

È vero poiché:

$$T: V \rightarrow V \text{ simmetrico} \Rightarrow T_{\beta \leftarrow \beta} \text{ simmetrica}$$

1. Prima di pensare al prodotto scalare su V , pensiamo alla diagonalizzazione di T :

a) deve avere tutti gli autovalori in \mathbb{R}

b) se $\lambda_1, \dots, \lambda_r$ sono gli autovalori, allora

$$V = V_{\lambda_1} \oplus V_{\lambda_2} \oplus \dots \oplus V_{\lambda_r}$$

$$\text{ovvero } V_{\lambda_i} \cap V_{\lambda_j} = \{0\} \text{ se } \lambda_i \neq \lambda_j$$

e l'unione delle basi di V_{λ_i} è una base di V .

→ Il Teo. Spettrale dice che ogni vettore di V_{λ_i} è ortogonale a ogni vettore di V_{λ_j} se $i \neq j$.

In fatti, sappiamo che $V = V_{\lambda_1} \oplus \dots \oplus V_{\lambda_r}$.

Se β_{λ_i} è una base di V_{λ_i} la ortogonalizzo con G-S. Lo stesso per ogni auto-spazio.

Allora $\beta = \beta_{\lambda_1} \cup \beta_{\lambda_2} \cup \dots \cup \beta_{\lambda_r}$ è una base ortonormale per \langle, \rangle .

β è anche base ortogonale.

lezione 21 - 08/06/22

Ripasso: Proiezione ortogonale

Se V è spazio vett. su \mathbb{R} con $\langle \cdot, \cdot \rangle$, si dice sottospazio ortogonale a S il sotto spazio S^\perp

$$S^\perp = \left\{ \underline{x} \in V : \langle \underline{x}, \underline{s} \rangle = 0 \quad \forall \underline{s} \in S \right\}$$

OSS.

Se voglio trovare S^\perp dove $S = \text{SPAN}(\underline{x}_1, \underline{x}_2)$ in \mathbb{R}^3 con prodotto scalare canonico, con

$$\underline{x}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \underline{x}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$S^\perp = \left\{ \underline{x} \in \mathbb{R}^3 : \langle \underline{x}, \underline{x}_1 \rangle = \langle \underline{x}, \underline{x}_2 \rangle = 0 \right\}$$

$$\underline{s} \in S, \quad \underline{s} = \alpha \underline{x}_1 + \beta \underline{x}_2 \quad \text{con } \alpha, \beta \in \mathbb{R}$$

$$\underline{x} \perp \underline{x}_1, \quad \underline{x} \perp \underline{x}_2 \quad \langle \underline{x}, \underline{x}_1 \rangle = \langle \underline{x}, \underline{x}_2 \rangle = 0$$

$$\text{allora } \forall \underline{s} \in S \quad \underline{s} = \alpha \underline{x}_1 + \beta \underline{x}_2$$

$$\langle \underline{s}, \underline{x} \rangle = \langle \alpha \underline{x}_1 + \beta \underline{x}_2, \underline{x} \rangle = \alpha \underbrace{\langle \underline{x}_1, \underline{x} \rangle}_{=0} + \beta \underbrace{\langle \underline{x}_2, \underline{x} \rangle}_{=0} = 0$$

$$\text{Nell'esempio, cerco } \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} : \left\langle \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle = \left\langle \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle = 0$$

$$S^\perp = \text{SPAN} \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right) \quad \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \right\rangle = 0$$

$$\mathbb{R}^3 = S \oplus S^\perp \quad \dim S^\perp = 3 - \dim S = 3 - 2 = 1$$

Proiezione ortogonale di \underline{x} su $S \subseteq V$

$$V = S \oplus S^\perp \quad \Rightarrow \quad \underline{x} = \underline{s} + \underline{s}^\perp \quad \text{dove } \underline{s} \in S \quad \text{e} \quad \underline{s}^\perp \in S^\perp$$

(\underline{s} e \underline{s}^\perp sono determinati in modo unico.)

$p_S^+(\underline{x}) \rightarrow$ Prendo una base ortogonale di S $\{ \underline{q}_1, \dots, \underline{q}_k \}$

$$\underline{s} = p_S^+(\underline{x}) = \langle \underline{x}, \underline{q}_1 \rangle \underline{q}_1 + \dots + \langle \underline{x}, \underline{q}_k \rangle \underline{q}_k$$

