1 Comportamento asintotico della funzione

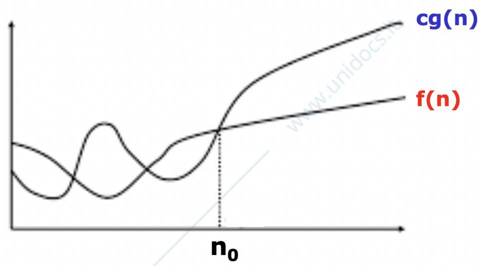
Per poter ottenere un risultato di complessità da un algoritmo, si deve astrarre il linguaggio nel quale è scritto e la macchina sulla quale viene eseguito. Si parla dunque di comportamento asintotico, ovvero del comportamento che la funzione tende ad avere dopo un certo valore in relazione di un'altra funzione **g(n)** e di una costante **c** > 0.

1.1 Limite asintotico superiore

La complessità di un algoritmo è osservata all'aumentare di n (indipendentemente dalla grandezza della variabile) e si parlerà di comportamento asintotico o limite asintotico per O grande, quando:

Date le funzioni f(n), g(n), un intero n_0 e una costante $c \geq 0$ allora f(n) è O(g(n)) se

$$\forall n \geq n_0 : f(n) \leq cg(n)$$



Si intende comportamento asintotico per O il comportamento specifico di una funzione f(n) che dopo un certo punto (n_0) al più cresce come un'altra funzione g(n), moltiplicata per una costante (c), senza mai superarla.

- **Regola dei fattori costanti**
  $\forall c \to O(f(n)) = O(cf(n))$
- **Regola della somma**
  Se f(n) è O(g(n)) allora anche (f(n)+g(n)) sarà O(g(n))
- **Regola del prodotto**
  Se f(n) è O(f^1(n)) e g(n) è O(g^1(n)) allora (f(n)*g(n)) sarà O($g^1(n) * f^1(n)$)

Altre regole simili, ma più generiche sono:

- Se f(n) è O(g(n)) e g(n) è O(h(n)) di conseguenza f(n) sarà O(h(n))
- $\forall k$ costante, k sarà O(1)
- $\forall m \leq p$, n^m sarà O(n^p)
- Qualsiasi polinomio di grado m sarà O(n^m)

La classificazione delle varie complessità avviene tramite le classi di complessità, come:

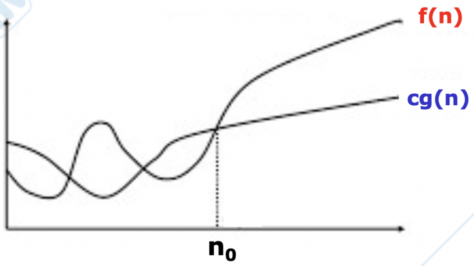
- O(1) costante che indica le iterazioni più semplici
- O(n) lineare che indicano tutte le funzioni o cicli che operano alemeno n volte. Rientrano nell'insieme di O(n) tutte i valori maggiori di n, conosciuti come classi sopralineari e i valori minori, conosciuti come classi sottolineari.
- O(logn) logaritmica, la base del logaritmo non è specificata essendo uno O dell'altro.
- O(nlogn)
- O(n^2), O(n^3), ..., O(n^m) rispettivamente quadratica, cubica e polinomiale
- O(2^n), O(n^n) entrambe esponenziali

Secondo l'enunciato "$\forall k$ e $\forall a > 1 \to n^k \in O(a^n)$" scopriamo che una qualsiasi funzione polinomiale sarà inferiore di una qualsiasi esponenziale.

1.2 Limite asintotico inferiore

Date le funzioni f(n), g(n), un intero n_0 e una costante $c \geq 0$ allora f(n) è Ω(g(n)) se

$$\forall n \geq n_0 : f(n) \geq cg(n)$$



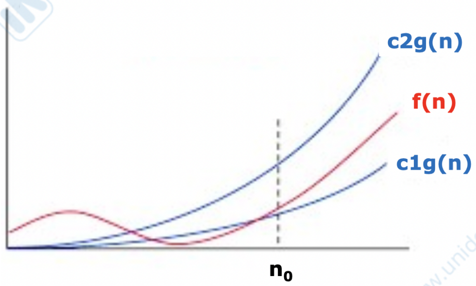
Si intende comportamento asintotico per Ω il comportamento specifico di una funzione f(n) che dopo un certo punto (n_0) cresce almeno come un'altra funzione g(n), moltiplicata per una costante (c), superandola.

1.3 Limite asintotico stretto

Un limite asintotico stretto è un limite per cui una f(n) risulta Θ di g(n) quando f(n) è sia O(g(n)) che Ω(g(n)).

Date le funzioni f(n), g(n), un intero n_0 e due costanti c1 e $c2 \geq 0$ allora f(n) è Θ(g(n)) se

$$\forall n \geq n_0 : c1g(n) \leq f(n) \leq c2g(n)$$



Si intende comportamento asintotico per Θ il comportamento specifico di una funzione f(n) che dopo un certo punto (n_0) cresce almeno come un'altra funzione g(n), moltiplicata per una costante (c1), superandola, ma anche al più della stessa funziona g(n), moltiplicata per un'altra costante (c2) e rimanendo al di sotto di essa.