Teo.

Se $g : V \times V \mapsto \mathbb{R}$ è prodotto scalare, allora

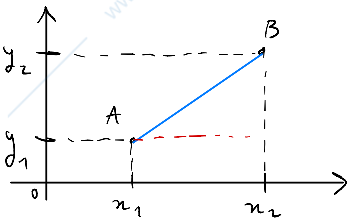
$$\| \underline{v} \| = \sqrt{g(\underline{v}, \underline{v})}$$

è una NORMA nel senso della DEF. (1).

Esempio in $\mathbb{R}^2$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} = A \qquad \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} = B$$

$$\langle A, B \rangle = x_1 x_2 + y_1 y_2 \qquad \| A \| = \sqrt{x_1^2 + y_2^2}$$



La lunghezza del segmento AB è $\| B - A \|$ =

$$\overline{AB} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

Esempio

Sia A matrice quadrata di ordine 2 $\quad A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$

Definisco $g_A(\underline{X}, \underline{Y}) = \underline{X}^t A \underline{Y}$

dove $\underline{X} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \quad \underline{Y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$

$$\Rightarrow g_A(\underline{X}, \underline{Y}) = (x_1, x_2) \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}.$$

?: Si verifichi se g_A è un prodotto scalare.

In generale NO: dovrei avere che, $\forall \underline{X}, \underline{Y} \in \mathbb{R}^2$

$$(x_1, x_2) \, A \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = (y_1, y_2) \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

Consideriamo $\underline{e}_1 = \underline{x}$, $\underline{e}_2 = \underline{y}$

$$(1,0)\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = (a_{11}, a_{12})\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = a_{12}$$

$$\not\parallel$$

$$(0,1)\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = (a_{21}, a_{22})\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = a_{21}$$

Se non avessi pensato di scegliere $\underline{e}_1, \underline{e}_2$, avrei potuto procedere in in generale/astratto:

$$(x_1, x_2)\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = (a_{11}x_1 + a_{21}x_2, a_{12}x_1 + a_{22}x_2)\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} =$$

$$= a_{11}x_1y_1 + a_{21}x_2y_1 + a_{12}x_1y_2 + a_{22}x_2y_2$$

Se fosse $g_A(\underline{x}, \underline{y}) = g_A(\underline{y}, \underline{x}) =$

$$= a_{11}x_1y_1 + a_{22}x_2y_2 + a_{21}y_2x_1 + a_{12}y_1x_2$$

Deve essere

$$a_{21}y_2x_1 + a_{12}y_1x_2 = a_{21}x_2y_1 + a_{12}x_1y_2 \quad \forall \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow$ sistema lineare $\dots \Rightarrow a_{12} = a_{21} \Rightarrow A$ deve essere simmetrica

Se $A = \begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix} \Rightarrow (x_1, y_1)\begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \geq 0 \quad \forall \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}$

$$\Rightarrow (ax_1 + by_1, bx_1 + cy_2)\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} \geq 0 \quad \forall \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}$$

Chiaro che era più semplice prendere dei vettori particolari $\underline{x}, \underline{y}$ convenienti e verificare che non è vero.

Torniamo al prodotto scalare generico.

DEF. Ortogonali e Ortonormali

Sia $g : V \times V \mapsto \mathbb{R}$ un prodotto scalare. $\underline{v}$ e $\underline{w}$ si dicono ORTOGONALI se $g(\underline{v}, \underline{w}) = 0$

Si dicono ORTONORMALI se sono ortogonali e $\|\underline{v}\| = \|w\| = 1$

Quando in $\mathbb{R}^2$ prendo

sto considerando delle x e delle y perpendicolari.

versori

$\underline{e}_1 = (1, 0)$ $\quad$ $\underline{e}_2 = (0, 1)$

$\langle \underline{e}_1, \underline{e}_2 \rangle = 0$

DEF. Base ortonormale

Sia $B = \{\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_n\}$ base per V su cui ho definito un prodotto scalare g.

B si dice BASE ORTONORMALE di V rispetto a g se

i. $g(\underline{v}_i, \underline{v}_j) = 0 \quad \forall i \neq j$

ii. $\|\underline{v}_i\| = 1 \quad \forall i \in \{1, \dots, n\}$

Togliendo la condizione (ii) si parla di base ortogonale.

DEF.

Sia $g : V \times V$ prodotto scalare su V e sia $B = \{\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_n\}$ base.

Si dice matrice associata a g la matrice $A = M_B(g)$ con

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \quad \text{dove} \quad a_{ij} = g(\underline{v}_i, \underline{v}_j)$$

TEO.

Se g é un prodotto scalare su V, allora basta conoscere $g(\underline{v}_1, \underline{v}_2)$ per $\underline{v}_i, \underline{v}_j \in B = \{\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_n\}$.

Se $M_B(g)$ é la matrice associata a g rispetto alla base B, allora $\forall \underline{v}, \underline{w} \in V$ se $\underline{X}_B$ é il vettore delle coordinate di $\underline{v}$ rispetto a B e $\underline{Y}_B$ il vettore delle coordinate di $\underline{w}$ rispetto a B, si ha che:

$$g(\underline{v}, \underline{w}) = \underline{X}_B^t \cdot M_B(g) \cdot \underline{Y}$$

Lezione 17 - 20/05/22

$M_B(g)$: matrice associata al prodotto scalare g rispetto alla base B.