$$\underline{s}^\perp = \underline{x} - \underline{s}$$

Esempio

Sia \mathbb{R}^3 con \langle, \rangle canonico e sia $S = \text{SPAN} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} \right)$ Sia $\underline{u} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$. Trovare $\bar{s} \in S$ che meglio approssima \underline{u} su S .i. Calcolo $\dim S$ Notiamo che $\begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow$ sono L.D. ma $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ e $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ sono L.I. $\Rightarrow \dim S = 2$ [Altrimenti calcola il rango (A) dove $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 4 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$ Rango (A) = 2 e $\underline{t}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\underline{t}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ sono L.I. $\mathbb{R}^3 = S \oplus S^\perp$ e $\dim S^\perp = \dim \mathbb{R}^3 - \dim S = 3 - 2 = 1$ ii. $\{\underline{t}_1, \underline{t}_2\}$ è base di S , non ortonormale

$$\langle \underline{t}_1, \underline{t}_2 \rangle = 1 + 2 + 1 \neq 0$$

$$G-S : \dots \rightarrow \underline{d}_1 = \frac{\underline{t}_1}{\|\underline{t}_1\|} = \frac{\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}}{\sqrt{1+4+1}} = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\underline{d}_2 = ? \rightarrow \langle \underline{t}_2, \underline{d}_1 \rangle = \frac{1}{\sqrt{6}} (1+2+1) = \frac{4}{\sqrt{6}}$$

$$\rightarrow \underline{t}_2' = \underline{t}_2 - \langle \underline{t}_2, \underline{d}_1 \rangle \cdot \underline{d}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{4}{6} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 - \frac{4}{6} \\ 1 - \frac{4}{3} \\ 1 - \frac{4}{6} \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\rightarrow \|\underline{t}_2'\| = \frac{1}{\sqrt{3}} \quad \underline{d}_2 = \frac{\underline{t}_2'}{\|\underline{t}_2'\|} = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

 $\Rightarrow \{\underline{d}_1, \underline{d}_2\}$ è base ortonormale di S .iii. Calcolo $\bar{s} = p_S(\underline{u})$

$$\bar{s} = \langle \underline{u}, \underline{d}_1 \rangle \underline{d}_1 + \langle \underline{u}, \underline{d}_2 \rangle \underline{d}_2 =$$

$$\langle \underline{u}, \underline{d}_1 \rangle = \left\langle \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle = \frac{1}{\sqrt{6}} (2+4) = \sqrt{6}$$

$$\langle \underline{u}, \underline{d}_2 \rangle = \left\langle \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle = \frac{1}{\sqrt{3}} (2-2) = 0$$

$$\Rightarrow \bar{s} = \sqrt{6} \cdot \underline{d}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \neq$$

$$\text{Se volessi trovare anche } pr_{st}(u) = u - pr_s(u) = u - \bar{s}$$

Ripasso : TEO. SPETTRALE

Una matrice $A \in M_{n,n}(\mathbb{R})$ simmetrica è diagonalizzabile tramite una matrice ortogonale, cioè

$$\exists N : N^{-1} = N^T \quad : \quad N^{-1} \cdot A \cdot N = D \text{ diagonale}$$

N è costruita da una base di autovettori di A .

Questo mi dice che sulla diagonale di D trovo gli autovalori di A .

DEF. **Forma Bilineare**

Sia V spazio vett. su \mathbb{R} . $g : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ è una FORMA BILINEARE su V se :

i. $\forall x_1, x_2, v \in V, \forall \alpha \in \mathbb{R}$ si ha

$$g(x_1 + x_2, v) = g(x_1, v) + g(x_2, v)$$

$$g(\alpha x_1, v) = \alpha g(x_1, v)$$

ii. $\forall x, v_1, v_2 \in V, \forall \alpha \in \mathbb{R}$

$$g(x, v_1 + v_2) = g(x, v_1) + g(x, v_2)$$

$$g(x, \alpha v_1) = \alpha g(x, v_1)$$

g è quindi un'applicazione che è lineare nelle due componenti.

Un prodotto scalare è una forma bilineare simmetrica :

$$g(x, v) = g(v, x) \quad \forall x, v \in V$$

e definita positiva :

$$g(x, x) \geq 0 \quad \forall x \in V \quad ; \quad g(x, x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$$

Esempio

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

Provo che $g_A : (\underline{x}, \underline{y}) \mapsto \underline{x}^T A \underline{y}$ è bilineare, ma non è definita positiva (però è simmetrico).

lezione 22 - 10/06/22

Se V è uno spazio vett. su \mathbb{R} , allora $g: V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ è una forma bilineare

$$i. \quad g(x_1 + x_2, v) = g(x_1, v) + g(x_2, v)$$

$$\forall x_1, x_2, v \in V, \forall \alpha \in \mathbb{R} \quad g(\alpha x_1, v) = \alpha g(x_1, v)$$

$$ii. \quad \forall x, v_1, v_2 \in V, \forall \alpha \in \mathbb{R}$$

$$g(x, v_1 + v_2) = g(x, v_1) + g(x, v_2)$$

$$g(x, \alpha v) = \alpha g(x, v)$$

Quindi

$$\leftarrow g_x: v \mapsto g(x, v) \text{ è lineare}$$

$$\leftarrow g_v: x \mapsto g(x, v) \text{ è lineare}$$

$$\text{Se } g(x, v) = g(v, x) \quad \forall x, v \in V$$

g si dice simmetrica ed è un prodotto scalare.

