Algebra Lineare

1^a ora del 22 Novembre 2019

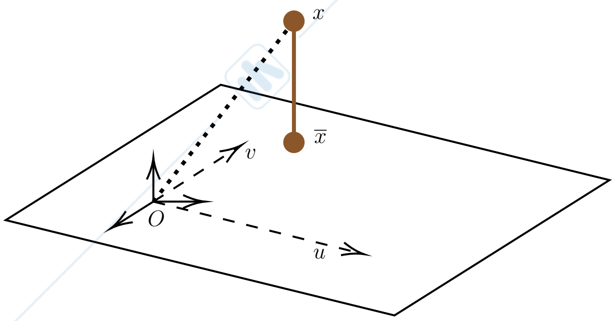
Indice

Capitolo 1

Applicazioni del prodotto vettore

1.1 Distanza x dal piano passante per l'origine

[1] Considerando il seguente piano passante per l'origine ed i suoi vettori generatori u e v



Metodo generale:
Si considera $\bar{x}$ come combinazione di u e v, in seguito si impone l'ortogonalità attraverso le seguenti disequazioni:
$\bar{x} = \alpha u + \beta v$ con α e β incognite

$$\begin{cases} (x-\bar{x})u = 0 \\ (x-\bar{x})v = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} (x-\alpha u-\beta v)u = 0 \\ (x-\alpha u-\beta v)v = 0 \end{cases} \tag{1.1}$$

Formula rapida utilizzabile solo in $\mathbb{R}^3$
Sapendo che il vettore da calcolare sarà perpendicolare a u e v, si può procedere nel seguente modo:
- Possiamo prendere in considerazione il vettore x e proiettarlo nella direzione della normale[2] (ν) al piano

[1]Le dispense di riferimento sono G_1.8 e G_1.9
[2]Perpendicolare, ortogonale

$\nu = u \times v \perp u, v$

Si prende il punto x e si proietta su ν, questo sarà un elemento dello span $u \times v$, quindi il vettore risultante sarà anche esso perpendicolare a $u \times v$ e corrisponderà alla minima distanza di x dal piano.
$x_\nu = x_{u\times v}$

$\bar{x}$ si può trovare sottraendo x a x proiettato su $u \times v$
$\bar{x} = x - x_{u\times v}$

La distanza di x dal piano è la norma di $x - \bar{x}$
$|x - \bar{x}| = |x - x + \bar{x}| = |x_{u\times v}| = \left|\frac{x(u\times v)}{u\times v}\right|$

Esercizio Calcolare di x dal piano generato da u e v

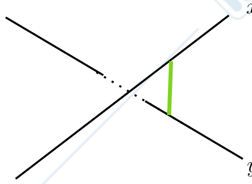
$$\underset{x}{\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}} \; e \; < \underset{u}{\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}} , \underset{v}{\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}} >$$

Procedimento:

- Calcolare il prodotto vettore
  $\nu = u \times v = (1, 2, 1) \times (1, 0, 1) = (2, 0, -2)$
  si prende in considerazione il vettore parallelo $(1, 0, -1)$
- Proiezione di x su ν
  $\nu_{u\times v} = \frac{x(u\times v)}{|u\times v|}(v)$
  $\frac{(1,1,1)(1,0,-1)}{1+1}(1, 0, -1) = 0$
  La proiezione nulla significa che x appartiene allo span

1.2 Distanza rette sghembe

Trovare la coppia di punti per cui la distanze è minima



La distanza deve essere perpendicolare ad entrambe le rette perciò:

$$\begin{cases} (\boldsymbol{x_0 + tu - y_0 - sv})u = 0 \\ (\boldsymbol{x_0 + tu - y_0 - sv})v = 0 \end{cases}$$

Le soluzioni del sistema sono $(\bar{t}, \bar{s})$
In $\mathbb{R}^3$ utilizzando il prodotto vettore si piò prendere il vettore $\nu = u \times v$.
$(x_0 + tu - y_0 - sv)_\nu = (x_0 + \bar{t}u - y_0 - \bar{s}v + (t - \bar{t})u - (s - \bar{s})v)_\nu$

Separando u vettori in due somme
$(x_0 + \bar{t}u - y_0 - \bar{s}v + (t - \bar{t})u - (s - \bar{s})v)_\nu$
$= (x_0 + \bar{t}u - y_0 - \bar{s}v)_\nu + ((t - \bar{t})u - (s - \bar{s})v)$
$= (x_0 + \bar{t}u - y_0 - \bar{s}v) + 0$

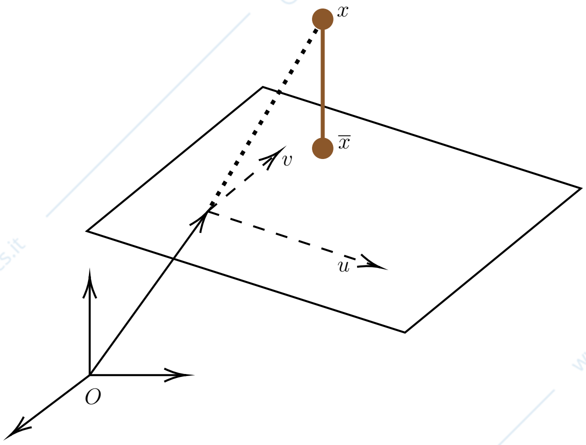
Conclusioni: Se voglio calcolare la minima distanza tra due rette sghembe in $\mathbb{R}^3$ è possibile utilizzare la norma di $x_0 + tu - y_0 - sv$.
Segue che:
$|x_0 + tu - y_0 - s| =$
$|(x_0 + tu - y_0 - s)_\nu| =$
$|(x_0 - y_0)_\nu| =$
$\frac{v(x_0 - y_0}{\sqrt{|v|}}$

Esercizio Calcolare di x dal piano generato da u e v.

$$x_0 - y_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$\nu = (-1, -0, 1) = (-1, 0, 1)$
$|\nu| = 2$
$(x_0 - y_0)_\nu = (0, 1, -1)\ (-1, 0, 1) = 1$
La distanza tra le due rette uguale a : $\frac{|v(x_0 - y_0)|}{\sqrt{|\nu|}} = \frac{|-1|}{\sqrt{2}}$

1.3 Distanza x dal piano non passante per l'origine



Procedimento per calcolare la distanza:
- Si sposta l'origine in x_0 $(x - x_0)_{u\times v}$
- Si calcola la proiezione $\bar{x} = x - (x_0 - x_0)_{u\times v}$
- Si ricava la distanza $|x - \bar{x}| = |(x - x_0)_{u\times v}| = \frac{(x-x_0)(u\times v)}{|u\times v|}$