Esempio

Sia $P_n = \{$ polinomi a coeff. reali di grado $\leq n \}$

$$\langle p(x), q(x) \rangle = \int_{-1}^{1} p(x)\, q(x)\, dx$$

Cerco se 2 polinomi sono ortogonali, cioè se $\langle p(x), q(x) \rangle = 0$

Posso risolvere l'integrale oppure sfruttare la matrice associata $M_B(g)$

a) Prima verifichiamo che $\langle p(x), q(x) \rangle$ è prodotto scalare.

i. $\langle p(x) + r(x), q(x) \rangle = \langle p(x), q(x) \rangle + \langle r(x), q(x) \rangle$

$\Rightarrow \langle p(x) + r(x), q(x) \rangle = \int_{-1}^{1} [p(x) + r(x)]\, q(x)\, dx =$

$= \int_{-1}^{1} p(x)\, q(x)\, dx + \int_{-1}^{1} r(x)\, q(x)\, dx = \langle p(x), q(x) \rangle + \langle r(x), q(x) \rangle$

ii. $\langle p(x), p(x) \rangle \geq 0$

$= \int_{-1}^{1} p(x)^2\, dx \geq 0$ sempre, e $= 0 \iff p(x) = 0$

iii. $\langle p(x), q(x) \rangle = \langle q(x), p(x) \rangle$ evidente

b) Consideriamo $n = 2$, $B = \{1, x, x^2\}$ e mi chiedo:

$p(x) = 5 + 3x - 1$, $q(x) = -2 - 2x + x^2$ sono ortogonali?

$\Rightarrow$ ortogonali $\iff \int_{-1}^{1} p(x)\, q(x)\, dx = 0$

oppure, invece di calcolare l'integrale sopra, calcolo una volta per tutte qualche integrale e poi uso le matrici.

$$\Rightarrow \text{costruisco } M_B(\langle , \rangle) = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

Siccome $B = \{\underbrace{1}_{v_1}, \underbrace{x}_{v_2}, \underbrace{x^2}_{v_3}\}$, calcolo:

$$a_{11} = \langle v_1, v_1 \rangle = \langle 1, 1 \rangle = \int_{-1}^{1} 1\, dx = [x]_{-1}^{1} = 2$$

$$a_{12} = \langle v_1, v_2 \rangle = \langle 1, x \rangle = \int_{-1}^{1} 1 \cdot x \, dx = \left[\frac{x^2}{2} \right]_{-1}^{1} = 0$$

$$a_{13} = \langle v_1, v_3 \rangle = \langle 1, x^2 \rangle = \int_{-1}^{1} 1 \cdot x^2 \, dx = \left[\frac{x^3}{3} \right]_{1}^{-1} = \frac{2}{3}$$

$\vdots$

$$M_B(\langle, \rangle) = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2/3 \\ 0 & 2/3 & 0 \\ 2/3 & 0 & 2/5 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow$ Per verificare l'ortogonalità di $p(x)$ e $q(x)$, ne prendo i vettori delle coordinate:

$$[p(x)]_B = \begin{bmatrix} 5 \\ 3 \\ -1 \end{bmatrix} \qquad [q(x)]_B = \begin{bmatrix} -2 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

e poi risolvo il prodotto scalare $\langle p(x), q(x) \rangle$ come:

$$\langle p(x), q(x) \rangle = [p(x)]_B^T \; M_B(\langle, \rangle) \; [q(x)]_B$$

$$= [5, 3, -1] \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2/3 \\ 0 & 2/3 & 0 \\ 2/3 & 0 & 2/5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} = \left[10 - \frac{2}{3}, 2, \frac{10}{3} - \frac{2}{5} \right] \begin{bmatrix} -2 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix} =$$

$$= -20 + \frac{4}{3} - 4 + \frac{10}{3} - \frac{2}{5} = -24 + \frac{14}{3} - \frac{2}{5} \neq 0$$

$\Rightarrow$ $p(x)$ e $q(x)$ <u>non sono</u> ortogonali.

Abbiamo usato il seguente (già visto) teorema:

<u>Teo.</u>

Sia $g : V \times V \to \mathbb{R}$ prodotto scalare, $B = \{ v_1, \dots, v_n \}$

a) Se conosco $g(v_i, v_j)$ $i, j \in \{1, \dots, n\}$, allora conosco $g(v, w)$ comunque si scelgano $v, w \in V$

b) Se $M_B(g)$ è la matrice associata a g tale che:

$$M_B(g) = \begin{bmatrix} g(v_1, v_1) & \cdots & g(v_1, v_n) \\ \vdots & & \vdots \\ g(v_n, v_1) & \cdots & g(v_n, v_n) \end{bmatrix}$$

Se $\underline{v} = x_1 \underline{v}_1 + \dots + x_n \underline{v}_n$, $\underline{w} = y_1 \underline{v}_1 + \dots + y_n \underline{v}_n$

Allora

$$g(\underline{v}, \underline{w}) = [x_1 \dots x_n] \cdot M_B(g) \cdot \begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}$$

Dim. per $n = 3$

V, $B = \{ \underline{v}_1, \underline{v}_2, \underline{v}_3 \}$ base di V

$\underline{v} \in V$, $\underline{w} \in V \Rightarrow$ $\underline{v} = \alpha_1 \underline{v}_1 + \alpha_2 \underline{v}_2 + \alpha_3 \underline{v}_3$

$\underline{w} = \beta_1 \underline{v}_1 + \beta_2 \underline{v}_2 + \beta_3 \underline{v}_3$

a) $g(\underline{v}, \underline{w}) = (\alpha_1 \underline{v}_1 + \alpha_2 \underline{v}_2 + \alpha_3 \underline{v}_3, \underline{w}) =$

$= \alpha_1 g(\underline{v}_1, \underline{w}) + \alpha_2 g(\underline{v}_2, \underline{w}) + \alpha_3 g(\underline{v}_3, \underline{w}) =$