Def.

Una forma bilineare simmetrica si dice prodotto scalare (non necessariamente definito positivo).

Esempio

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\beta = \{e_1, e_2, e_3\}$$

$$g_A: (x, y) \mapsto x^T A y$$

g_A è una forma bilineare, perché:

$$x, z_1, z_2 \in \mathbb{R}^3 \quad g_A(x, z_1 + z_2) = x^T A (z_1 + z_2) =$$

$$= x^T A z_1 + x^T A z_2 = g_A(x, z_1) + g_A(x, z_2)$$

(Analogamente le altre proprietà)

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$$g_A(\underline{e}_1, \underline{e}_1) = (1, 0, 0) \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$= (2, 0, 0) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 2$$

$$g_A(\underline{e}_2, \underline{e}_2) = \dots = 1$$

$$g_A(\underline{e}_3, \underline{e}_3) = \dots = -1$$

$$g_A(\underline{e}_i, \underline{e}_j) = 0 \quad \text{if } i \neq j$$

NB: $\beta = \{ \underline{e}_1, \underline{e}_2, \underline{e}_3 \}$ è base ortogonale per g_A (ma non ha senso definire l'ortonormalità, in quanto non è detto che g sia definito positivo, quindi perde di rilevanza il concetto stesso di norma).

Forme Quadratiche e Bilineari su \mathbb{R}^n

Le forme quadratiche sono in corrispondenza biunivoca con i prodotti scalari (senza la condizione di positività)

Domanda: che relazione c'è tra gli autovalori di A simmetrica e il numero di $g_A(\underline{x}_i, \underline{x}_i) > 0$?

Teo.

Se g è un prodotto scalare su V reale, allora \exists una base $\beta = \{ \underline{x}_1, \dots, \underline{x}_n \}$ per V tale che β sia ortogonale per g .

$$\forall i \neq j \quad g(\underline{x}_i, \underline{x}_j) = 0$$

non necessariamente ortonormale,
 g potrebbe non essere def. positivo
 \rightarrow non necessariamente
 $g(\underline{x}_i, \underline{x}_i) > 0 \quad \forall i$

Teo.**Teorema di Sylvester**

Sia $g: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$ prodotto scalare e sia A la matrice associata a una base ortogonale β e C la matrice associata a g rispetto alla base ortogonale β' . A e C sono simmetriche.

Allora il numero di autovalori positivi i_p per A è lo stesso del numero di autovalori positivi per C .

Il numero di autovalori negativi i_n per A è uguale al numero di autovalori negativi per C .

Il numero di autovalori nulli i_0 per A e C è lo stesso.

Ciò A una forma bilineare resta associato una terna (i_p, i_n, i_0) detta **SEGNAURA**.

Inoltre $i_p + i_n + i_0 = \dim V$

A volte si dice segnatura la coppia (i_p, i_n) .

NB: gli autovalori sono contati secondo la molteplicità algebrica (se uno si ripete 3 volte, ne conto 3)

Adesso:

- 1) definire una forma quadratica
- 2) corrispondenza tra f. quadratiche e bilineari
- 3) trovare la segnatura

DEF.**Forma quadratica**

Si dice **FORMA QUADRATICA** su \mathbb{R}^m un polinomio omogeneo di 2° grado in x_1, \dots, x_m se $\underline{x} = (x_1, \dots, x_m)$

NB: polinomio omogeneo = polinomio in cui tutti i monomi hanno lo stesso grado.

Esempi

$$1) Q(\underline{x}) = x_1^2 + 2x_1x_2 - x_1x_3 + x_2^2 + x_2x_3$$

$$2) Q(\underline{x}) = x_1^2 + 2x_2^2 - 2x_1$$

\Rightarrow (1) è una f.q. in \mathbb{R}^3

NB: notiamo che non è necessario che appaiano tutti i termini, infatti in (1) $2x_2^2$ non c'è ($\Rightarrow 2=0$)

(2) non è una F.Q. in \mathbb{R}^2 poiché $2x_1$ non è un monomio di 2° grado.

In generale

Scrivo una F.Q. su \mathbb{R}^n come

$$Q(\underline{x}) = \sum_{i,j=1}^n a_{ij} x_i x_j \quad \text{se} \quad \underline{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

\Rightarrow non posso avere un x_i di grado \neq dagli altri da solo.

