mathbf{v}$, $\mathbf{u} \in W_1$ e agli scalari $h = 1$,



966 $k = -1$ si ha $1(\mathbf{u} + \mathbf{v}) + (-1)\mathbf{u} \in W_1$, da cui¹ $\mathbf{u} + \mathbf{v} - \mathbf{u} \in W_1$ quindi
 967 $\mathbf{v} \in W_1$: assurdo. Se $\mathbf{u} + \mathbf{v} \in W_2$, dalla definizione di sottospazio e
 968 da $\mathbf{v} \in W_2$ segue $1(\mathbf{u} + \mathbf{v}) + (-1)\mathbf{v} \in W_2$ quindi $\mathbf{u} \in W_2$: assurdo.
 969 Supponendo che $W_1 \cup W_2$ sia un sottospazio si ottiene in ogni caso una
 970 contraddizione. \square

971 Stiamo cercando un sottospazio di V_K che contenga l'unione $W_1 \cup$
 972 W_2 di due sottospazi e che sia per quanto possibile "piccolo". La
 973 soluzione proviene dalla seguente:

974 **Definizione 10.2.** Siano W_1 e W_2 sottospazi di uno spazio vettoriale
 975 V_K . La *somma* di W_1 e W_2 è

$$W_1 + W_2 = \{\mathbf{w}_1 + \mathbf{w}_2 \mid \mathbf{w}_1 \in W_1, \mathbf{w}_2 \in W_2\}. \quad (10.2)$$

976 La seguente proposizione esprime il fatto che $W_1 + W_2$ è il più
 977 piccolo sottospazio di V_K che contiene $W_1 \cup W_2$.

978 **Proposizione 10.3.** Siano W_1 e W_2 sottospazi di uno spazio vettoriale
 979 V_K . Allora

¹In realtà non abbiamo mai dimostrato che $(-1)\mathbf{u} = -\mathbf{u}$, ma daremo per scontate questa ed altre proprietà "intuitive" degli spazi vettoriali, che in un'esposizione completa dovrebbero essere dimostrate a partire dalla def. 8.33.

- 980 1) $W_1 + W_2$ è un sottospazio di V_K ;
- 981 2) $W_1 \cup W_2 \subseteq W_1 + W_2$;
- 982 3) Se T è un sottospazio di V_K e $W_1 \cup W_2 \subseteq T$, allora $W_1 + W_2 \subseteq T$.

983 *Dimostrazione.* 1) Applichiamo la definizione di sottospazio. (i) $\mathbf{0} \in$
 984 W_1 e $\mathbf{0} \in W_2$ perché per ipotesi W_1 e W_2 sono sottospazi. Dalla
 985 definizione di $W_1 + W_2$ (con $\mathbf{w}_1 = \mathbf{0} = \mathbf{w}_2$) otteniamo $\mathbf{0} = \mathbf{w}_1 + \mathbf{w}_2 \in$
 986 $W_1 + W_2$. (ii) Consideriamo $h, k \in K$ e $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in W_1 + W_2$. Per definizione
 987 di somma esistono $\mathbf{w}_1, \mathbf{w}'_1 \in W_1$, $\mathbf{w}_2, \mathbf{w}'_2 \in W_2$ tali che $\mathbf{u} = \mathbf{w}_1 + \mathbf{w}_2$,
 988 $\mathbf{v} = \mathbf{w}'_1 + \mathbf{w}'_2$. Vale

$$h\mathbf{u} + k\mathbf{v} = (h\mathbf{w}_1 + k\mathbf{w}'_1) + (h\mathbf{w}_2 + k\mathbf{w}'_2).$$

989 Poniamo $\mathbf{w}''_1 = h\mathbf{w}_1 + k\mathbf{w}'_1$ e $\mathbf{w}''_2 = h\mathbf{w}_2 + k\mathbf{w}'_2$. Vale $h\mathbf{u} + k\mathbf{v} = \mathbf{w}''_1 + \mathbf{w}''_2$,
 990 inoltre $\mathbf{w}''_1 \in W_1$ perché per ipotesi W_1 è un sottospazio e analogamente
 991 $\mathbf{w}''_2 \in W_2$. Resta dimostrato che $h\mathbf{u} + k\mathbf{v} \in W_1 + W_2$, quindi $W_1 + W_2$
 992 è un sottospazio.

993 2) Dimostriamo innanzitutto che $W_1 \subseteq W_1 + W_2$. Consideriamo un
 994 qualsiasi $\mathbf{w}_1 \in W_1$. Dalla (10.2), con $\mathbf{w}_2 = \mathbf{0} \in W_2$, ricaviamo che
 995 $\mathbf{w}_1 = \mathbf{w}_1 + \mathbf{w}_2 \in W_1 + W_2$ e questo basta. Analogamente si prova che
 996 $W_2 \subseteq W_1 + W_2$. Ne segue la tesi.

997 3) Consideriamo un qualsiasi $\mathbf{v} \in W_1 + W_2$. Per def. (10.2) esistono
 998 $\mathbf{w}_1 \in W_1$, $\mathbf{w}_2 \in W_2$ tali che $\mathbf{v} = \mathbf{w}_1 + \mathbf{w}_2$. Dall'ipotesi $W_1 \cup W_2 \subseteq$
 999 T deduciamo $\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2 \in T$. Per ipotesi T è un sottospazio, quindi
 1000 $\mathbf{w}_1 + \mathbf{w}_2 \in T$, cioè $\mathbf{v} \in T$. Resta dimostrato che $W_1 + W_2 \subseteq T$. \square

1001

1002 *Risposta alla domanda iniziale.* Lasciamo per esercizio la verifica che
 1003 W_1 e W_2 sono sottospazi. Per la prop. 10.3, i sottospazi cercati sono

1004 precisamente quelli contenenti

$$\begin{aligned}
 W_1 + W_2 &= \{\mathbf{w}_1 + \mathbf{w}_2 \mid \mathbf{w}_1 \in W_1, \mathbf{w}_2 \in W_2\} = \\
 &= \{(x, 0, 0) + (0, y, y) \mid x, y \in \mathbb{R}\} = \\
 &= \{(x, y, y) \mid x, y \in \mathbb{R}\}.
 \end{aligned}
 \tag{10.3}$$

1005 **Osservazione 10.4.** Poniamo

$$U = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x = 0\}, \quad T = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid z = 0\}. \tag{10.4}$$

1006 Gli insiemi U e T risultano sottospazi di \mathbb{R}^3 (verifica per esercizio).
 1007 Il vettore $\mathbf{v} = (1, 2, 3)$ appartiene a $U + T$, infatti $\mathbf{v} = (0, 2, 3) +$
 1008 $(1, 0, 0)$ e $(0, 2, 3) \in U$, $(1, 0, 0) \in T$. La stessa proprietà si deduce
 1009 anche considerando, ad esempio, $\mathbf{v} = (0, 0, 3) + (1, 2, 0)$ e $(0, 0, 3) \in U$,
 1010 $(1, 2, 0) \in T$.

1011 **Definizione 10.5.** Siano W_1 e W_2 sottospazi di uno spazio vettoriale
 1012 V_K . La somma $W_1 + W_2$ si dice *diretta* se per ogni $\mathbf{u} \in W_1 + W_2$ sono
 1013 unici i vettori $\mathbf{w}_1 \in W_1$ e $\mathbf{w}_2 \in W_2$ tali che $\mathbf{u} = \mathbf{w}_1 + \mathbf{w}_2$.

1014 **Esempio 10.6.** La somma $U + T$ di cui all'oss. 10.4 non è diretta.

1015 **Teorema 10.7.** Siano W_1 e W_2 sottospazi di uno spazio vettoriale V_K .
 1016 La somma $W_1 + W_2$ è diretta se, e solo se, $W_1 \cap W_2 = \{\mathbf{0}\}$.

1017 *Dimostrazione.* “ \Rightarrow ” Per ipotesi $W_1 + W_2$ è diretta, la tesi è $W_1 \cap W_2 =$
 1018 $\{\mathbf{0}\}$. In primo luogo $\mathbf{0} \in W_1$ e $\mathbf{0} \in W_2$, perché W_1 e W_2 sono sottospazi;
 1019 quindi $\mathbf{0} \in W_1 \cap W_2$. Ora consideriamo $\mathbf{v} \in W_1 \cap W_2$. Definiamo
 1020 $\mathbf{w}_1 = \mathbf{w}'_2 = \mathbf{v}$, $\mathbf{w}_2 = \mathbf{w}'_1 = \mathbf{0}$. Risulta $\mathbf{w}_1, \mathbf{w}'_1 \in W_1$, $\mathbf{w}_2, \mathbf{w}'_2 \in W_2$

1021 e $\mathbf{w}_1 + \mathbf{w}_2 = \mathbf{w}'_1 + \mathbf{w}'_2$. Siccome per ipotesi la somma è diretta, vale
 1022 $\mathbf{w}_1 = \mathbf{w}'_1$ da cui $\mathbf{v} = \mathbf{0}$.² Resta dimostrato che $W_1 \cap W_2 = \{\mathbf{0}\}$.
 1023 “ \Leftarrow ” Supponiamo

$$\mathbf{w}_1 + \mathbf{w}_2 = \mathbf{w}'_1 + \mathbf{w}'_2, \quad \text{dove } \mathbf{w}_1, \mathbf{w}'_1 \in W_1, \mathbf{w}_2, \mathbf{w}'_2 \in W_2. \quad (10.5)$$

1024 Definiamo

$$\mathbf{u} = \mathbf{w}_1 - \mathbf{w}'_1. \quad (10.6)$$

1025 Risulta $\mathbf{u} \in W_1$. Inoltre da (10.5), (10.6) segue

$$\mathbf{u} = \mathbf{w}'_2 - \mathbf{w}_2, \quad (10.7)$$

1026 da cui $\mathbf{u} \in W_2$. Per l'ipotesi $W_1 \cap W_2 = \{\mathbf{0}\}$ vale allora $\mathbf{u} = \mathbf{0}$.
 1027 Sostituendo tale espressione in (10.6) e in (10.7) si ricava $\mathbf{w}_1 - \mathbf{w}'_1 =$
 1028 $\mathbf{0} = \mathbf{w}'_2 - \mathbf{w}_2$ e infine $\mathbf{w}_1 = \mathbf{w}'_1$, $\mathbf{w}_2 = \mathbf{w}'_2$. \square

1029 **Osservazione 10.8.** Se U e T sono ancora i sottospazi dell'oss. 10.4,
 1030 vale

$$U \cap T = \{(0, y, 0) \mid y \in \mathbb{R}\} \neq \{(0, 0, 0)\},$$

1031 quindi il teor. 10.7 conferma che la somma $U + T$ non è diretta.