$= [\alpha_1 g(\underline{v}_1, \beta_1 \underline{v}_1 + \beta_2 \underline{v}_2 + \beta_3 \underline{v}_3)] + [\alpha_2 g(\underline{v}_2, \beta_1 \underline{v}_1 + \beta_2 \underline{v}_2 + \beta_3 \underline{v}_3)] +$
$+ [\alpha_3 g(\underline{v}_3, \beta_1 \underline{v}_1 + \beta_2 \underline{v}_2 + \beta_3 \underline{v}_3)] =$

$= [\alpha_1 \beta_1 g(\underline{v}_1, \underline{v}_1) + \alpha_1 \beta_2 g(\underline{v}_1, \underline{v}_2) + \alpha_1 \beta_3 g(\underline{v}_1, \underline{v}_3)] +$
$+ [\alpha_2 \beta_1 g(\underline{v}_2, \underline{v}_1) + \alpha_2 \beta_2 g(\underline{v}_2, \underline{v}_2) + \alpha_2 \beta_3 g(\underline{v}_2, \underline{v}_3)] +$
$+ [\alpha_3 \beta_1 g(\underline{v}_3, \underline{v}_1) + \alpha_3 \beta_2 g(\underline{v}_3, \underline{v}_2) + \alpha_3 \beta_3 g(\underline{v}_3, \underline{v}_3)]$

b) Prendiamo $\begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{bmatrix}^T$, $M_B(g)$, $\begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \beta_3 \end{bmatrix}$ e calcoliamo

$$[\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3] \cdot M_B(g) \cdot \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \beta_3 \end{bmatrix}$$

Inoltre:

- Se la base $B = \{ \underline{v}_1, \dots, \underline{v}_n \}$ fosse ortogonale $(\Rightarrow g(\underline{v}_i, \underline{v}_j) = 0 \ \forall i \neq j)$,

allora

$$M_B(g) = \begin{bmatrix} g(\underline{v}_1, \underline{v}_1) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & g(\underline{v}_2, \underline{v}_2) & 0 \dots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ & & & 0 \\ 0 & \dots & 0 & g(\underline{v}_n, \underline{v}_n) \end{bmatrix}$$

Con $n = 3$

$$g(\underline{v}, \underline{w}) = g(\alpha_1 \underline{v}_1 + \alpha_2 \underline{v}_2 + \alpha_3 \underline{v}_3, \beta_1 \underline{v}_1 + \beta_2 \underline{v}_2 + \beta_3 \underline{v}_3) =$$
$$= \alpha_1 \beta_1 g(\underline{v}_1, \underline{v}_1) + \alpha_2 \beta_2 g(\underline{v}_2, \underline{v}_3) + \alpha_3 \beta_3 g(\underline{v}_3, \underline{v}_3)$$

- Se $B = \{ \underline{v}_1, \underline{v}_2, \underline{v}_3 \}$ fosse ortonormale:

$$g(\underline{v}_1, \underline{v}_1) = g(\underline{v}_2, \underline{v}_2) = g(\underline{v}_3, \underline{v}_3) = 1$$
$$\Rightarrow g(\underline{v}, \underline{w}) = \alpha_1 \beta_1 \cdot 1 + \alpha_2 \beta_2 \cdot 1 + \alpha_3 \beta_3 \cdot 1$$

<u>Esempio</u>

Sia $V = \mathbb{R}^3$, $\left\{ \underline{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \underline{v}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \underline{v}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ base di V.

? : Costruire una base ortonormale di $\mathbb{R}^3$ che contenga $\lambda \underline{v}_1$ (per opportuno λ)

Verificare che $\underline{w}_1 = \dfrac{\underline{v}_1}{\| \underline{v}_1 \|}$; $\underline{w}_2 = \dfrac{\underline{v}_2 - \langle \underline{v}_2, \underline{w}_1 \rangle \underline{w}_1}{\| \underline{v}_2 - \langle \underline{v}_2, \underline{w}_1 \rangle \underline{w}_1 \|}$;

$$\underline{w}_3 = \frac{\underline{u}_3}{\| \underline{u}_3 \|} \quad \text{dove } \underline{u}_3 = \underline{v}_3 - \langle \underline{v}_3, \underline{w}_1 \rangle \underline{w}_1 - \langle \underline{v}_3, \underline{w}_2 \rangle \underline{w}_2$$

siano una base ortonormale di $\mathbb{R}^3$ contenente $\lambda \underline{v}_1$. (spoiler: lo è)

<u>Esempio</u>

La base canonica $\{ \underline{e}_1, \dots, \underline{e}_n \}$ è ortonormale per il prodotto scalare canonico su $\mathbb{R}^n$.

Lezione 18 - 23/05/22

Ortogonalizzazione di Gram - Schmidt

dotato di prodotto scalare

V spazio vettoriale metrico su $\mathbb{R}$ con prodotto scalare $\langle \, , \, \rangle$ e

$S = \{ \underline{v}_1, \dots, \underline{v}_k \}$ sottoinsieme l.i. di V.

Vogliamo modificare S per ottenerne uno ortogonale (e poi ortonormale).