Domanda : trovo una matrice quadrata A tale che

$$Q(\underline{x}) = \underline{x}^T A \underline{x} \quad ?$$

Cerco una forma bilineare g : $M_B(g) = A$

quindi tale che $g(\underline{x}, \underline{x}) = Q(\underline{x})$

\rightarrow Corrispondenza tra forma bilineare e forma quadratica

Teo.

Data una forma bilineare g \exists una forma quadratica φ tale che

$$\frac{1}{2} \left(\varphi(\underline{x} + \underline{w}) - \varphi(\underline{x}) - \varphi(\underline{w}) \right) = g(\underline{x}, \underline{w})$$

($\Rightarrow \varphi$ è data e determino g)

Viceversa, data g forma bilineare, $\varphi(\underline{x}) = g(\underline{x}, \underline{x})$ è una forma quadratica.
 $\hookrightarrow g$ è data

Il nostro problema era :

data $Q(\underline{x}) = \sum a_{ij} x_i x_j$ trovare A : $Q(\underline{x}) = \underline{x}^T A \underline{x}$

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

Esempio

$$Q(x) = x_1^2 + 3x_1x_2 - 6x_2^2$$

$$\Rightarrow A = \begin{bmatrix} 1 & \frac{3}{2} & 0 \\ \frac{3}{2} & -6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$* 3x_1x_2 = \frac{3}{2}x_1x_2 + \frac{3}{2}x_2x_1$$

$$g_A(\underline{x}, \underline{y}) = \underline{x}^T A \underline{y} \quad \Rightarrow g_A(\underline{x}, \underline{x}) = Q(x)$$

\Rightarrow La matrice A è associata alla forma quadratica ma anche alla forma bilineare g_A

In fatti: $\underline{x}^T \cdot \begin{bmatrix} 1 & 3/2 & 0 \\ 3/2 & -6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \underline{x} =$

$$= (x_1 \ x_2 \ x_3) \begin{bmatrix} 1 & 3/2 & 0 \\ 3/2 & -6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} =$$

$$\left(x_1 + \frac{3}{2}x_2, \frac{3}{2}x_1 - 6x_2, 0 \right) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = x_1^2 + \frac{3}{2}x_2x_1 + \frac{3}{2}x_1x_2 - 6x_2^2$$

$$= x_1^2 + 3x_1x_2 - 6x_2^2$$

La corrispondenza tra quadratiche e prodotti scalari permette di definire la **SEGNAURA** di una forma quadratica Q come la segnatura della matrice A associata.

→ Trovare la segnatura di una matrice simmetrica

prodotto scalare → matrice simmetrica

basi ortogonali β, β_1 per g sono tali che

$$i_p) \# \text{ di } \alpha_i \in \beta : g(\alpha_i, \alpha_i) > 0 = \# \text{ di } \alpha_i' \in \beta_1 : g(\alpha_i', \alpha_i') > 0$$

$$i_m) \# \text{ di } \alpha_i \in \beta : g(\alpha_i, \alpha_i) < 0 = \# \text{ di } \alpha_i' \in \beta_1 : g(\alpha_i', \alpha_i') < 0$$

i_0 c) quelli = 0 sono la differenza

TEO.

i_p è il numero di autovalori positivi della matrice A e i_m è il numero degli autovalori negativi di A .

Operativamente : Metodo

Data A , ne trovo il polinomio caratteristico e calcolo gli autovalori.

Questo è vero poiché dato che A è diagonalizzabile, \exists una base di autovettori di \mathbb{R}^m (A è una matrice simmetrica $m \times m$).

$$\Rightarrow N^{-1} A N = D \text{ diagonale se } N = \begin{bmatrix} \underline{w}_1 & \dots & \underline{w}_m \end{bmatrix} \text{ su}$$

$\{\underline{w}_1, \dots, \underline{w}_m\}$ base di autovettori, e

$$D = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \dots & \\ 0 & & \lambda_m \end{bmatrix} \quad \lambda_i \text{ autovalori}$$

Per il TEO. SYLVESTER, posso trovare una base di autovettori tale che N sia ortogonale.

Per il TEO. SPECTRALE, \exists una base di autovettori $\{\underline{t}_1, \dots, \underline{t}_m\}$ tale che la matrice $T = [\underline{t}_1, \dots, \underline{t}_m]$ sia ortogonale ($T^T = T^{-1}$)

$$\Rightarrow T \text{ è tale che } T^{-1} A T = D = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \dots & \\ 0 & & \lambda_m \end{bmatrix}$$

$$\parallel \\ T^T A T$$

$\Rightarrow T^T A T$ è la matrice che rappresenta il prodotto scalare g_A rispetto alla base $\{\underline{t}_1, \dots, \underline{t}_m\}$

Inoltre, $\{ \underline{t}_1, \dots, \underline{t}_m \}$ possono essere costruiti come autovettori ortogonali per il prodotto scalare g_A .