1032 **Esercizio 10.9.** Consideriamo i sottospazi W_1 e W_2 in (10.1) e i sot-
 1033 tospazi U e T in (10.4). Delle seguenti coppie di sottospazi in \mathbb{R}^3 , dire
 1034 se la loro somma è diretta e se la loro somma è \mathbb{R}^3 : (a) W_1 e W_2 ;
 1035 (b) W_1 e U ; (c) U e T .

1036 *Svolgimento.* (a) Per la (10.3), vale $W_1 + W_2 \neq \mathbb{R}^3$. Poi

$$\begin{aligned} W_1 \cap W_2 &= \{(x, 0, 0) \mid x \in \mathbb{R}\} \cap \{(0, y, y) \mid y \in \mathbb{R}\} = \\ &= \{(0, 0, 0)\}, \end{aligned}$$

1037 quindi la somma $W_1 + W_2$ è diretta.

²Vale anche $\mathbf{w}_2 = \mathbf{w}'_2$, ma non ci interessa.

1038 (b)

$$U = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x = 0\} = \{(0, y, z) \mid y, z \in \mathbb{R}\}.$$

1039 Vale $W_1 \cap U = \{(0, 0, 0)\}$, quindi la somma è diretta. Poi

$$\begin{aligned} W_1 + U &= \{(x, 0, 0) + (0, y, z) \mid x, y, z \in \mathbb{R}\} = \{(x, y, z) \mid x, y, z \in \mathbb{R}\} \\ &= \mathbb{R}^3. \end{aligned}$$

1040 (c) Nell'oss. 10.4 si è visto che la somma $U + T$ non è diretta. Ogni
1041 $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ è somma di $(0, b, c) \in U$ e $(a, 0, 0) \in T$, quindi $U + T = \mathbb{R}^3$.

1042

1043 **Sfida 10.10.** Dimostrare che i sottospazi richiesti nella domanda ini-
1044 ziale sono precisamente due.

Lezione 11

Dipendenza lineare

Qual è il più piccolo sottospazio di \mathbb{R}^3 contenente i vettori

$$\mathbf{w}_1 = (1, 1, -2), \quad \mathbf{w}_2 = (2, -1, -1), \quad \mathbf{w}_3 = (0, -3, 3)?$$

Nel seguito supporremo fissato uno spazio vettoriale V_K . Una “famiglia” di vettori è una collezione $\mathcal{F} = \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_r$ di vettori; non si escludono ripetizioni¹, ad es. non si esclude $\mathbf{v}_1 = \mathbf{v}_2$.

Esempio 11.1. Una famiglia importante di vettori in $\mathcal{M}(1 \times n, K)$ è quella formata dalle righe di una matrice $A \in \mathcal{M}(m \times n, K)$.

Definizione 11.2. La *combinazione lineare* della famiglia di vettori $\mathcal{F} = \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_r$ con *coefficienti* $x_1, x_2, \dots, x_r \in K$ è

$$x_1 \mathbf{v}_1 + x_2 \mathbf{v}_2 + \dots + x_r \mathbf{v}_r. \quad (11.1)$$

¹Più precisamente una famiglia è un *multiinsieme*, generalizzazione del concetto di insieme in cui a ogni elemento è associata la molteplicità di appartenenza all'insieme stesso.

1058 **Esempio 11.3.** La definizione di sottospazio può essere riformulata
 1059 come segue: un insieme W di vettori in uno spazio vettoriale V_K è un
 1060 sottospazio se, e solo se, (i) $\mathbf{0} \in W$, (ii) comunque presi $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in W$,
 1061 ogni combinazione lineare di \mathbf{u} e \mathbf{v} appartiene a W .

1062 **Problema:** è possibile esprimere uno dei tre vettori \mathbf{w}_1 , \mathbf{w}_2 e \mathbf{w}_3
 1063 come combinazione lineare degli altri due?

1064 **Definizione 11.4.** Data una famiglia di vettori $\mathcal{F} = \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_r$ in
 1065 uno spazio vettoriale V_K , la famiglia \mathcal{F} si dice *linearmente dipenden-*
 1066 *te* (oppure, “i vettori $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_r$ sono linearmente dipendenti”) se
 1067 esistono scalari x_1, x_2, \dots, x_r , non tutti nulli, tali che

$$x_1\mathbf{v}_1 + x_2\mathbf{v}_2 + \dots + x_r\mathbf{v}_r = \mathbf{0}. \quad (11.2)$$

1068 Se \mathcal{F} non è linearmente dipendente, \mathcal{F} si dice *linearmente indipen-*
 1069 *dente*.

1070 **Esercizio 11.5.** Stabilire se la famiglia $\mathcal{G} = \mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \mathbf{w}_3$ è *linearmente*
 1071 *dipendente*.

1072 **Svolgimento.** Per definizione, \mathcal{G} è linearmente dipendente se, e solo
 1073 se, l'equazione $x_1\mathbf{w}_1 + x_2\mathbf{w}_2 + x_3\mathbf{w}_3 = \mathbf{0}$ nelle incognite x_1, x_2, x_3
 1074 ha almeno una soluzione diversa da $x_1 = x_2 = x_3 = 0$. Risolvo:
 1075 $x_1(1, 1, -2) + x_2(2, -1, -1) + x_3(0, -3, 3) = (0, 0, 0) \Leftrightarrow (x_1 + 2x_2, x_1 -$
 1076 $x_2 - 3x_3, -2x_1 - x_2 + 3x_3) = (0, 0, 0) \Leftrightarrow$

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 = 0 \\ x_1 - x_2 - 3x_3 = 0 \\ -2x_1 - x_2 + 3x_3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = -2x_2 \\ -3x_2 - 3x_3 = 0 \\ 3x_2 + 3x_3 = 0. \end{cases}$$

1077 Tale sistema ha infinite soluzioni (es. $x_1 = -2, x_2 = 1, x_3 = -1$) quindi
 1078 \mathcal{G} è linearmente dipendente. Esplicitamente, una combinazione lineare
 1079 di \mathcal{G} che ne implica la dipendenza lineare è $-2\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_3 = \mathbf{0}$.

1080 **Definizione 11.6.** Data una famiglia $\mathcal{F} = \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_r$ (finita, non
 1081 vuota) di vettori in uno spazio vettoriale V_K , il *sottospazio generato* da
 1082 \mathcal{F} è

$$\langle \mathcal{F} \rangle = \{x_1 \mathbf{v}_1 + x_2 \mathbf{v}_2 + \dots + x_r \mathbf{v}_r \mid x_1, x_2, \dots, x_r \in K\}.$$

1083 $\langle \mathcal{F} \rangle$ è semplicemente l'insieme di tutte le combinazioni lineari di \mathcal{F} .

1084 **Osservazione 11.7.** Si può dimostrare che $\langle \mathcal{F} \rangle$ è il più piccolo sotto-
 1085 spazio di V_K contenente \mathcal{F} ; infatti:

- 1086 1) $\langle \mathcal{F} \rangle$ è un sottospazio di V_K (lasciamo la dimostrazione come impor-
 1087 tante esercizio);
- 1088 2) ogni sottospazio U di V_K che contenga \mathcal{F} ne contiene pure tutte le
 1089 combinazioni lineari, quindi $\langle \mathcal{F} \rangle \subseteq U$.

1092 *Risposta alla domanda iniziale.* Il sottospazio cercato è il sottospazio
 1093 generato da $\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \mathbf{w}_3$, cioè l'insieme di tutte le combinazioni lineari
 1094 dei tre vettori.

1095 **Osservazione 11.8.** La definizione di $\langle \mathcal{F} \rangle$ si estende ad ogni famiglia
 1096 \mathcal{F} di vettori, definendolo appunto come il più piccolo sottospazio di
 1097 V_K che contiene \mathcal{F} . In particolare, $\langle \emptyset \rangle = \{\mathbf{0}\}$; se invece \mathcal{F} è infini-
 1098 ta, $\langle \mathcal{F} \rangle$ risulta uguale all'insieme di tutte le combinazioni lineari delle
 1099 sottofamiglie finite di \mathcal{F} .

1100 **Definizione 11.9.** Se $\langle \mathcal{F} \rangle = W$, diremo che \mathcal{F} è una *famiglia di*
 1101 *generatori* del sottospazio W .

1102 **Teorema 11.10.** Siano \mathcal{F} e \mathcal{F}' due famiglie di vettori in uno spazio
 1103 vettoriale V_K , tali che $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{F}'$. Allora:

1104 (i) $\langle \mathcal{F} \rangle \subseteq \langle \mathcal{F}' \rangle$;

1105 (ii) se \mathcal{F} è linearmente dipendente, allora anche \mathcal{F}' lo è;

1106 (iii) se \mathcal{F}' è linearmente indipendente, allora anche \mathcal{F} lo è.

1107 *Dimostrazione.* (Nel caso di famiglie finite e non vuote.) Poniamo
1108 $\mathcal{F} = \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_r$, $\mathcal{F}' = \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_r, \mathbf{v}_{r+1}, \dots, \mathbf{v}_s$.