Prendiamo $W = \{ \underline{w}_1, \dots, \underline{w}_k \}$ dove

$$\underline{w}_1 = \underline{v}_1 \qquad \underline{w}_2 = \underline{v}_2 - \frac{\langle \underline{v}_2, \underline{w}_1 \rangle}{\langle \underline{w}_1, \underline{w}_1 \rangle} \underline{w}_1$$

$$\underline{w}_3 = \underline{v}_3 - \frac{\langle \underline{v}_3, \underline{w}_1 \rangle}{\langle \underline{w}_1, \underline{w}_1 \rangle} \underline{w}_1 - \frac{\langle \underline{v}_3, \underline{w}_2 \rangle}{\langle \underline{w}_2, \underline{w}_2 \rangle} \underline{w}_2$$

$\vdots$

In generale:

$$\underline{w}_r = \underline{v}_r - \sum_{i=1}^{r-1} \frac{\langle \underline{v}_r, \underline{w}_i \rangle}{\langle \underline{w}_i, \underline{w}_i \rangle} \underline{w}_i$$

W così generato è ortogonale. Per renderlo ortonormale:

Prendiamo $Q = \{ q_1, \dots, q_k \}$ dove $\displaystyle q_i = \frac{1}{\| \underline{w}_i \|} \underline{w}_i$

Q così costruito è ortonormale.

oss.

i. Ogni spazio vettoriale metrico ha una base ortonormale.

ii. $\underline{w}_r \perp \underline{w} \qquad \forall \underline{w} \in \text{SPAN}(\underline{w}_1, \dots, \underline{w}_{r-1})$

perpendicolare

$\Rightarrow$ Ogni nuovo vettore creato è perpendicolare ai precedenti (usati per crearlo)

iii. $\text{SPAN}(\underline{w}_1, \dots, \underline{w}_r) = \text{SPAN}(\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_r) \qquad \forall r = 1, 2, \dots, k$

Esempio

$\langle \underline{x}, \underline{y} \rangle = x_1 y_1 + x_2 y_2$ con $\underline{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ $\underline{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$

$V = \mathbb{R}^3$; $\langle , \rangle$ canonico ; $S = \left\{ v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$

é base di $\mathbb{R}^3$ ma non é ortogonale (dato che $\langle v_1, v_2 \rangle = 1 \neq 0$).

Applichiamo G-S.

$w_1 = v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ $\qquad w_2 = v_2 - \dfrac{\langle v_2, w_1 \rangle}{\langle w_1, w_1 \rangle} w_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} - \dfrac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2 \\ 1 \\ -1/2 \end{pmatrix}$

$$w_3 = v_3 - \frac{\langle v_3, w_1 \rangle}{\langle w_1, w_1 \rangle} w_1 - \frac{\langle v_3, w_2 \rangle}{\langle w_2, w_2 \rangle} w_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} - \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{1/2}{3/2} \begin{pmatrix} 1/2 \\ 1 \\ -1/2 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1/3 \\ -1/3 \\ -1/3 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow$ Per G-S, $\{ w_1, w_2, w_3 \}$ é base ortogonale di $\mathbb{R}^3$.

$q_1 = \dfrac{1}{\|w_1\|} w_1 = \dfrac{1}{\sqrt{2}} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$; $q_2 = \dfrac{1}{\|w_2\|} w_2 = \dfrac{1}{\sqrt{3/2}} \cdot \begin{pmatrix} 1/2 \\ 1 \\ -1/2 \end{pmatrix}$

$q_3 = \dfrac{1}{\|w_3\|} \cdot w_3 = \dfrac{1}{\sqrt{3}} \cdot \begin{pmatrix} 1/3 \\ -1/3 \\ -1/3 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow$ $\{ q_1, q_2, q_3 \}$ é base ortonormale di $\mathbb{R}^3$.

DEF. **Ortogonale di un sottospazio**

V spazio vettoriale e $\langle , \rangle$ prodotto scalare e S sottoinsieme di V.

$S^\perp \overset{\text{Def.}}{=} \{ \underline{u} \in V : \underline{u} \perp \underline{w}, \ \forall \underline{w} \in S \}$ $\longrightarrow$ ORTOGONALE DI S

$S^\perp$ é sempre sottospazio di V, anche se S non lo é.

Esempio

$$S = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \subseteq \mathbb{R}^3 \qquad S \text{ non è un sottospazio (non contiene } \underline{0}, \ldots)$$

con prodotto scalare canonico di $\mathbb{R}^3$.

$$S^\perp = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} : \left\langle \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle = 0 \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} : x(1) + y(0) + z(1) = 0 \right\}$$

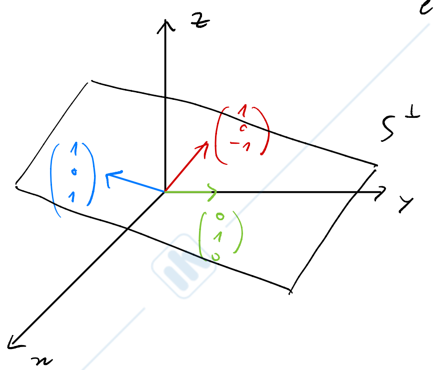
$$= \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} : x + z = 0 \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} : z = -x \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ -x \end{pmatrix} \right\} =$$

$$= \left\{ x \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} = \text{SPAN}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right)$$

$\Downarrow$

è un sottospazio vett.

Per visualizzare:

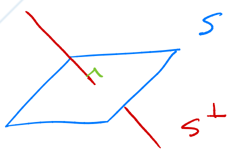


$S^\perp \rightarrow$ piano ortogonale alla retta che contiene $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

Teo.

V spazio vett. metrico con prodotto scalare $\langle , \rangle$, $\dim V < \infty$ e S sottospazio di V.

Allora:



i. $S \cap S^\perp = \{ \underline{0} \}$

ii. $V = S \oplus S^\perp$ quindi $\forall \underline{v} \in V$ esistono unici $\underline{w}_1 \in S$, $\underline{w}_2 \in S^\perp$ tali che $\underline{v} = \underline{w}_1 + \underline{w}_2$.

$\hookrightarrow S^\perp$ "spezza" S in due parti.

iii. $(S^\perp)^\perp = S$

iv. Se S ha base $\{\underline{w}_1, \dots, \underline{w}_k\}$, allora

$$S^\perp = \left\{ \underline{v} \in V : \begin{array}{l} \langle \underline{v}, \underline{w}_1 \rangle = 0 \\ \langle \underline{v}, \underline{w}_2 \rangle = 0 \\ \vdots \\ \langle \underline{v}, \underline{w}_k \rangle = 0 \end{array} \right\} \longrightarrow \text{sistema lineare in } k \text{ equazioni}$$

Def. Proiezione ortogonale

V spazio vett. metrico, S sottospazio vett. di V.