[Tutto ciò si basa su il seguente (non da sapere però)

Sia $g : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ prodotto scalare, $A = M_{\beta}(g)$ (matrice associata a g rispetto a β) e $C = M_{\beta_1}(g)$, allora

$$C = L^T A L \quad \text{con } L \text{ matrice di cambiamento di base tra } \beta \text{ e } \beta_1.]$$

È vero poiché, per il Teo. Spettro, data A simmetrica, A è diagonalizzabile tramite una matrice ortogonale N ($N^T = N^{-1}$)

$$N^T A N = D = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_m \end{bmatrix}$$

$\beta = \{x_1, \dots, x_m\}$ è una base ortogonale per g .

$$\Rightarrow g(x_i, x_j) = 0 \quad i \neq j \quad g(x_i, x_i) = \lambda_i$$

Domanda: Supponiamo di avere $g: \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \mapsto \mathbb{R}$ con
matrice di incidenza $\begin{bmatrix} 1 & & \\ & -1 & \\ & & 0 \end{bmatrix}$

quella $M_\beta(g)$ con ip uni,
in meno-uni, e io zero.

Posso dire che $1, -1, 0$ sono gli autovalori di $A = M_\beta(g)$? NO

es. osservo $A = \begin{bmatrix} 2 & & \\ & -3 & \\ & & 0 \end{bmatrix}$

La segnatura di A è $(1, 1, 1)$.

A è equivalente a $\begin{bmatrix} 1 & & \\ & -1 & \\ & & 0 \end{bmatrix}$

$$\exists \text{ matrice } L: L^T A L = \begin{bmatrix} 1 & & \\ & -1 & \\ & & 0 \end{bmatrix}$$

Infatti, sia $\{x_1, x_2, x_3\}$ una base di autovettori relativi ad A per \mathbb{R}^3 , tale che
 \hookrightarrow esiste P ed è diagonale

$$x_1^T A x_1 = 2 \quad x_2^T A x_2 = -3 \quad x_3^T A x_3 = 0$$

$$\Downarrow$$

$$g(x_1, x_1) = 2 \quad w_1 = \frac{x_1}{\sqrt{2}} \Rightarrow g(w_1, w_1) = 1$$

$\Rightarrow w_1$ è autovettore

$$g(x_2, x_2) = -3 \quad w_2 = x_2 \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} \Rightarrow g(w_2, w_2) = -3 \cdot \frac{1}{3} = -1$$

$$g(x_3, x_3) = 0 \quad \text{va bene così} \Rightarrow w_3 = x_3$$

$$\beta_1 = \{ \underline{w}_1, \underline{w}_2, \underline{w}_3 \} \quad M_{\beta}(g) = \begin{bmatrix} 1 & & \\ & -1 & \\ & & 0 \end{bmatrix}$$

La forma g individuata da $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ è

i. definita positiva? (cioè: $g(\underline{x}, \underline{x}) > 0 \quad \forall \underline{x} \in V$?)

NO $g(\underline{x}_2, \underline{x}_2) = g\left(\begin{pmatrix} 0 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix}\right) = -1$

ii. è non degenera? (cioè: $g(\underline{x}, \underline{x}) \neq 0 \Leftrightarrow \underline{x} \neq 0$?)

NO basta guardare $\underline{x}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

Esercizio

Se A simmetrica ha inertia (i_p, i_n, i_0) con $i_0 \neq 0$, allora l'applicazione lineare $L_A: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m: \underline{x} \mapsto A\underline{x}$ è iniettiva?

se $i_0 \neq 0 \Rightarrow \exists \underline{x}: L_A(\underline{x}) = 0 \underline{x} = \underline{0} \Rightarrow \underline{x} \in \ker T$

$\Rightarrow \ker T \neq \{ \underline{0} \} \Rightarrow T$ non è iniettiva

[ricordiamo che T iniettiva $\Leftrightarrow \ker T = \{ \underline{0} \}$]

• alternativamente: posse supporto de $A = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \dots & & \\ & & \lambda_{i_p+i_n} & \\ & & & \dots \\ & & & & 0 \end{bmatrix}$
 $\Rightarrow \text{Rango}(A) = m - i_0 \Rightarrow \dim \ker T = i_0$

• alternativamente: A è simile a una matrice $\begin{bmatrix} 1 & & & \\ & \dots & & \\ & & -1 & \\ & & & \dots \\ & & & & 0 \end{bmatrix}$
 (cioè $\exists N: N^{-1}AN = \begin{bmatrix} 1 & & & \\ & \dots & & \\ & & -1 & \\ & & & \dots \\ & & & & 0 \end{bmatrix}$)