1109 (i) Consideriamo un vettore $\mathbf{u} \in \langle \mathcal{F} \rangle$. Per definizione di $\langle \mathcal{F} \rangle$, esi-
1110 stono $x_1, x_2, \dots, x_r \in K$ tali che $\mathbf{u} = x_1\mathbf{v}_1 + x_2\mathbf{v}_2 + \dots + x_r\mathbf{v}_r$. Ciò
1111 implica

$$\mathbf{u} = x_1\mathbf{v}_1 + x_2\mathbf{v}_2 + \dots + x_r\mathbf{v}_r + 0\mathbf{v}_{r+1} + \dots + 0\mathbf{v}_s.$$

1112 Quindi \mathbf{u} è combinazione lineare di \mathcal{F}' e $\mathbf{u} \in \langle \mathcal{F}' \rangle$.

1113 (ii) Per definizione di famiglia linearmente dipendente, esistono
1114 $x_1, x_2, \dots, x_r \in K$ non tutti 0, tali che $x_1\mathbf{v}_1 + x_2\mathbf{v}_2 + \dots + x_r\mathbf{v}_r = \mathbf{0}$.
1115 Ciò implica

$$x_1\mathbf{v}_1 + x_2\mathbf{v}_2 + \dots + x_r\mathbf{v}_r + 0\mathbf{v}_{r+1} + \dots + 0\mathbf{v}_s = \mathbf{0}.$$

1116 A sinistra del segno uguale c'è una combinazione lineare di \mathcal{F}' a coef-
1117 ficienti non tutti 0; quindi \mathcal{F}' è linearmente dipendente.

1118 (iii) equivale a (ii). □

1119 **Definizione 11.11.** Per definizione \emptyset si considera linearmente indi-
1120 pendente; quindi il teorema precedente vale anche per $\mathcal{F} = \emptyset$. Una
1121 famiglia infinita \mathcal{F} si dice linearmente dipendente se contiene almeno
1122 una famiglia finita linearmente dipendente.

1123 **Esempi 11.12.** 1) Se $\mathbf{v} \in V$, $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$, allora l'equazione $x\mathbf{v} = \mathbf{0}$ ha
1124 come unica soluzione $x = 0$; quindi la famiglia $\mathcal{F} = \mathbf{v}$ è linearmente
1125 indipendente.

1126 2) $\mathcal{F} = \mathbf{0}$ è linearmente dipendente, infatti $1\mathbf{0} = \mathbf{0}$.

1127 3) Dal teor. 11.10 (ii), facendovi $\mathcal{F} = \mathbf{0}$, si deduce che se una famiglia
1128 \mathcal{F}' contiene $\mathbf{0}$, allora \mathcal{F}' è linearmente dipendente.

1129 4) Consideriamo un qualsiasi $\mathbf{v} \in V$ e la famiglia $\mathcal{F} = \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2$ definita
1130 ponendo $\mathbf{v}_1 = \mathbf{v}_2 = \mathbf{v}$. Siccome $1\mathbf{v}_1 + (-1)\mathbf{v}_2 = \mathbf{0}$, la famiglia \mathcal{F} è
1131 linearmente dipendente.

1132 5) Dal teor. 11.10 (ii) e dall'osservazione precedente otteniamo che se
1133 una famiglia di vettori contiene dei vettori ripetuti, essa è linearmente
1134 dipendente.

1135 *Soluzione del problema:* Nell'esercizio 11.5 abbiamo visto che

$$-2\mathbf{w}_1 + \mathbf{w}_2 - \mathbf{w}_3 = \mathbf{0}$$

1136 da cui $\mathbf{w}_1 = \frac{1}{2}\mathbf{w}_2 - \frac{1}{2}\mathbf{w}_3$; quindi \mathbf{w}_1 è combinazione lineare di $\mathbf{w}_2, \mathbf{w}_3$.
1137 Generalizzando l'idea, si ottiene:

1138 **Teorema 11.13.** *Se la famiglia di vettori $\mathcal{F} = \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_r$ è linear-*
1139 *mente dipendente, allora uno di tali vettori è combinazione lineare dei*
1140 *rimanenti; e viceversa.*

1141 *Dimostrazione.* “ \Rightarrow ” Per ipotesi esistono $x_1, x_2, \dots, x_r \in K$, non tutti
1142 zero, tali che $x_1\mathbf{v}_1 + x_2\mathbf{v}_2 + \dots + x_r\mathbf{v}_r = \mathbf{0}$. Consideriamo uno scalare
1143 x_j che sia diverso da zero. Dall'equazione precedente si ricava

$$\mathbf{v}_j = -\frac{x_1}{x_j}\mathbf{v}_1 - \frac{x_2}{x_j}\mathbf{v}_2 - \dots - \frac{x_{j-1}}{x_j}\mathbf{v}_{j-1} - \frac{x_{j+1}}{x_j}\mathbf{v}_{j+1} - \dots - \frac{x_r}{x_j}\mathbf{v}_r.$$

1144 Resta dimostrato che \mathbf{v}_j è combinazione lineare di

$$\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_{j-1}, \mathbf{v}_{j+1}, \dots, \mathbf{v}_r.$$

1145 “ \Leftarrow ” Esiste per ipotesi un intero s , $1 \leq s \leq r$, tale che \mathbf{v}_s
1146 sia combinazione lineare dei vettori rimanenti in \mathcal{F} ; dunque esistono
1147 $y_1, y_2, \dots, y_s, y_{s+1}, \dots, y_r \in K$ tali che

$$\mathbf{v}_s = y_1\mathbf{v}_1 + y_2\mathbf{v}_2 + \dots + y_{s-1}\mathbf{v}_{s-1} + y_{s+1}\mathbf{v}_{s+1} + \dots + y_r\mathbf{v}_r.$$

1148 Se ne deduce

$$-y_1\mathbf{v}_1 - y_2\mathbf{v}_2 - \cdots - y_{s-1}\mathbf{v}_{s-1} + 1\mathbf{v}_s - y_{s+1}\mathbf{v}_{s+1} - \cdots - y_r\mathbf{v}_r = \mathbf{0}.$$

1149 A sinistra di “=” c’è una combinazione lineare di \mathcal{F} a coefficienti non
1150 tutti zero (almeno quello di \mathbf{v}_s), quindi \mathcal{F} è linearmente dipendente.

1151 \square

1152 **Esempio 11.14.** Come applicazione del teorema, consideriamo una fa-
1153 miglia $\mathcal{F} = \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2$ di due vettori. Abbiamo che \mathcal{F} è linearmente dipen-
1154 dente se, e solo se, $\mathbf{v}_1 = h\mathbf{v}_2$ oppure $\mathbf{v}_2 = h\mathbf{v}_1$ per un opportuno $h \in \mathbb{R}$.
1155 Ad esempio ciò permette di affermare immediatamente che $(1, 0, 0)$,
1156 $(1, 2, 3)$ sono linearmente indipendenti, perchè non proporzionali.

1157 **Sfida 11.15.** Esprimere, se ciò è possibile, il sottospazio

$$W = \langle \mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \mathbf{w}_3 \rangle$$

1158 di \mathbb{R}^3 come sottospazio generato da due vettori. (*I vettori $\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \mathbf{w}_3$*
1159 *sono quelli della domanda iniziale.*)

Lezione 12

Basi di uno spazio vettoriale

Cosa sono le coordinate di un vettore?

Richiami. Sia $\mathcal{F} = \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_r$ una famiglia di vettori in uno spazio vettoriale V_K .

(a) \mathcal{F} si dice *linearmente dipendente* se esistono degli scalari x_1, x_2, \dots, x_r , non tutti 0, tali che $\sum_{i=1}^r x_i \mathbf{v}_i = \mathbf{0}$ (def. 11.4).

(b) Il *sottospazio generato* da \mathcal{F} è (def. 11.6)

$$\langle \mathcal{F} \rangle = \left\{ \sum_{i=1}^r x_i \mathbf{v}_i \mid x_1, x_2, \dots, x_r \in K \right\}.$$

(c) *Proposizione 11.13.* Se \mathcal{F} è linearmente dipendente, allora esiste $j \in \{1, 2, \dots, r\}$ tale che \mathbf{v}_j sia combinazione lineare di $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_{j-1}, \mathbf{v}_{j+1}, \dots, \mathbf{v}_r$; e viceversa.

1173 **Esercizio 12.1.** Siano dati i seguenti vettori di \mathbb{R}^3 :

$$\mathbf{w}_1 = (1, 1, -2), \quad \mathbf{w}_2 = (2, -1, -1), \quad \mathbf{w}_3 = (0, -3, 3).$$

1174 Esprimere, se ciò è possibile, il sottospazio

$$W = \langle \mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \mathbf{w}_3 \rangle$$

1175 di \mathbb{R}^3 come sottospazio generato da due vettori.

1176 *Svolgimento.* Si è visto nell'esercizio 11.5 che i vettori $\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \mathbf{w}_3$ sono
 1177 linearmente dipendenti: infatti $-2\mathbf{w}_1 + \mathbf{w}_2 - \mathbf{w}_3 = \mathbf{0}$ da cui $\mathbf{w}_1 =$
 1178 $\frac{1}{2}\mathbf{w}_2 - \frac{1}{2}\mathbf{w}_3$. Per definizione di sottospazio generato da $\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \mathbf{w}_3$, vale

$$\begin{aligned} W &= \{x\mathbf{w}_1 + y\mathbf{w}_2 + z\mathbf{w}_3 \mid x, y, z \in \mathbb{R}\} = \\ &= \left\{ x \left(\frac{1}{2}\mathbf{w}_2 - \frac{1}{2}\mathbf{w}_3 \right) + y\mathbf{w}_2 + z\mathbf{w}_3 \mid x, y, z \in \mathbb{R} \right\} = \\ &= \left\{ \left(\frac{x}{2} + y \right) \mathbf{w}_2 + \left(-\frac{x}{2} + z \right) \mathbf{w}_3 \mid x, y, z \in \mathbb{R} \right\} = \\ &= \langle \mathbf{w}_2, \mathbf{w}_3 \rangle \end{aligned}$$

1179 perché tale insieme contiene precisamente tutte le combinazioni lineari
 1180 di $\mathbf{w}_2, \mathbf{w}_3$ (con ininfluenti ripetizioni). L'idea alla base dell'esercizio si
 1181 può generalizzare:

1182 **Teorema 12.2.** Se una famiglia $\mathcal{F} = \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_r$ di vettori in uno
 1183 spazio vettoriale V_K è linearmente dipendente, allora tra i vettori di \mathcal{F}
 1184 ce n'è uno, diciamo \mathbf{v}_j , che è combinazione lineare dei rimanenti e

$$\langle \mathcal{F} \rangle = \langle \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_{j-1}, \mathbf{v}_{j+1}, \dots, \mathbf{v}_r \rangle.$$

1185 **Definizione 12.3.** Una *base* di uno spazio vettoriale V_K è una famiglia
 1186 di generatori di V , linearmente indipendente.