Se $\beta = \{q_1, \dots, q_k\}$ è base ortonormale di S e $\underline{v} \in V$ definiamo

$$pr_S(\underline{v}) \overset{\text{Def.}}{=} \langle \underline{v}, q_1 \rangle q_1 + \langle \underline{v}, q_2 \rangle q_2 + \dots + \langle \underline{v}, q_k \rangle q_k$$

$pr_S(\underline{v})$ è la PROIEZIONE ORTOGONALE di $\underline{v}$ su S, e $pr_S(\underline{v}) \in S$.

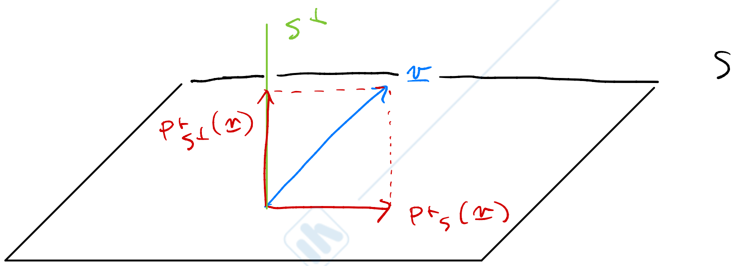
[$\langle , \rangle$ restituisce un numero $\in \mathbb{R}$, quindi $pr_S(\underline{v})$ è di fatto una combinazione lineare della base di S $\Rightarrow$ $pr_S(\underline{v}) \in S$.

Inoltre:

$$pr_{S^\perp}(\underline{v}) \overset{\text{Def}}{=} \underline{v} - pr_S(\underline{v}) \qquad \text{cioè} \qquad \underline{v} = \overbrace{pr_S(\underline{v})}^{\in S} + \overbrace{pr_{S^\perp}(\underline{v})}^{\in S^\perp}$$

Per il TEO. (iii) ogni vettore è somma di 2 proiezioni ortogonali $\Rightarrow$ se ne conosciamo una possiamo ricavare anche l'altra.

Per visualizzare:



www.unidocs.it - Appunti e dispense per superare i tuoi esami universitari

Esempio

$S = \text{SPAN}\left(\underbrace{\begin{pmatrix}1\\0\\2\end{pmatrix}}_{w}\right) \subseteq \mathbb{R}^3$, con prodotto scalare canonico;

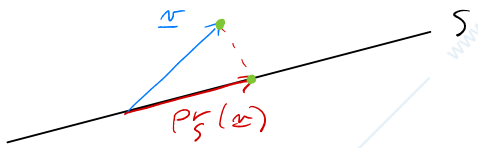
$\{w\}$ é base ortogonale di S.

$\Rightarrow q = \frac{1}{\|w\|} \cdot w = \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix}1\\0\\2\end{pmatrix}$ $\quad \{q\}$ é base ortonormale di S.

Se $v = \begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$ é vettore qualsiasi di $\mathbb{R}^3$, allora

$$pr_S(v) = \left\langle \begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}, q \right\rangle \cdot q = \left\langle \begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix}1\\0\\2\end{pmatrix} \right\rangle \cdot \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix}1\\0\\2\end{pmatrix} =$$

$$= \left(\frac{x}{\sqrt{5}} + 0 + \frac{2z}{\sqrt{5}}\right) \cdot \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix}1\\0\\2\end{pmatrix} = \left(\frac{x+2z}{\sqrt{5}}\right)\frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix}1\\0\\2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\frac{x+2z}{5}\\0\\\frac{2x+4z}{5}\end{pmatrix}$$



NB: La distanza tra v e $pr_S(v)$ é la minima possibile rispetto alle distanze tra v e un punto a caso in S.

pr_S é quindi il punto piú vicino a v di qualsiasi altro punto su S.

Teo.   Teo. della migliore approssimazione

Dato V spazio vett. metrico, S sottospazio vett. con $\dim S < \infty$, $v \in V$.

Allora, $pr_S(v)$ é l'unico vettore di S tale che:

i. $v - pr_S(v) \perp S$

ii. $pr_S(v)$ é il vettore di S piú vicino a v, cioé

$$\underbrace{d}_{\text{distanza}}\left(v, pr_S(v)\right) = \|v - pr_S(v)\| = \min\{ d(v, w) : w \in S\}$$

Esempio

$$V = \mathbb{R}_2[x] \quad , \quad \langle p(x), q(x) \rangle = \int_{-1}^{1} p(x)q(x)\, dx$$

$$S = \text{SPAN}\left(\underline{v}_1 = -3, \ \underline{v}_2 = 1 - 2x \right)$$

a) Trovare la migliore approssimazione di un $\underline{v} \in V$ qualsiasi su S

Per il TMA stiamo cercando $pr_S(\underline{v})$:

i. Troviamo base ortonormale di S con G-S

$$\underline{w}_1 = \underline{v}_1 = -3 \qquad \underline{w}_2 = \underline{v}_2 - \frac{\langle \underline{v}_2, \underline{w}_1 \rangle}{\langle \underline{w}_1, \underline{w}_1 \rangle} \underline{w}_1 = 1 - 2x - \frac{-6}{18}(-3) = -2x$$

$\Rightarrow \{\underline{w}_1, \underline{w}_2\}$ é base ortogonale di S.

$$q_1 = \frac{1}{\|\underline{w}_1\|} \underline{w}_1 = -\frac{1}{\sqrt{2}} \qquad q_2 = \frac{1}{\|\underline{w}_2\|} \underline{w}_2 = -\sqrt{\frac{3}{2}}\, x$$