Allora $\det(A) = \det(N) \cdot \det(N^{-1}) \cdot \det \begin{bmatrix} 1 & & & \\ & \dots & & \\ & & -1 & \\ & & & \dots \\ & & & & 0 \end{bmatrix} = 0$

$\Rightarrow L_A$ non iniettiva

Fuori dal programma d'esame: qualche decomposizione di matrici e di tori.

i. Decomposizione a Valori Singolari (SVD)

Sia $X \in M_{m,k}(\mathbb{R})$ $k \leq m$ $\text{Rango}(X) = k$

$X^T X \in M_k(\mathbb{R})$ è simmetrica e definisce un prodotto scalare definito positivo

Ammette $\underline{x}_1, \dots, \underline{x}_k$ autovettori corrispondenti a autovalori positivi

$$\sigma_1^2 \geq \sigma_2^2 \geq \dots \geq \sigma_k^2 > 0$$

$\sigma_1 \dots \sigma_k$ si dicono **VALORI SINGOLARI** di X .

ii. Decomposizione QR

Sia $X \in M_{m,n}(\mathbb{R})$. Allora esistono due matrici Q e R con

Q ortogonale ($Q^T = Q^{-1}$, equivalentemente le colonne di Q sono una base ortonormale di \mathbb{R}^m rispetto al prodotto scalare canonico)

e R triangolare superiore.

Esercizi

1) Data una forma quadratica su \mathbb{R}^3

$$Q(x, y, z) = yx - zzn + z^2$$

dire quale delle seguenti forme bilineari individua Q :

a) $\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix} \right) \mapsto z_1 z_2 - x_1 z_2 - x_2 z_1 + \frac{1}{2} x_2 y_1 + \frac{1}{2} x_1 y_2$ $\Rightarrow \checkmark$

b) $\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix} \right) \mapsto z_1 z_2 - 2x_1 z_2 - 2x_2 z_1 - x_1 y_2 + x_2 y_1$

c) " $\mapsto z_1 z_2 + 2x_1 z_2 - 2x_2 z_1 + x_1 y_2 + x_2 y_1$

Ad occhio \rightarrow altrimenti, si costruiscono le matrici associate e si cerca quella che coincide con la matrice associata a Q .

2) Data $Q(x) = -2x^2 - 6yx + y^2 - 2zy - z^2$ su \mathbb{R}^3

quali delle seguenti F.d. è equivalente (stessa segnatura) a $Q(x)$?

a) $Q_1(x) = -x^2 + z^2$ b) $Q_2(x) = y^2 + z^2$ c) $Q_3(x) = -x^2 - 4y^2 + z^2$

d) $Q_4(x) = x^2 - 2y^2 + 3z^2$ e) $Q_5(x) = -x^2 - y^2 - z^2$

Come si trova la segnatura di Q ?

Cerco $A = \begin{bmatrix} -2 & -3 & 0 \\ -3 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$

Trovo gli autovalori mediante il polinomio caratteristico di A :

$$\det \begin{pmatrix} -2-\lambda & -3 & 0 \\ -3 & 1-\lambda & -1 \\ 0 & -1 & -1-\lambda \end{pmatrix} = (2+\lambda)(1+\lambda)(1-\lambda) + (2-\lambda) + 4(1+\lambda) =$$

...

Trovati gli autovalori si confrontano con quelli delle Q_i .

3) Dati $\underline{a} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ $\underline{u} = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \end{pmatrix}$ $\underline{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \underline{c} = \underline{v} = \underline{w}$

quanti sono gli endomorfismi di \mathbb{R}^2 che mandano

$$\underline{a} \mapsto \underline{u} \quad \underline{b} \mapsto \underline{v} \quad \underline{c} \mapsto \underline{w} \quad ?$$

Tutte le app. lin. mandano $\underline{0}$ in $\underline{0}$, quindi l'unica vera condizione è $\underline{a} \mapsto \underline{u}$

Uso il T.E.C.: se $\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_m$ è base per V e $\underline{w}_1, \dots, \underline{w}_m$ sono m vettori di W , allora

$$\exists! \text{ app. lineare } : g(\underline{v}_i) = \underline{w}_i$$

↳ esiste unico

Avrò solo $\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ mandato in $\begin{pmatrix} -2 \\ 2 \end{pmatrix}$. Completo $\left\{ \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ a una base di \mathbb{R}^2 ,

ad esempio $\beta = \left\{ \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$; scelgo $\underline{w}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}$ ad esempio e

costruisco T :

$$T \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad g \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\text{Allora } \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = a \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow g \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = a g \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} + b g \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

⇒ Facendo variare il vettore di completa la base (tipo $\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix} \neq \underline{1}$) o il vettore \underline{w} ottengo infinite app. lineari distinte.