Esempio 12.4. Verifichiamo che la famiglia $\mathcal{N} = \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$, dove $\mathbf{e}_1 = (1, 0, 0)$, $\mathbf{e}_2 = (0, 1, 0)$, $\mathbf{e}_3 = (0, 0, 1)$, è una base di \mathbb{R}^3 . Infatti:

1) Verifichiamo che \mathcal{N} è una famiglia di generatori di \mathbb{R}^3 , il che significa $\langle \mathcal{N} \rangle = \mathbb{R}^3$:

$$\begin{aligned} \langle \mathcal{N} \rangle &= \{x\mathbf{e}_1 + y\mathbf{e}_2 + z\mathbf{e}_3 \mid x, y, z \in \mathbb{R}\} = \\ &= \{(x, 0, 0) + (0, y, 0) + (0, 0, z) \mid x, y, z \in \mathbb{R}\} = \{(x, y, z) \mid x, y, z \in \mathbb{R}\} \\ &= \mathbb{R}^3. \end{aligned}$$

1187 2) Consideriamo l'equazione $x\mathbf{e}_1 + y\mathbf{e}_2 + z\mathbf{e}_3 = \mathbf{0}$ che con gli stessi
1188 calcoli equivale a $(x, y, z) = (0, 0, 0)$, ovvero a $x = y = z = 0$. Ciò
1189 implica che \mathcal{N} è linearmente indipendente.

1190 **Definizione 12.5.** La *base naturale* (o *base canonica*) di \mathbb{R}^n è $\mathcal{N}_n =$
1191 $\mathcal{N} = \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_n$, dove $\mathbf{e}_1 = (1, 0, 0, \dots, 0)$, $\mathbf{e}_2 = (0, 1, 0, \dots, 0)$, \dots ,
1192 $\mathbf{e}_n = (0, 0, 0, \dots, 1)$.

1193 **Esercizio 12.6.** Stabilire se $\mathcal{F} = (1, 0, 0), (0, 1, 0), (1, 1, 1)$ è una base
1194 di \mathbb{R}^3 .

1195 *Svolgimento.* 1) Stabilisco se $\langle \mathcal{F} \rangle = \mathbb{R}^3$, cioè se ogni $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ risulta
1196 combinazione lineare di \mathcal{F} , cioè ancora se l'equazione nelle incognite
1197 x, y, z

$$x(1, 0, 0) + y(0, 1, 0) + z(1, 1, 1) = (a, b, c)$$

1198 ha soluzione per ogni $a, b, c \in \mathbb{R}$. Ottengo $(x + z, y + z, z) = (a, b, c)$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x + z = a \\ y + z = b \\ z = c \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = a - c \\ y = b - c \\ z = c. \end{cases}$$

Il sistema ha soluzioni, quindi $\langle \mathcal{F} \rangle = \mathbb{R}^3$.

2) Studio la dipendenza lineare di \mathcal{F} :

$$\begin{aligned} x(1, 0, 0) + y(0, 1, 0) + z(1, 1, 1) &= (0, 0, 0) \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow (x + z, y + z, z) &= (0, 0, 0) \Leftrightarrow x = y = z = 0. \end{aligned}$$

1199 Quindi \mathcal{F} è linearmente indipendente.

1200 Conclusione: \mathcal{F} è una base di \mathbb{R}^3 .

1201 **Proposizione 12.7.** *Se la famiglia $\mathcal{B} = \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n$ è una base del*
 1202 *lo spazio vettoriale V_K , allora ogni vettore $\mathbf{u} \in V$ si esprime come*
 1203 *combinazione lineare di \mathcal{B} :*

$$\mathbf{u} = x_1\mathbf{v}_1 + x_2\mathbf{v}_2 + \cdots + x_n\mathbf{v}_n. \quad (12.1)$$

1204 *Inoltre gli scalari x_1, x_2, \dots, x_n soddisfacenti la (12.1) sono univoca-*
 1205 *mente determinati, cioè \mathbf{u} si esprime in un unico modo¹ come combi-*
 1206 *nazione lineare di \mathcal{B} .*

1207 *Dimostrazione.* La prima affermazione esprime il fatto che $\langle \mathcal{B} \rangle = V$ e
 1208 ciò è vero per ipotesi.

1209 Per dimostrare l'unicità supponiamo

$$x_1\mathbf{v}_1 + x_2\mathbf{v}_2 + \cdots + x_n\mathbf{v}_n = \mathbf{u} = y_1\mathbf{v}_1 + y_2\mathbf{v}_2 + \cdots + y_n\mathbf{v}_n.$$

1210 Combinando le due equazioni otteniamo:

$$(x_1 - y_1)\mathbf{v}_1 + (x_2 - y_2)\mathbf{v}_2 + \cdots + (x_n - y_n)\mathbf{v}_n = \mathbf{0}.$$

1211 Siccome per ipotesi \mathcal{B} è linearmente indipendente, da tale equazione si
 1212 deduce

$$x_1 - y_1 = x_2 - y_2 = \dots = x_n - y_n = 0$$

1213 da cui $x_1 = y_1, x_2 = y_2, \dots, x_n = y_n$. □

1214 **Definizione 12.8.** Se \mathbf{u} e $\mathcal{B} = \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n$ sono rispettivamente un
 1215 vettore e una base di uno spazio vettoriale V_K , gli scalari x_1, x_2, \dots, x_n
 1216 soddisfacenti la (12.1), univocamente determinati, prendono il nome
 1217 di *coordinate del vettore \mathbf{u} rispetto alla base \mathcal{B} .*

¹Si intende unico a meno dell'ordine degli addendi.

1218 **Esercizio 12.9.** Trovare le coordinate del vettore $\mathbf{u} = (1, 2, 3)$ di \mathbb{R}^3
 1219 (a) rispetto alla base naturale $\mathcal{N} = \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$, (b) rispetto alla base \mathcal{B}
 1220 dell'esercizio 12.6.

1221 *Svolgimento.* (a) Le coordinate sono per la (12.1) le soluzioni dell'e-
 1222 quazione $\mathbf{u} = x_1\mathbf{e}_1 + x_2\mathbf{e}_2 + x_3\mathbf{e}_3$, cioè $(1, 2, 3) = (x_1, x_2, x_3) \Leftrightarrow$
 1223 $x_1 = 1, x_2 = 2, x_3 = 3$. Più in generale, le coordinate di ogni
 1224 $(a_1, a_2, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^n$ rispetto alla base naturale di \mathbb{R}^n risultano uguali
 1225 alle componenti stesse del vettore a_1, a_2, \dots, a_n .

(b) Risolvo l'equazione $\mathbf{u} = y_1\mathbf{v}_1 + y_2\mathbf{v}_2 + y_3\mathbf{v}_3 \Leftrightarrow$

$$\begin{aligned} (1, 2, 3) &= y_1(1, 0, 0) + y_2(0, 1, 0) + y_3(1, 1, 1) \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow (1, 2, 3) &= (y_1 + y_3, y_2 + y_3, y_3) \Leftrightarrow \begin{cases} y_1 + y_3 = 1 \\ y_2 + y_3 = 2 \\ y_3 = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} y_1 = -2 \\ y_2 = -1 \\ y_3 = 3. \end{cases} \end{aligned}$$

1226 Le coordinate di \mathbf{u} rispetto a \mathcal{B} sono $-2, -1, 3$.

1227 **Proposizione 12.10.** Se $\mathcal{F} = \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n$ è una famiglia di vettori
 1228 in V_K e ogni vettore di V_K si esprime in modo unico come combinazione
 1229 lineare di \mathcal{F} , allora \mathcal{F} è una base di V_K .

1230 *Dimostrazione.* 1) $\langle \mathcal{F} \rangle$ è equivalente all'ipotesi che ogni $\mathbf{u} \in V$ si espri-
 1231 me come combinazione lineari di \mathcal{F} .

1232 2) Considero l'equazione nelle incognite $x_1, x_2, \dots, x_n \in K$:

$$x_1\mathbf{v}_1 + x_2\mathbf{v}_2 + \dots + x_n\mathbf{v}_n = \mathbf{0}. \quad (12.2)$$

1233 Vale:

$$0\mathbf{v}_1 + 0\mathbf{v}_2 + \dots + 0\mathbf{v}_n = \mathbf{0}. \quad (12.3)$$

1234 Le (12.2) e (12.3) esprimono entrambe $\mathbf{0}$ come combinazione lineare
 1235 di \mathcal{F} . Per ipotesi tali combinazioni lineari hanno gli stessi coefficienti,
 1236 quindi $x_1 = 0, x_2 = 0, \dots, x_n = 0$. Resta dimostrato che \mathcal{F} è
 1237 linearmente indipendente. \square

1238 **Osservazione 12.11.** Per la prop. 12.10, il punto 2) nello svolgimento
 1239 dell'es. 12.6 è superfluo.

1240 Si può dimostrare, e lo dimostreremo in un caso particolare, che

1241 **Teorema 12.12.** *Ogni spazio vettoriale ammette almeno una base.*

1242 **Osservazione 12.13.** $\{\mathbf{0}\}$ ha come unica base la famiglia vuota \emptyset .