$\Rightarrow \{q_1, q_2\}$ é base ortonormale di S.

ii. Sia $\underline{v} = a + bx + cx^2$ un vettore qualsiasi di V, allora

$$pr_S(\underline{v}) = \left\langle a + bx + cx^2, -\frac{1}{\sqrt{2}} \right\rangle \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right) + \left\langle a + bx + cx^2, -\sqrt{\frac{3}{2}}\, x \right\rangle \left(-\sqrt{\frac{3}{2}}\, x\right)$$

$$= \dots = a + \frac{c}{3} + bx$$

b) Trovare $pr_{S^\perp}(\underline{v})$

$$pr_{S^\perp}(\underline{v}) = \underline{v} - pr_S(\underline{v}) = (a + bx + cx^2) - \left(a + \frac{c}{3} + bx\right) = cx^2 - \frac{c}{3}$$

c) $pr_S(pr_S(pr_S(pr_S(1+2x)))) = ?$

$$pr_S(1+2x) \overset{a=1 \ b=2 \ c=0}{=} 1 + 2x$$

Non é strano, poiché $1+2x \in S$, infatti

$$1 + 2x = -\frac{2}{3}(-3) - 1 \cdot (1 - 2x) = -\frac{2}{3}\underline{v}_1 - \underline{v}_2 \in S$$

Cioé: $1+2x$ era giá $\in S$, quindi la sua proiezione ortog. su S, che corrisponde al vettore più vicino a $1+2x$ in S, é sé stesso.

Lezione 19 - 26/05/22

In generale, per ogni sottospazio S si ha che

$$pr_S(v) = v \iff v \in S$$

poiché, per il T.M.A., $pr_S(v)$ è il vettore di S che ha la minor distanza da v.

Isometrie

Def. Isometria

Sia V uno spazio vett. metrico con prodotto scalare $\langle , \rangle$.
Un'applicazione lineare $T: V \mapsto V$ è detta ISOMETRIA se

$$\langle T(v_1), T(v_2) \rangle = \langle v_1, v_2 \rangle \qquad \forall v_1, v_2 \in V$$

Dunque T preserva lunghezze, distanze e perpendicolarità.

A volte è chiamata MOVIMENTO RIGIDO.

es. la rotazione sul piano è un'isometria.

Caratterizzazione delle isometrie

Come riconosciamo un'isometria?

V spazio vet. metrico con prodotto scalare $\langle , \rangle$, $\dim V = n$, $T: V \mapsto V$ lineare.

Sono equivalenti i seguenti fatti:

i. T è isometria.

ii. $\| T(v) \| = \| v \|$ cioè preserva le lunghezze.

iii. Se β è base ortonormale di V e $A = T_{\beta \leftarrow \beta}$, allora A è matrice ORTOGONALE (cioè $A^T = A^{-1}$)

iv. Se β è base ortonormale di V, allora le colonne di $A = T_{\beta \leftarrow \beta}$ (o le sue righe) formano una base ortonormale di $\mathbb{R}^n$.

v. Se $\beta = \{ v_1, \dots, v_n \}$ è base ortonormale, allora lo è anche $\{ T(v_1), \dots, T(v_n) \}$.

Esempio

Se prendiamo $L_A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ data da $L_A(\underline{X}) = A\underline{X}$, allora

L_A è un'isometria nei seguenti casi:

i. $$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{2}/2 & -\sqrt{2}/2 \\ 0 & \sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/2 \end{bmatrix}$$

ii. $$A = \begin{bmatrix} \sqrt{3}/3 & \sqrt{6}/6 & -\sqrt{2}/2 \\ -\sqrt{3}/3 & \sqrt{6}/3 & 0 \\ \sqrt{3}/3 & \sqrt{6}/6 & \sqrt{2}/2 \end{bmatrix}$$

entrambi sono ortogonali poiché le colonne formano una base ortonormale di $\mathbb{R}^3$ rispetto al prodotto scalare canonico.

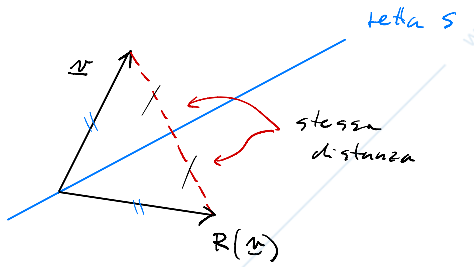
Dato che siamo in $\mathbb{R}^3$ con prodotto scalare canonico, allora la base canonica è ortonormale e inoltre $(L_A)_{\mathcal{E}\mathcal{E}} = A$.

$\Rightarrow$ le due applicazioni sono isometrie.

Esempi notevoli

i. le ROTAZIONI in $\mathbb{R}^2$ attorno all'origine e le ROTAZIONI in $\mathbb{R}^3$ attorno a un asse passante per l'origine sono isometrie.

ii. RIFLESSIONI in $\mathbb{R}^2$ attorno a una retta e in $\mathbb{R}^3$ attorno a un piano sono isometrie.



Esempio

Sia V spazio vett. metrico, $\dim V < \infty$ e $T : V \to V$ isometria.

Vogliamo verificare che T sia ISOMORFISMO ma che non sempre un isomorfismo è anche isometria.

$\rightarrow$ Se T è isometria $\Rightarrow \|T(\underline{v})\| = \|\underline{v}\| \quad \forall \underline{v} \in V$.

Vediamo che T è iniettiva.

Se $\underline{v} \in \ker T \Rightarrow T(\underline{v}) = \underline{0} \Rightarrow 0 = \|\underline{0}\| = \|T(\underline{v})\| = \|\underline{v}\|$

$\Rightarrow \underline{v} = \underline{0} \Rightarrow \ker T = \{\underline{0}\} \Rightarrow T$ è iniettiva.