Lezione 2h - 17/06/22

Esercizi

1) Dire se la matrice
$$\begin{bmatrix} -5 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & -3 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & -5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$
 è diagonalizzabile su \mathbb{R} .

Trovare poi la dimensione degli autospazi.

Troviamo gli autovalori con il polinomio caratteristico.

$$\begin{aligned} \det \begin{bmatrix} -5-\lambda & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -3-\lambda & -3 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & -5-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1-\lambda \end{bmatrix} &= (-5-\lambda) \det \begin{bmatrix} -3-\lambda & -3 \\ -4 & -5-\lambda \end{bmatrix} \\ &= (-5-\lambda) (3-\lambda) (1-\lambda) \det \begin{bmatrix} -3-\lambda & -3 \\ -4 & -5-\lambda \end{bmatrix} \\ &= -(5+\lambda) (3-\lambda) (1-\lambda) (3+\lambda)(5+\lambda) - 12 \\ &= -(\lambda^2 + 8\lambda + 3) (5+\lambda) (3-\lambda) (1-\lambda) \\ &\Rightarrow \lambda = \frac{-4 \pm \sqrt{13}}{4} \end{aligned}$$

\Rightarrow La matrice è diagonalizzabile poiché ha 5 autovalori distinti.

\Rightarrow La dimensione di ogni sottospazio è 1.

Domanda: Può A essere la matrice associata a una forma bilineare su \mathbb{R}^5 ?

$$((x, y) \mapsto x^T A y \text{ ?})$$

Sì rispetta le proprietà

Domanda: Può A essere associata a un prodotto scalare?

No A non è simmetrica

2) Sia $B = \begin{bmatrix} -5 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & -3 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & -5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$. B è diagonalizzabile?

La molteplicità algebrica di -5 è 2 : $m_a(-5) = 2$

Devo preoccuparmi della $m_g(-5)$. Trovo il rango della matrice $(A - 5I)$

$$r \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -3 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 6 \end{pmatrix} \leftarrow \begin{matrix} \\ \\ \\ \\ \end{matrix} = \begin{matrix} \\ \\ \\ \\ \end{matrix}$$

↑ ↑ ↑

$2 \text{ righe} = 0 \Rightarrow \text{rango} \leq 5-2 \Rightarrow r \leq 3$

Prendo la MINORE $\neq 0$ di ordine massimo : $\begin{bmatrix} 2 & -3 & 0 \\ -4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{bmatrix} \rightarrow \det \neq 0$

alternativa a Gauss \hookrightarrow sottomatrici con $\det \neq 0$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 2 & -3 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 6 \end{pmatrix} \text{ sono L.I.} \Rightarrow \text{rango} = 3$$

Quando cerco se un autovalore λ_0 ha $m_a(\lambda_0) = m_g(\lambda_0)$

i. trovo $m_a(\lambda_0)$ prendendo λ_0 come radice del polinomio caratteristico.

ii. cerco $m_g(\lambda_0) = \dim V_{\lambda_0}$ con $\dim V_{\lambda_0} = \dim S$ dove S è

l'insieme delle soluzioni del sistema lineare $(B - \lambda_0 I) \underline{x} = \underline{0}$

$$\dim S = 5 - r(B - \lambda_0 I) = 2 \Rightarrow m_a(-5) = m_g(-5)$$

$\Rightarrow B$ è diagonalizzabile.

Teo.

Metodo di calcolo del Rango

Data una matrice di m righe e n colonne, il Rango di A $r(A)$ è pari alla dimensione massima di una sottomatrice quadrata di A che ha $\det \neq 0$.

3) Sia $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$. È diagonalizzabile?

Autovalori : 1 con $m_a(1) = 2$, 3 con $m_a(3) = 1$

$\lambda = 3$ non dà problemi : m_g non può essere < 1 ed è $> 0 \Rightarrow m_g(3) = 1$

$\lambda = 1$ devo controllare $m_g(1)$: trovo il Rango di $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} = 1$

$$\Rightarrow m_g(1) = 3 - r(A - 1I) = 3 - 2 = 1$$

\hookrightarrow dim dello spazio

$\Rightarrow A$ è diagonalizzabile

h) $B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$ è diagonalizzabile?

$$B - 1I = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \quad r(B - 1I) = 2 \quad \Rightarrow \quad m_f(1) = 1$$

$$\Rightarrow B \text{ non è diagonalizzabile.}$$

s) Sia A la matrice associata all'app. lineare g rispetto alla base canonica $\{e_1, e_2, e_3\}$ di \mathbb{R}^3 .