1243 **Esercizio 12.14.** *Trovare una base sottospazio $W = \langle \mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \mathbf{w}_3 \rangle$ di*
 1244 \mathbb{R}^3 , dove

$$\mathbf{w}_1 = (1, 1, -2), \quad \mathbf{w}_2 = (2, -1, -1), \quad \mathbf{w}_3 = (0, -3, 3).$$

1245 *Svolgimento.* Essendo \mathbf{w}_1 combinazione lineare di $\mathbf{w}_2, \mathbf{w}_3$, vale

$$W = \langle \mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \mathbf{w}_3 \rangle = \langle \mathbf{w}_2, \mathbf{w}_3 \rangle.$$

1246 Quindi $\mathcal{F} = \mathbf{w}_2, \mathbf{w}_3$ è una famiglia di generatori di W , è linearmente
 1247 indipendente (cfr. es. 11.14), dunque è una base di W .

1248 L'idea alla base dell'esercizio si generalizza:

1249 **Proposizione 12.15.** *Ogni famiglia finita di generatori di uno spazio*
 1250 *vettoriale ne contiene una base.*

1251 *Dimostrazione. (Cenno.)* Supponiamo che $\mathcal{F} = \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_r$ sia una
 1252 famiglia di generatori dello spazio vettoriale V_K , cioè

$$\langle \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_r \rangle = V.$$

1253 Se \mathcal{F} è linearmente indipendente, allora soddisfa la definizione di base
1254 e non c'è altro da dimostrare. Se al contrario \mathcal{F} è linearmente dipen-
1255 dente e, per fissare le idee, \mathbf{v}_r è combinazione lineare degli altri vettori
1256 di \mathcal{F} , allora per il teorema 12.2 vale $\langle \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_{r-1} \rangle = V$. Se la fa-
1257 miglia $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_{r-1}$ è linearmente indipendente, allora è una base;
1258 altrimenti si può togliere un ulteriore vettore. Togliendo al massimo
1259 tutti i vettori si arriva a \emptyset , che è linearmente indipendente; quindi pri-
1260 ma o poi si raggiunge una famiglia linearmente indipendente, che è una
1261 base di V_K . \square

www.unidocs.it - Appunti e dispense per superare i tuoi esami universitari

www.unidocs.it - Appunti e dispense per superare i tuoi esami universitari



Lezione 13

Concetto di dimensione

Trovare, se esistono, quattro vettori linearmente indipendenti in \mathbb{R}^3 .

Richiami. Sia $\mathcal{F} = \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_r$ una famiglia di vettori in uno spazio vettoriale V_K .

(a) Se $\langle \mathcal{F} \rangle = V$ e \mathcal{F} è linearmente indipendente, allora \mathcal{F} si dice *base* di V_K (def. 12.3).

(b) *Teorema 12.2.* Se \mathcal{F} è linearmente dipendente, allora esiste $j \in \{1, 2, \dots, r\}$ tale che \mathbf{v}_j sia combinazione lineare di $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_{j-1}, \mathbf{v}_{j+1}, \dots, \mathbf{v}_r$; e viceversa. In tal caso $\langle \mathcal{F} \rangle = \langle \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_{j-1}, \mathbf{v}_{j+1}, \dots, \mathbf{v}_r \rangle$.

(c) *Proposizione 12.15.* Ogni famiglia finita di generatori di uno spazio vettoriale ne contiene una base.

Teorema 13.1 (Teorema dello scambio). *Sia $\mathcal{F} = \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_m$ una famiglia di generatori di uno spazio vettoriale V_K . Sia poi $\mathcal{G} =$*

1279 $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_r$ una famiglia linearmente indipendente in V_K . Allora
 1280 $r \leq m$. Inoltre in \mathcal{F} è possibile scegliere $m - r$ vettori $\mathbf{v}_{i_1}, \mathbf{v}_{i_2}, \dots,$
 1281 $\mathbf{v}_{i_{m-r}}$ in modo che

$$\langle \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_r, \mathbf{v}_{i_1}, \mathbf{v}_{i_2}, \dots, \mathbf{v}_{i_{m-r}} \rangle = V. \quad (13.1)$$

1282 *Dimostrazione.* Essendo \mathcal{F} una famiglia di generatori di V_K , esistono
 1283 degli scalari x_1, x_2, \dots, x_m tali che

$$\mathbf{u}_1 = x_1 \mathbf{v}_1 + x_2 \mathbf{v}_2 + \dots + x_m \mathbf{v}_m. \quad (13.2)$$

1284 Se valesse $x_1 = x_2 = \dots = x_m = 0$, allora $\mathbf{u}_1 = \mathbf{0}$, contro l'ipotesi che
 1285 \mathcal{G} sia linearmente indipendente. Previa un'eventuale permutazione di
 1286 $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_m$, possiamo supporre $x_1 \neq 0$. Dalla (13.2):

$$\mathbf{v}_1 = \frac{1}{x_1} \mathbf{u}_1 - \frac{x_2}{x_1} \mathbf{v}_2 - \frac{x_3}{x_1} \mathbf{v}_3 - \dots - \frac{x_m}{x_1} \mathbf{v}_m. \quad (13.3)$$

1287 Ne segue:

$$\begin{aligned} V &= \langle \mathcal{F} \rangle \\ &= \langle \mathbf{u}_1, \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_m \rangle \\ &= \langle \mathbf{u}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_m \rangle \end{aligned} \quad \left. \begin{array}{l} \text{Vero per ipotesi} \\ \text{Segue dalla proposizione:} \\ \text{se } \mathcal{F} \subseteq \mathcal{F}', \text{ allora } \langle \mathcal{F} \rangle \subseteq \langle \mathcal{F}' \rangle \\ \text{Segue dalla (13.3) e} \\ \text{dal teor. 12.2, seconda parte.} \end{array} \right\}$$

1289 Abbiamo fatto il cosiddetto "scambio" di \mathbf{v}_1 con \mathbf{u}_1 . Per quanto
 1290 sopra dimostrato, esistono degli scalari y_1, y_2, \dots, y_m tali che

$$\mathbf{u}_2 = y_1 \mathbf{u}_1 + y_2 \mathbf{v}_2 + \dots + y_m \mathbf{v}_m.$$

1291 Se valesse $y_2 = y_3 = \dots = y_m = 0$, allora si avrebbe $\mathbf{u}_2 = y_1 \mathbf{u}_1$ e
 1292 ciò contraddirebbe l'indipendenza di \mathcal{G} . Allora, previa un'eventuale
 1293 ulteriore permutazione di $\mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_m$, possiamo supporre $y_2 \neq 0$. Ne
 1294 segue

$$\mathbf{v}_2 = -\frac{y_1}{y_2} \mathbf{u}_1 + \frac{1}{y_2} \mathbf{u}_2 - \frac{y_3}{y_2} \mathbf{v}_3 - \dots - \frac{y_m}{y_2} \mathbf{v}_m$$

1295 e, con argomentazioni simili a quelle di sopra,

$$\begin{aligned} V &= \langle \mathbf{u}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \dots, \mathbf{v}_m \rangle = \langle \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \dots, \mathbf{v}_m \rangle \\ &= \langle \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{v}_3, \dots, \mathbf{v}_m \rangle. \end{aligned}$$

1296 Abbiamo fatto lo scambio di \mathbf{v}_2 con \mathbf{u}_2 . Ripetendo le stesse argomen-
1297 tazioni, è possibile fare lo scambio di \mathbf{v}_3 con \mathbf{u}_3 e così via, fino a quando
1298 una delle due famiglie si esaurisce.

1299 Supponiamo $r > m$. Quindi con m scambi si ottiene

$$V = \langle \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_m \rangle;$$

1300 ne segue che \mathbf{u}_r è combinazione lineare di $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_m$, contraddicen-
1301 do l'ipotesi che \mathcal{G} sia linearmente indipendente. L'assurdo prova che
1302 $r \leq m$ e quindi

$$V = \langle \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_r, \mathbf{v}_{r+1}, \mathbf{v}_{r+2}, \dots, \mathbf{v}_m \rangle.$$

1303 Riattribuendo a ciascuno dei vettori $\mathbf{v}_{r+1}, \mathbf{v}_{r+2}, \dots, \mathbf{v}_m$ l'indice che
1304 aveva in origine, prima delle permutazioni, si ottiene la (13.1). \square

1305 La disequazione $r \leq m$ nel teorema dello scambio significa che
1306 ogni famiglia linearmente indipendente in V_K ha un numero di vettori
1307 minore o uguale al numero di vettori di ogni famiglia di generatori di
1308 V_K .

1310 *Risposta alla domanda iniziale.* Una base di \mathbb{R}^3 è $\mathcal{N} = (1, 0, 0), (0, 1, 0),$
1311 $(0, 0, 1)$. Siccome \mathbb{R}^3 ammette questa famiglia di tre generatori, ogni fa-
1312 miglia linearmente indipendente in \mathbb{R}^3 ha non più di tre vettori. Quindi
1313 non esiste una famiglia con la proprietà richiesta. (L'idea alla base della
1314 risposta verrà generalizzata nella prop. 13.4.)

1315 **Teorema 13.2.** Sia $\mathcal{B} = \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_m$ una base finita di uno spazio
 1316 vettoriale V_K . Allora ogni altra base di V_K è composta dallo stesso
 1317 numero, m , di vettori.

1318 *Dimostrazione.* Consideriamo un'altra base \mathcal{B}' di V_K . Se \mathcal{B}' ha più
 1319 vettori di \mathcal{B} , allora consideriamone un numero $r > m$, formanti una
 1320 famiglia \mathcal{G} , che risulta linearmente indipendente. Dal teorema dello
 1321 scambio, con $\mathcal{F} = \mathcal{B}$, segue $r \leq m$, assurdo. Ne segue che \mathcal{B}' è una fa-
 1322 miglia finita il cui numero di vettori, diciamo s , soddisfa la disequazione
 1323 $s \leq m$.