↳ prodotto scalare definito positivo $\Rightarrow$ unico $\underline{v} : \|\underline{v}\| = 0$ è $\underline{0}$.

$\Rightarrow T$ è suriettiva.

↳ $T : V \mapsto W$ con $\dim V = \dim W \Rightarrow T$ iniettiva $\Leftrightarrow T$ suriettiva

Se $L_A : \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}^2$ t.c. $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

$\Rightarrow L_A$ è lineare e se β è base canonica, allora $(L_A)_{\beta \leftarrow \beta} = A$.

L_A è isomorfismo poiché la sua matrice associata A è invertibile.

↳ $\det A \neq 0$

Dato che β è base canonica, β è ortonormale, quindi:

poiché la seconda colonna di A ha norma $\neq 1$

$\Rightarrow$ le colonne di A non formano una base ortonormale

$\Rightarrow A$ non è ortogonale

$\Rightarrow L_A$ <u>non</u> è isometria.

<u>Metodo</u>: come calcolare $T_{\beta \leftarrow \beta}$ in V spazio vett. metrico

Sia $T : V \mapsto V$ lineare in V spazio vett. metrico con prodotto scalare $\langle , \rangle$.

- Prendiamo $\beta = \{\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_n\}$ base ortonormale di V.

NB: Può essere anche la canonica se il prodotto scalare è quello canonico; se il $\langle , \rangle$ è "strano", la base canonica potrebbe non essere ortonormale e dovremo ricorrere allora a G-S.

- Calcoliamo $c_{ij} = \langle T(\underline{v}_j), \underline{v}_i \rangle$

- Allora

$$T_{\beta \leftarrow \beta} = \begin{bmatrix} & | & \\ - & c_{ij} & - \\ & | & \end{bmatrix}$$

NB: questa procedura funziona per ogni $T : V \mapsto V$ lineare (non solo per le isometrie, che sono un caso particolare di $T : V \mapsto V$ lineare)
<u>ma</u> richiede una base β ortonormale.

Esempio

$V = \mathbb{R}_1[x] \qquad \langle p(x), q(x) \rangle = \int_{-1}^{1} p(x) q(x) \, dx$

V è spazio vett. metrico e se $T : V \mapsto V$

$a + bx \to (a+3b) + (3a+b)x$

? - Trovare la matrice associata a T rispetto a $\beta = \{ v_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}, v_2 = \sqrt{\frac{3}{2}}\, x \}$

Osserviamo che

$\langle v_1, v_1 \rangle = \int_{-1}^{1} \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \, dx = \frac{1}{2} \int_{-1}^{1} 1 \, dx = 1 \quad \Rightarrow \|v_1\| = 1$

$\langle v_2, v_2 \rangle = \int_{-1}^{1} \sqrt{3/2}\, x \cdot \sqrt{3/2}\, x \, dx = \dots = 1 \quad \Rightarrow \|v_2\| = 1$

$\langle v_1, v_2 \rangle = \int_{-1}^{1} \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \sqrt{\frac{3}{2}}\, x \, dx = \dots = 0 \quad \Rightarrow v_1 \perp v_2$

$\Rightarrow \{v_1, v_2\}$ è insieme ortonormale in V di $\dim = 2$

$\Rightarrow \beta$ è base ortonormale.

Allora

$$T_{\beta \leftarrow \beta} = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{bmatrix} \quad \text{dove } c_{ij} = \langle T(v_j), v_i \rangle$$

$c_{11} = \langle T(v_1), v_1 \rangle = \int_{-1}^{1} \left(\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{3}{\sqrt{2}} x \right) \frac{1}{\sqrt{2}} \, dx = \frac{5}{2}$

$c_{12} = \langle T(v_2), v_1 \rangle = \int_{-1}^{1} \left(\frac{3\sqrt{3}}{2} + \sqrt{\frac{3}{2}}\, x \right) \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \, dx = 3\sqrt{6}$

$c_{21} = \langle T(v_1), v_2 \rangle = \int_{-1}^{1} \left(\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{3}{\sqrt{2}} x \right) \sqrt{\frac{3}{2}} \, dx = \sqrt{3}$

$c_{22} = \langle T(v_2), v_2 \rangle = \int_{-1}^{1} \left(\frac{3\sqrt{3}}{2} \cdot \sqrt{\frac{3}{2}} \right) \sqrt{3/2} \, dx = 1$

NB: $T_{\beta \leftarrow \beta}$ non è simmetrica ... (vedi prossima lezione)

Lezione 20 - 27/05/22

Sia V uno spazio euclideo (ovvero uno spazio vett. di dim $= n$ con $\langle \underline{v}, \underline{v} \rangle > 0 \ \forall \underline{v} \neq 0$).

i. $T : V \mapsto V$ é un'isometria se $\langle T(\underline{v}), T(\underline{w}) \rangle = \langle \underline{v}, \underline{w} \rangle \ \forall \underline{v}, \underline{w} \in V$

ii. T é un operatore (o applicazione) <u>simmetrico</u> se $\forall \underline{v}, \underline{w} \in V$

$$\langle T(\underline{v}), \underline{w} \rangle = \langle \underline{v}, T(\underline{w}) \rangle$$

Non succede per ogni T lineare.

Abbiamo visto che: $V = \mathbb{R}_1[x]$ con

$$\langle p(x), q(x) \rangle = \int_{-1}^{1} p(x)\, q(x)\, dx$$

e $T : a + bx \mapsto (a + 3b) + (3a + b)$

Rispetto alla base $\beta = \left\{ \underline{v}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}, \ \underline{v}_2 = \sqrt{\frac{3}{2}}\, x \right\}$

β é ortonormale e $T_{\beta \leftarrow \beta} = \begin{bmatrix} 1 & 3\sqrt{3} \\ \sqrt{3} & 1 \end{bmatrix}$ non simmetrica.