$$A = \begin{bmatrix} -1 & -2 & 3 \\ -1 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

a) Trovare la dimensione del nucleo di g .

b) Trovare una base per $\ker(g)$.

a) rango di $A = 1$ (max n° di righe l.l.)

$$\Rightarrow \dim \ker g = 2 \quad \left(\begin{array}{l} \text{+ r. NUCLEO} \\ \text{+ RANGO} \end{array} : \dim V = \dim \ker g + \text{rango}(A) \right)$$

b) $\begin{bmatrix} -1 & -2 & 3 \\ -1 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \underline{0}$ $-x - 2y + 3z = 0$ $x = -2y + 3z$

$$\Rightarrow \text{base} : \left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

\downarrow $z=0$ \downarrow $y=0$

b) Sia $\varphi(x, y) = 3x^2 + 2xy + y^2$ una forma quadratica su \mathbb{R}^2 .

Trovare la forma quadratica equivalente all'inercia della matrice associata a φ .

Ho A matrice associata a φ . Cerco la matrice di inercia D associata ad A .

D è la matrice di una forma quadratica equivalente a φ .

[Ricordo: φ e φ' F.Q. sono equivalenti se detta A la matrice di φ rispetto a una base β e B matrice di φ' rispetto a β' .

$$B = D^T A D \quad \text{con } D \text{ ortogonale.}$$

In pratica, cerco autovalori di A e conto quanti sono gli autovalori positivi e negativi.

$$\varphi(x, y) = 3x^2 + 2xy + y^2 \quad \Rightarrow \quad A = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \text{autovalori: } \det \begin{pmatrix} 3-\lambda & 1 \\ 1 & 1-\lambda \end{pmatrix} = (3-\lambda)(1-\lambda) - 1 = \\ = 3 - \lambda - \lambda + \lambda^2 - 1 = \lambda^2 - 4\lambda + 2$$

$$\Rightarrow \lambda = 2 \pm \sqrt{4-2} = 2 \pm \sqrt{2} \quad \Rightarrow \text{entrambi } > 0$$

Quindi \exists una base di autovettori per A t.c. la matrice associata sia

$$* \begin{pmatrix} 2 + \sqrt{2} & 0 \\ 0 & 2 - \sqrt{2} \end{pmatrix} \text{ e l'inerzia di } \varphi \text{ è } (2, 0, 0)$$

$i_p \quad i_m \quad i_0$

La matrice corrispondente all'inerzia è $\bar{e} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

* matrice rispetto a una base ortogonale

NB: una volta che so che A associata alla F.Q. φ ha inerzia (a, b, c) vuol dire che ho trovato a autovettori > 0 , $b < 0$, c nulli.

Per il TEO. SPETRALE \Rightarrow che esiste una base

$$\beta = \{ \underline{x}_1, \dots, \underline{x}_a, \underline{x}_{a+1}, \dots, \underline{x}_{a+b}, \underline{x}_{a+b+1}, \dots, \underline{x}_m \} \text{ ortogonale}$$

(rispetto al prodotto scalare standard su \mathbb{R}^m , sia rispetto al prodotto scalare individuato da A)

$$\langle \underline{x}_i, \underline{x}_i \rangle = d_i > 0 \quad 1 \leq i \leq a$$

$$\langle \underline{x}_i, \underline{x}_i \rangle = c_i < 0 \quad a+1 \leq i \leq a+b$$

$$\langle \underline{x}_i, \underline{x}_i \rangle = 0 \quad \text{per gli altri.}$$

Prendo $\frac{\underline{x}_1}{\|\underline{x}_1\|}, \dots, \frac{\underline{x}_a}{\|\underline{x}_a\|}, \dots, \underline{x}_{a+1} = \frac{\underline{x}_{a+1}}{\sqrt{-c_{a+1}}}, \dots$

$$7) \quad V = \mathbb{R}_2[x] \quad \langle , \rangle : \langle p(x), q(x) \rangle = \int_{-1}^1 p(x) q(x) dx$$

$$T: a+bx \mapsto (a+3b) + (3a+b)x$$

Trovare la matrice associata a T $T_{\beta \leftarrow \beta} \Leftrightarrow \beta = \left\{ \alpha_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}, \alpha_2 = \sqrt{\frac{3}{2}} x \right\}$

$$T_{\beta \leftarrow \beta} = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{bmatrix}$$

$$c_{11} = \langle T(\alpha_1), \alpha_1 \rangle = 1$$

$$c_{12} = \langle T(\alpha_1), \alpha_2 \rangle = 3\sqrt{3}$$

$$c_{21} = \langle T(\alpha_2), \alpha_1 \rangle = \sqrt{3}$$

$$c_{22} = \langle T(\alpha_2), \alpha_2 \rangle = 1$$

⋮
⋮
⋮