1324 Considerando ora il fatto che \mathcal{B}' è una famiglia di generatori di V_K e
 1325 che \mathcal{B} è una famiglia linearmente indipendente, dal teorema dello scam-
 1326 bio otteniamo $m \leq s$. Combinando ciò con la disequazione precedente
 1327 otteniamo $s = m$. \square

1328 **Definizione 13.3.** Se uno spazio vettoriale V_K ha una base finita com-
 1329 posta da n vettori, si dirà che n è la *dimensione* di V_K , $\dim V_K = n$.
 1330 Se V_K non ha una base finita, allora si pone $\dim V_K = \infty$.

1331 **Proposizione 13.4.** In uno spazio vettoriale V_K di dimensione $n \in \mathbb{N}$:

- 1332 (i) ogni famiglia \mathcal{H} con più di n vettori è linearmente dipendente;
 1333 (ii) ogni famiglia \mathcal{H} con meno di n vettori non è una famiglia di
 1334 generatori di V_K .

1335 *Dimostrazione.* Per ipotesi V_K ha una base \mathcal{B} composta da n vettori.

1336 (i) Se \mathcal{H} è linearmente indipendente, allora dal teorema dello scam-
 1337 bio (facendovi $\mathcal{G} = \mathcal{H}$ e $\mathcal{F} = \mathcal{B}$) si deduce che \mathcal{H} ha un numero minore
 1338 o uguale a n di vettori.

1339 (ii) Se \mathcal{H}' è una famiglia di generatori di V_K , allora dal teorema
 1340 dello scambio (facendovi $\mathcal{G} = \mathcal{B}$ e $\mathcal{F} = \mathcal{H}'$) si deduce che \mathcal{H} ha un
 1341 numero maggiore o uguale a n di vettori. \square

1342 **Teorema 13.5** (Teorema di completamento della base). Sia $\mathcal{B} =$
 1343 $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n$ una base di uno spazio vettoriale V_K e $\mathcal{G} = \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_r$
 1344 una famiglia linearmente indipendente di vettori in V_K . Allora in \mathcal{B} si
 1345 possono prendere $n - r$ vettori che, aggregati a \mathcal{G} , formino una base di
 1346 V_K .

1347 *Dimostrazione.* Ponendo $\mathcal{F} = \mathcal{B}$, $m = n$, sono soddisfatte le ipotesi
 1348 del teorema dello scambio. Quindi esistono $n - r$ vettori $\mathbf{v}_{i_1}, \mathbf{v}_{i_2}, \dots,$
 1349 $\mathbf{v}_{i_{n-r}}$ in \mathcal{B} , tali che

$$\langle \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_r, \mathbf{v}_{i_1}, \mathbf{v}_{i_2}, \dots, \mathbf{v}_{i_{n-r}} \rangle = V.$$

1350 Consideriamo la famiglia $\mathcal{H} = \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_r, \mathbf{v}_{i_1}, \mathbf{v}_{i_2}, \dots, \mathbf{v}_{i_{n-r}}$ di cui
 1351 sopra. La famiglia \mathcal{H} è una famiglia di generatori di V_K , composta da
 1352 n vettori. Per la prop. 12.15, \mathcal{H} contiene una base, che per il teorema
 1353 13.2 deve contenere lo stesso numero di vettori di \mathcal{B} , quindi n . Ne
 1354 segue che \mathcal{H} è già una base di V_K . \square

1355 **Proposizione 13.6.** Sia V_K uno spazio vettoriale di dimensione finita
 1356 n . Allora (i) ogni famiglia di generatori di V_K composta da n vettori è
 1357 una base; (ii) ogni famiglia linearmente indipendente in V_K , composta
 1358 da n vettori, è una base.

1359 *Dimostrazione.* (i) Consideriamo una famiglia \mathcal{F} composta da n vet-
 1360 tori e tale che $\langle \mathcal{F} \rangle = V$. Per la prop. 12.15, \mathcal{F} contiene una base e ogni
 1361 base è composta da n vettori. Ne segue che \mathcal{F} è una base.

1362 (ii) Per ipotesi esiste una base \mathcal{B} di V_K formata da n vettori. Con-
 1363 sideriamo una famiglia \mathcal{F}' , linearmente indipendente, composta da n
 1364 vettori. Per il teorema di completamento della base (facendo in esso
 1365 $\mathcal{G} = \mathcal{F}'$ e quindi $r = n$), è possibile aggregare ad \mathcal{F}' , $n - r = 0$ vettori
 1366 in modo da ottenere una base. Questo significa che \mathcal{F}' è una base. \square

1367 **Esercizio 13.7.** (a) Esiste una base di \mathbb{R}^3 contenente i vettori $\mathbf{v}_1 =$
 1368 $(1, 1, 1)$, $\mathbf{v}_2 = (1, 2, 2)$? (b) Se esiste una tale base, trovarla.

1369 *Svolgimento.* (a) La famiglia $\mathcal{F} = \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2$ è linearmente indipendente.
 1370 Per il teorema di completamento della base, da ogni base di \mathbb{R}^3 è pos-
 1371 sibile estrarre $n - r = 3 - 2 = 1$ vettore \mathbf{v} tale che $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}$ sia una
 1372 base di \mathbb{R}^3 . La risposta è quindi affermativa.

1373 (b) Il vettore \mathbf{v} può essere scelto in

$$\mathcal{N} = \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3 = (1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1).$$

Stabilisco se $\mathcal{F}_1 = \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{e}_1$ è una base di \mathbb{R}^3 . Studio la dipendenza lineare di \mathcal{F}_1 , risolvendo:

$$\begin{aligned} x\mathbf{v}_1 + y\mathbf{v}_2 + z\mathbf{e}_1 = \mathbf{0} &\Leftrightarrow x(1, 1, 1) + y(1, 2, 2) + z(1, 0, 0) = (0, 0, 0) \\ &\Leftrightarrow (x + y + z, x + 2y, x + 2y) = (0, 0, 0) \Leftrightarrow \begin{cases} x + y + z = 0 \\ x + 2y = 0. \end{cases} \end{aligned}$$

1374 Tra le soluzioni, il sistema ha anche $x = -2, y = 1, z = 1$, quindi \mathcal{F}_1
 1375 è linearmente dipendente e non è una base.

Stabilisco allora se $\mathcal{F}_1 = \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{e}_2$ è una base di \mathbb{R}^3 . Studio la dipendenza lineare di \mathcal{F}_2 , risolvendo:

$$\begin{aligned} x\mathbf{v}_1 + y\mathbf{v}_2 + z\mathbf{e}_2 = \mathbf{0} &\Leftrightarrow x(1, 1, 1) + y(1, 2, 2) + z(0, 1, 0) = (0, 0, 0) \\ &\Leftrightarrow (x + y, x + 2y + z, x + 2y) = (0, 0, 0) \Leftrightarrow \begin{cases} x + y = 0 \\ x + 2y + z = 0 \\ x + 2y = 0 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} y = -x \\ -x + z = 0 \\ -x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = y = z = 0. \end{aligned}$$

1376 Quindi \mathcal{F}_2 è linearmente indipendente. Per la prop. 13.6 (ii), \mathcal{F}_2 è una
 1377 base¹.

¹Cioè la prop. 13.6 permette di omettere la verifica di $\langle \mathcal{F}_2 \rangle = \mathbb{R}^3$.

Lezione 14

Ancora su basi e dimensione

Dati due sottospazi W_1 e W_2 di uno spazio vettoriale V_K , che relazione esiste tra $\dim W_1$, $\dim W_2$ e $\dim(W_1 + W_2)$?

Osservazione 14.1. Come risposta, $\dim(W_1 + W_2) = \dim W_1 + \dim W_2$ è sicuramente sbagliata: infatti, se $W_1 = W_2 \neq \{0\}$, allora

$$W_1 + W_2 = \{\mathbf{w}_1 + \mathbf{w}_2 \mid \mathbf{w}_1 \in W_1, \mathbf{w}_2 \in W_2\} = W_1 = W_2,$$

quindi posto $\dim W_1 = r > 0$ vale $\dim(W_1 + W_2) = r$ mentre $\dim W_1 + \dim W_2 = 2r \neq r$.

Proposizione 14.2. *Siano W_1 e W_2 sottospazi di uno spazio vettoriale V_K ; siano, inoltre, \mathcal{G}_1 e \mathcal{G}_2 due famiglie di generatori di, rispettivamente, W_1 e W_2 . Allora $\mathcal{G}_1 \cup \mathcal{G}_2$ è una famiglia di generatori di $W_1 + W_2$.*

Dimostrazione. (Nel caso di famiglie finite non vuote.) Poniamo

$$\mathcal{G}_1 = \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_r, \quad \mathcal{G}_2 = \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_s.$$

1393 Per ipotesi e definizione di sottospazio generato

$$\begin{aligned} W_1 &= \{x_1 \mathbf{v}_1 + x_2 \mathbf{v}_2 + \cdots + x_r \mathbf{v}_r \mid x_1, x_2, \dots, x_r \in K\}, \\ W_2 &= \{y_1 \mathbf{u}_1 + y_2 \mathbf{u}_2 + \cdots + y_s \mathbf{u}_s \mid y_1, y_2, \dots, y_s \in K\}. \end{aligned}$$

Ne segue

$$\begin{aligned} W_1 + W_2 &= \{\mathbf{w}_1 + \mathbf{w}_2 \mid \mathbf{w}_1 \in W_1, \mathbf{w}_2 \in W_2\} = \\ &= \{x_1 \mathbf{v}_1 + \cdots + x_r \mathbf{v}_r + y_1 \mathbf{u}_1 + \cdots + y_s \mathbf{u}_s \mid x_1, \dots, y_s \in K\} = \\ &= \langle \mathcal{G}_1 \cup \mathcal{G}_2 \rangle. \end{aligned}$$