$\Rightarrow T$ non é un operatore simmetrico.

Teo. T simmetrico

Se V é uno spazio vett. con prodotto scalare $\langle , \rangle$, $T : V \mapsto V$ lineare é simmetrico $\Longleftrightarrow$ $T_{\beta \leftarrow \beta}$ é simmetrica.

Se non conoscessimo questo Teo., come facciamo a dire che T dell'esempio non é simmetrica?

$T_{\beta \leftarrow \beta} = \begin{bmatrix} 1 & 3\sqrt{3} \\ \sqrt{3} & 1 \end{bmatrix}$ $\quad V = \mathbb{R}_1[x] \quad \beta = \left\{ \frac{1}{\sqrt{2}}, \sqrt{\frac{3}{2}} \right\}$

Se T fosse stato un operatore simmetrico, allora $\forall p(x), q(x) \in \mathbb{R}_1[x]$

$$\langle T(p(x)), q(x) \rangle = \langle p(x), T(q(x)) \rangle$$

Abbiamo visto che

$$* \quad \langle T(p(x)), q(x) \rangle = (x_1, x_2) \begin{bmatrix} 1 & 3\sqrt{3} \\ \sqrt{3} & 1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$$

dove $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \big[T(p(x))\big]_\beta \; ; \; \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \big[q(x)\big]_\beta$

$*$ non è in generale uguale a

$$\langle p(x), T(q(x)) \rangle = (z_1, z_2)\, T_{\beta \leftarrow \beta} \begin{pmatrix} t_1 \\ t_2 \end{pmatrix}$$

dove $\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} = \big[p(x)\big]_\beta \; ; \; \begin{pmatrix} t_1 \\ t_2 \end{pmatrix} = \big[T(q(x))\big]_\beta$

DIM. Teo. precedente

$T : V \mapsto V$ lineare $\quad A = T_{\beta \leftarrow \beta} \quad \underline{v}, \underline{w} \in V$

$\underline{X}_\beta = [\underline{v}]_\beta \qquad \underline{Y}_\beta = [\underline{w}]_\beta$

$$\langle \underline{v}, \underline{w} \rangle = \underline{X}_\beta^T \cdot C \cdot \underline{Y}_\beta \quad \text{con } C = M_\beta(\langle , \rangle) = \begin{bmatrix} \langle \underline{v}_1, \underline{v}_1 \rangle & \langle \underline{v}_1, \underline{v}_2 \rangle \\ \langle \underline{v}_2, \underline{v}_1 \rangle & \langle \underline{v}_2, \underline{v}_2 \rangle \end{bmatrix}$$

$$\langle T(\underline{v}), \underline{w} \rangle = \underbrace{[T(\underline{v})]_\beta}_{A \cdot \underline{X}_\beta}^T \cdot C \cdot \underline{Y}_\beta = (A\, \underline{X}_\beta)^T \cdot C \cdot \underline{Y}_\beta \underset{*}{=}$$

(Perché T sia simmetrico $*$ deve essere uguale a $\langle \underline{v}, T(\underline{w}) \rangle$.)

$= \underline{X}_\beta^T A^T \cdot C \cdot \underline{Y}_\beta \qquad$ ma $\langle \underline{v}, T(\underline{w}) \rangle = \underline{X}_\beta^T \cdot C \cdot A\, \underline{Y}_\beta =$

... beh ha scazzato la DIM. :(

Noi sappiamo quando un endomorfismo è diagonalizzabile: deve esistere una base in cui la matrice associata è diagonale.

Ci chiediamo ora: quando una matrice simmetrica è diagonalizzabile?

oss.

i) A simmetrica determina un prodotto scalare su V $(=\mathbb{R}^n)$

$$\forall \underline{x}, \underline{y} \in \mathbb{R}^n \qquad \langle \underline{x}, \underline{y} \rangle_A = \underline{x}^T A \underline{y} = \underline{y}^T A \underline{x}$$

↳ A è simmetrica

$$\overset{\shortparallel}{(\underline{x}^T A \underline{y})^T} = \underline{y}^T A \underline{x}$$

ii) Per il prodotto scalare $\langle , \rangle_A$ esiste una base ortogonale $\gamma = \{ \underline{w}_1, \dots, \underline{w}_n \}$ di V $(\Rightarrow \langle \underline{w}_i, \underline{w}_j \rangle = 0 \quad i \neq j)$

$\Rightarrow$ $M_\gamma(\langle , \rangle_A)$ è diagonale.

$$M_\gamma(\langle , \rangle_A) \text{ diagonale} \Rightarrow M_\gamma(\langle , \rangle_A) = \begin{bmatrix} d_1 & & 0 \\ & d_2 & \\ 0 & & \ddots & d_n \end{bmatrix}$$

Teo. **Teorema Spettrale**

Sia V spazio vett. metrico con $\langle , \rangle$ definito positivo e sia T operatore simmetrico.

Allora:

i. Tutti gli autovalori sono reali.

ii. Se λ_1, λ_2 sono autovalori distinti, allora gli autospazi V_{λ_1}, V_{λ_2} sono ortogonali, ovvero:

$$\langle \underline{v}, \underline{w} \rangle = 0 \quad \forall \underline{v} \in V_{\lambda_1}, \ \forall \underline{w} \in V_{\lambda_2}$$

iii. $\exists$ una base ortonormale γ di V fatta da autovettori per T.

$\Rightarrow$ $T_{\gamma \leftarrow \gamma}$ è diagonale.