1394

□

1395 **Proposizione 14.3.** *Se W_1 e W_2 sono sottospazi di dimensione finita*
 1396 *in uno spazio vettoriale V_K , allora anche $\dim(W_1 + W_2)$ è finita e*
 1397 *$\dim(W_1 + W_2) \leq \dim W_1 + \dim W_2$.*

1398 *Dimostrazione.* Poniamo $r = \dim W_1$, $s = \dim W_2$. Quindi W_1 e W_2
 1399 hanno due basi, chiamiamole \mathcal{G}_1 e \mathcal{G}_2 , con, rispettivamente, r ed s
 1400 elementi. Per la prop. 14.2, vale $\langle \mathcal{G}_1 \cup \mathcal{G}_2 \rangle = W_1 + W_2$, quindi $\mathcal{G}_1 \cup$
 1401 \mathcal{G}_2 contiene una base \mathcal{B} di $W_1 + W_2$, la quale ha allora $n \leq r + s$
 1402 elementi. La tesi segue osservando $n = \dim(W_1 + W_2)$, $r = \dim W_1$,
 1403 $s = \dim W_2$. □

1404 Una risposta precisa al problema è data dalla seguente *formula di*
 1405 *Grassmann* valida per due sottospazi qualsiasi W_1 e W_2 di dimensioni
 1406 finite di uno spazio vettoriale V_K , che enunciamo senza dimostrazione:

$$\dim(W_1 + W_2) + \dim(W_1 \cap W_2) = \dim W_1 + \dim W_2. \quad (14.1)$$

1408

1409 **Corollario 14.4.** *Dati due sottospazi W_1 e W_2 in uno spazio vettoriale*
 1410 *V_K , di dimensione finita, risulta $\dim(W_1 + W_2) = \dim W_1 + \dim W_2$*
 1411 *se, e solo se, la somma $W_1 + W_2$ è diretta.*

1412

Dimostrazione.

1413

$$\begin{array}{l}
 \Leftrightarrow \dim(W_1 + W_2) = \dim W_1 + \dim W_2 \\
 \Leftrightarrow \dim(W_1 \cap W_2) = 0 \\
 \Leftrightarrow W_1 \cap W_2 = \{\mathbf{0}\} \\
 \Leftrightarrow W_1 + W_2 \text{ è diretta}
 \end{array}
 \left|
 \begin{array}{l}
 \text{Segue dalla (14.1)} \\
 \text{perché } \langle \emptyset \rangle = \{\mathbf{0}\} \\
 \text{Teor. 10.7: } W_1 \cap W_2 = \{\mathbf{0}\} \\
 \Leftrightarrow W_1 + W_2 \text{ è diretta. } \square
 \end{array}
 \right.$$

1414

Esercizio 14.5. *Dati i seguenti sottospazi di \mathbb{R}^4 :*

$$\begin{aligned}
 W_1 &= \{(x, y, z, 0) \in \mathbb{R}^4 \mid x + y + z = 0\}, \\
 W_2 &= \langle (1, 0, 0, 1), (1, 1, -1, 1), (1, 2, -2, 1) \rangle,
 \end{aligned}$$

1415

(a) trovare una base di W_1 , di W_2 e di $W_1 + W_2$, (b) stabilire se la

1416

*somma $W_1 + W_2$ è diretta.**Svolgimento.*

$$\begin{aligned}
 (a) \quad W_1 &= \{(x, y, -x - y, 0) \mid x, y \in \mathbb{R}\} = \\
 &= \{(x, 0, -x, 0) + (0, y, -y, 0) \mid x, y \in \mathbb{R}\} = \\
 &= \{x(1, 0, -1, 0) + y(0, 1, -1, 0) \mid x, y \in \mathbb{R}\} = \\
 &= \langle (1, 0, -1, 0), (0, 1, -1, 0) \rangle.
 \end{aligned}$$

1417

Una base di W_1 è $\mathcal{B} = (1, 0, -1, 0), (0, 1, -1, 0)$.

1418

Ora studio la dipendenza lineare della seguente famiglia di generatori di W_2 :

1419

$$\mathcal{F} = (1, 0, 0, 1), (1, 1, -1, 1), (1, 2, -2, 1),$$

risolvendo

$$\begin{aligned}
 & x(1, 0, 0, 1) + y(1, 1, -1, 1) + z(1, 2, -2, 1) = \mathbf{0} \\
 \Leftrightarrow & (x + y + z, y + 2z, -y - 2z, x + y + z) = (0, 0, 0, 0) \\
 \Leftrightarrow & \begin{cases} x + y + z = 0 \\ y + 2z = 0 \\ -y - 2z \neq 0 \\ x + y + z \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -y - z = z \\ y = -2z \end{cases}
 \end{aligned}$$

che ha come soluzione, per esempio, $x = 1, y = -2, z = 1$. Quindi \mathcal{F} è linearmente dipendente e $(1, 0, 0, 1) = 2(1, 1, -1, 1) - (1, 2, -2, 1)$. Ne deduco $W_2 = \langle (1, 1, -1, 1), (1, 2, -2, 1) \rangle$. Una base di W_2 è $\mathcal{B}_2 = (1, 1, -1, 1), (1, 2, -2, 1)$. Per la prop. 14.2, una famiglia di generatori di $W_1 + W_2$ è $\mathcal{B}_1 \cup \mathcal{B}_2$. Studio la dipendenza lineare di $\mathcal{B}_1 \cup \mathcal{B}_2$, risolvendo:

$$\begin{aligned}
 & x(1, 0, -1, 0) + y(0, 1, -1, 0) + z(1, 1, -1, 1) + t(1, 2, -2, 1) = (0, 0, 0, 0) \\
 \Leftrightarrow & (x + z + t, y + z + 2t, -x - y - z - 2t, z + t) = (0, 0, 0, 0) \\
 \Leftrightarrow & \begin{cases} x + z + t = 0 \\ y + z + 2t = 0 \\ -x - y - z - 2t = 0 \\ z + t = 0. \end{cases}
 \end{aligned}$$

¹⁴²⁰ Alla terza equazione sommo la prima, ottenendo

$$\begin{cases} x + z + t = 0 \\ y + z + 2t = 0 \\ -y - t = 0 \\ z + t = 0. \end{cases}$$

¹⁴²¹ Alla terza equazione sommo la seconda:

$$\begin{cases} x + z + t = 0 \\ y + z + 2t = 0 \\ z + t = 0. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -z - t = 0 \\ y = -z - 2t = -t \\ z = -t. \end{cases}$$

Questo sistema ha come soluzioni anche $x = 0, y = -1, z = -1, t = 1$, da cui

$$\begin{aligned} -(0, 1, -1, 0) - (1, 1, -1, 1) + (1, 2, -2, 1) &= (0, 0, 0, 0) \\ \Rightarrow (1, 2, -2, 1) &= (0, 1, -1, 0) + (1, 1, -1, 1). \end{aligned}$$

Ne segue $W_1 + W_2 = \langle (1, 0, -1, 0), (0, 1, -1, 0), (1, 1, -1, 1) \rangle$. Studio ora la dipendenza lineare di $\mathcal{G} = (1, 0, -1, 0), (0, 1, -1, 0), (1, 1, -1, 1)$, risolvendo

$$\begin{aligned} x(1, 0, -1, 0) + y(0, 1, -1, 0) + z(1, 1, -1, 1) &= (0, 0, 0, 0) \\ \Leftrightarrow (x + z, y + z, -x - y - z, z) &= (0, 0, 0, 0) \\ \Leftrightarrow \begin{cases} x + z = 0 \\ y + z = 0 \\ -x - y - z = 0 \\ z = 0 \end{cases} &\Leftrightarrow x = y = z = 0. \end{aligned}$$

1422 Quindi \mathcal{G} è una famiglia linearmente indipendente e una base di $W_1 +$
1423 W_2 .

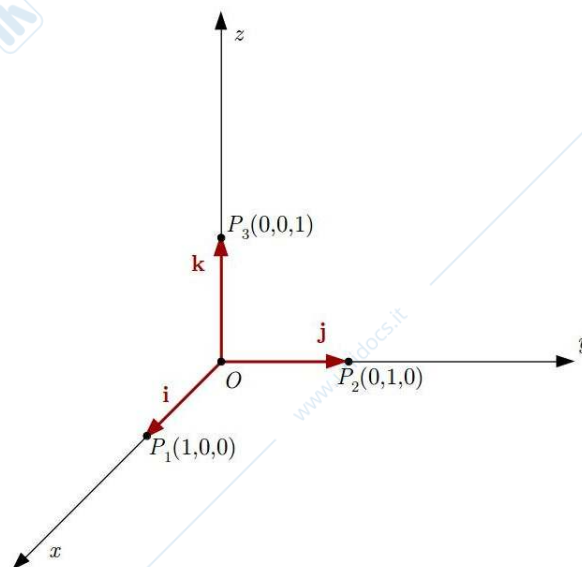
1424 (b) Dal punto precedente, $\dim W_1 = \dim W_2 = 2$ e $\dim(W_1 + W_2) =$
1425 3 , quindi $\dim(W_1 + W_2) \neq \dim W_1 + \dim W_2$ e per il cor. 14.4 la somma
1426 $W_1 + W_2$ non è diretta.

1427 *Una base per lo spazio vettoriale \mathcal{V} dei vettori geometrici.* Consi-
1428 deriamo un sistema di riferimento (un'origine O , tre assi ortogonali,
1429 un'unità di misura). Definiamo i vettori $\mathbf{i} = \overrightarrow{OP_1}$, $\mathbf{j} = \overrightarrow{OP_2}$, $\mathbf{k} = \overrightarrow{OP_3}$
1430 (cfr. fig. 14.1).

1431 **Proposizione 14.6.** (i) Un punto P dello spazio ha coordinate $x, y,$
1432 z se, e solo se,

$$\overrightarrow{OP} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}.$$

1433 (ii) Per ogni $\mathbf{v} \in \mathcal{V}$ esiste un unico punto P tale che $\overrightarrow{OP} = \mathbf{v}$.

Figura 14.1: I vettori \mathbf{i} , \mathbf{j} , \mathbf{k} .

1434 **Notazioni 14.7.** Scrivendo $P(x, y, z)$ si intenderà che x, y, z sono le
 1435 coordinate del punto P , rispetto a un sistema di riferimento sottinteso.

1436 Da (i) e (ii) segue che ogni $\mathbf{v} \in \mathcal{V}$ si esprime in modo unico come
 1437 combinazione lineare di $\mathcal{B} = \mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$; ne segue che \mathcal{B} è una base di \mathcal{V} (cfr.
 1438 prop. 12.10). In particolare, $\dim \mathcal{V} = 3$.

1439 \diamond Esistono basi di \mathcal{V} in cui i vettori *non* sono perpendicolari e *non*
 1440 hanno lunghezze uguali.

1441 **Osservazione 14.8.** Un sistema di riferimento può essere definito,
 1442 in alternativa, assegnando un punto O (detto *origine*) e tre vettori
 1443 $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ di lunghezza 1, a due a due perpendicolari. Useremo questo
 1444 approccio in futuro e denoteremo tale riferimento con $RC(O\mathbf{ijk})$ (“RC”
 1445 = *riferimento cartesiano*).

1446 Dati due punti $P_1(x_1, y_1, z_1)$ e $P_2(x_2, y_2, z_2)$, si ha:

$$\overrightarrow{OP_2} = \overrightarrow{OP_1} + \overrightarrow{P_1P_2}, \quad \overrightarrow{OP_i} = x_i\mathbf{i} + y_i\mathbf{j} + z_i\mathbf{k}, \quad i = 1, 2, \quad (14.2)$$

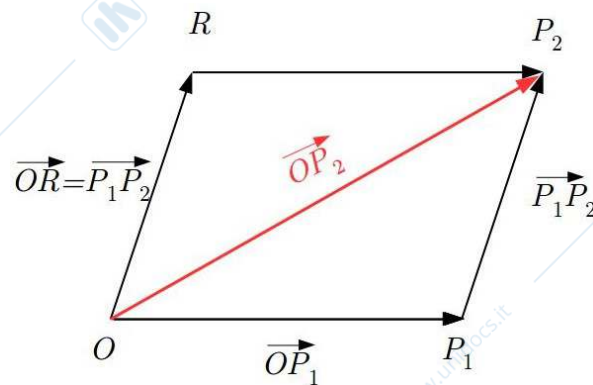


Figura 14.2: Equazione (14.2).

da cui deduciamo

$$\overrightarrow{P_1P_2} = \overrightarrow{OP_2} - \overrightarrow{OP_1} = (x_2 - x_1)\mathbf{i} + (y_2 - y_1)\mathbf{j} + (z_2 - z_1)\mathbf{k},$$

vale a dire che fissato il riferimento cartesiano $RC(Oijk)$, le coordinate del vettore $\overrightarrow{P_1P_2}$ rispetto alla base $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ si ottengono per differenza dalle coordinate dei due punti in quel riferimento.

Esercizio 14.9. Se $\mathcal{B} = \mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ è una base definita come sopra, stabilire se $\mathcal{F} = \mathbf{i}, \mathbf{i} + \mathbf{j}, \mathbf{i} + \mathbf{k}$ è una base di \mathcal{V} .

Svolgimento. Studio la dipendenza lineare di \mathcal{F} : risolvo l'equazione

$$x\mathbf{i} + y(\mathbf{i} + \mathbf{j}) + z(\mathbf{i} + \mathbf{k}) = \mathbf{0} \Leftrightarrow (x + y + z)\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k} = \mathbf{0}.$$

Siccome \mathcal{B} è linearmente indipendente, l'ultima equazione equivale a

$$\begin{cases} x + y + z = 0 \\ y = 0 \\ z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = y = z = 0,$$

quindi \mathcal{F} è linearmente indipendente. Siccome $\dim \mathcal{V} = 3$ e \mathcal{F} è una famiglia di tre vettori in \mathcal{V} linearmente indipendente, \mathcal{F} è necessariamente una base (prop. 13.6 (ii)).

1458 **Esercizio 14.10.** *Dati i seguenti sottospazi di $\mathcal{M}(2 \times 2, \mathbb{R})$: $W_1 =$*
 1459 *$\langle A, B \rangle$; $W_2 = \langle C, D \rangle$ dove*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad D = AB,$$

- 1460 (a) *trovare delle basi di $W_1, W_2, W_1 + W_2, W_1 \cap W_2,$*
 1461 (b) *verificare la formula di Grassmann in questo caso,*
 1462 (c) *dire se la somma $W_1 + W_2$ è diretta,*
 1463 (d) *determinare una base di $\mathcal{M}(2 \times 2, \mathbb{R})$ che contenga la base di $W_1 +$*
 1464 *W_2 trovata al punto (a).*

Svolgimento. In primo luogo $D = AB = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$.

(a) A, B sono linearmente indipendenti, quindi una base di W_1 è $\mathcal{B}_1 = A, B$. Analogamente una base di W_2 è $\mathcal{B}_2 = C, D$. Una famiglia di generatori di $W_1 + W_2$ è $\mathcal{B}_1 \cup \mathcal{B}_2$. Ne studiamo la dipendenza lineare, risolvendo l'equazione

$$xA + yB + zC + tD = O_{2 \times 2} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x + y + t & -y + z - t \\ 2x + 2t & -x - y - t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} x + y + t = 0 \\ -y + z - t = 0 \\ 2x + 2t = 0 \\ -x - y - t = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z = t \\ x = -t \\ y = 0. \end{cases}$$

La famiglia $\mathcal{B}_1 \cup \mathcal{B}_2$ è linearmente dipendente. Prendendo $t = 1$ si ricava $-A + C + D = O_{2 \times 2}$, quindi $A = C + D$; allora $\langle B, C, D \rangle = W_1 + W_2$.

Studiamo ora la dipendenza lineare della famiglia B, C, D :

$$yB + zC + tD = O_{2 \times 2} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} y+t & -yz-t \\ 2t & -y-t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} y+t = 0 \\ -y+z-t = 0 \\ 2t = 0 \\ -y-t = 0 \end{cases} \Leftrightarrow y = z = t = 0.$$

Ne segue che $\mathcal{B}_3 = B, C, D$ è una base di $W_1 + W_2$. Per trovare l'intersezione consideriamo che

$$W_1 = \{xA + yB \mid x, y \in \mathbb{R}\} = \left\{ \begin{pmatrix} x+y & -y \\ 2x & -x-y \end{pmatrix} \mid x, y \in \mathbb{R} \right\},$$

$$W_2 = \{zC + tD \mid z, t \in \mathbb{R}\} = \left\{ \begin{pmatrix} t & z-t \\ 2t & -t \end{pmatrix} \mid z, t \in \mathbb{R} \right\}.$$

1465 Cerchiamo i vettori comuni ai due sottospazi uguagliandone gli ele-
1466 menti generici:

$$\begin{pmatrix} x+y & -y \\ 2x & -x-y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t & z-t \\ 2t & -t \end{pmatrix}.$$

1467 Ne deriva il sistema

$$\begin{cases} x+y-t = 0 \\ -y-z+t = 0 \\ 2x-2t = 0 \\ -x-y+t = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z = t \\ x = t \\ y = 0. \end{cases}$$

1468 Sostituendo i valori di x e y trovati nell'espressione della generica
1469 matrice in W_1 si ha

$$W_1 \cap W_2 = \left\{ \begin{pmatrix} t & 0 \\ 2t & -t \end{pmatrix} \mid t \in \mathbb{R} \right\} = \left\langle \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \right\rangle.$$

1470 Una base di $W_1 \cap W_2$ è $\mathcal{B}_4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$.

1471 (b) Abbiamo $\dim(W_1 + W_2) = 3$, $\dim(W_1 \cap W_2) = 1$, $\dim W_1 =$
 1472 $\dim W_2 = 1$, quindi in questo caso la (14.1) si riformula in $3+1 = 2+2$,
 1473 che è un'identità.

1474 (c) $W_1 \cap W_2$ non è il sottospazio nullo, quindi la somma non è diretta.

1475 (d) Una base¹ di $\mathcal{M}(2 \times 2, \mathbb{R})$ è $\mathcal{B} = E_1, E_2, E_3, E_4$ dove

$$E_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad E_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad E_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad E_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix};$$

1476 questo perché ogni matrice reale 2×2 si esprime in modo unico come
 1477 combinazione lineare di \mathcal{B} (prop. 12.10). Per il teorema 13.5 di com-
 1478 pletamento della base, una di queste quattro matrici può essere aggre-
 1479 gata alle tre che compongono \mathcal{B}_3 per ottenere una base di $\mathcal{M}(2 \times 2, \mathbb{R})$.
 1480 Studiando la dipendenza di B, C, D, E_1 , cioè risolvendo

$$xB + yC + zD + tE_1 = O_{2 \times 2}$$

1481 si ottiene il sistema

$$\begin{cases} x + z + t = 0 \\ -x + y - z = 0 \\ 2z = 0 \\ -x - z = 0 \end{cases}$$

1482 che ha come soluzione $x = y = z = t = 0$. Allora la famiglia $\mathcal{B}_5 = B,$
 1483 C, D, E_1 è linearmente indipendente, quindi (prop. 13.6) una base di
 1484 $\mathcal{M}(2 \times 2, \mathbb{R})$ che come richiesto contiene \mathcal{B}_3 .

1485 **Esercizio 14.11.** Con riferimento all'eserc. 14.5,

1486 (c) trovare una base di $W_1 \cap W_2$,

1487 (d) verificare la formula di Grassmann in questo caso,

1488 (e) determinare una base di \mathbb{R}^4 che contenga la base di $W_1 + W_2$ trovata
 1489 al punto (a).

¹D'ora in avanti chiameremo *naturale* questa base di matrici.