SISTEMA LINEARE

Immaginiamo una prima equazione

$a_{11} x_1 + a_{12} x_2 + \dots + a_{1m} x_m = b_1$

Immaginiamo una seconda equazione

$a_{21} x_1 + a_{21} x_2 + \dots + a_{2m} x_n = b_2$

Fino ad immaginare altre infinite equazioni

$$a_{k1} x_1 + a_{k2} x_2 + \dots + a_{km} x_m = b_k$$

↓

SISTEMA LINEARE DI k EQUAZIONI IN m INCOGNITE.

↳ x sarà sempre alla prima potenza (mai alla seconda, mai logaritmi etc)

$$\begin{cases} a_{11} x_1 + a_{12} x_2 + a_{1m} x_m = b_1 \\ a_{21} x_1 + a_{22} x_2 + a_{2m} x_n = b_2 \\ a_{k1} x_1 + a_{k2} x_2 + a_{km} x_m = b_k \end{cases}$$

→ SISTEMA LINEARE IN FORMA NORMALE.

Esempio:

$$\begin{cases} x + y = 1 \\ 2x + 3y = 0 \end{cases}$$

→ Sistema lineare in 2 equazioni in 2 incognite.

$$\Rightarrow \begin{cases} x = 1 - y \\ 2(1-y) + 3y = 0 \Rightarrow 2 - 2y + 3y = 0 \Rightarrow y = -2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = 1 + 2 \\ y = -2 \end{cases} \qquad \begin{cases} x = 3 \\ y = -2 \end{cases}$$

METODO DI SOSTITUZIONE

↓

Sostituisco i valori di x e y con i valori trovati.

Matrice dei coefficienti

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = A \Rightarrow$$ di k righe e m colonne

ESEMPIO CON SISTEMA PRECEDENTE:

$$\begin{pmatrix} +1 & +1 \\ +2 & +3 \end{pmatrix}$$ → Matrice dei coefficienti di 2 righe e 2 colonne

Composto da righe e colonne

Righe: $\boxed{a_{11} \quad a_{12}}$ e $\boxed{a_{21} \quad a_{22}}$

Colonne: $\boxed{\begin{matrix} a_{11} \\ a_{21} \end{matrix}}$ e $\boxed{\begin{matrix} a_{12} \\ a_{22} \end{matrix}}$

Matrice completa del sistema

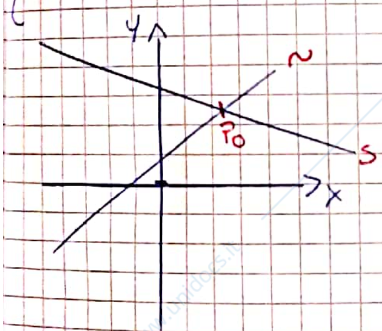
$$\left(\begin{array}{cc|c} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \end{array}\right) = (A|b) \Rightarrow$$ Matrice completa di k righe e m colonne

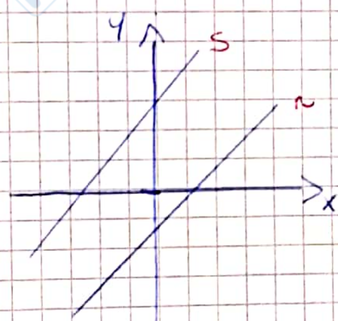
ESEMPIO CON SISTEMA PRECEDENTE:

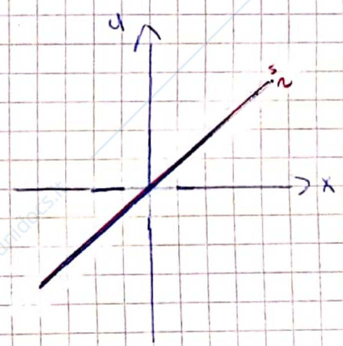
$$\left(\begin{array}{cc|c} +1 & +1 & +1 \\ +2 & +3 & 0 \end{array}\right)$$ → Matrice completa del sistema di 2 righe e 3 colonne.

ESEMPI E GRAFICI:

$$\begin{cases} ax+by=c \Rightarrow r \\ a'x+b'y=c' \Rightarrow s \end{cases}$$ → equazione di rette







1° CASO:
COMPATIBILE E DETERMINATO
∃ 1 sol
$P_0 = (x_0, y_0)$
↓
Punto di intersezione

2° CASO:
NON COMPATIBILE
∄ sol

3° CASO:
COMPATIBILE E INDETERMINATO
∃ ∞ sol

È compatibile?
- No, ∄ sol
- Sì, ∃ 1 sol oppure ∃ ∞ sol? Quali sono le sol?

METODO DI GAUSS

(metodo di risoluzione dell'eliminazione successiva)

ESEMPIO 1

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 = 3 \\ x_1 - 3x_2 = -1 \end{cases}$$

2 eq e 2 in.

$$\begin{array}{c} a \\ b \end{array} \left(\begin{array}{cc|c} +1 & -2 & 3 \\ +1 & -3 & -1 \end{array}\right)$$

$b \to a - b$:

$$\begin{array}{c} a \\ b \end{array} \left(\begin{array}{cc|c} +1 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & 4 \end{array}\right)$$

$1-1 \quad -2+3 \quad 3+1$

$-2-(-3) \quad 3-(-1)$

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 = 3 \Rightarrow x_1 - 2(4) = 3 \Rightarrow x_1 = 3+8 \Rightarrow x_1 = 11 \\ 0x_1 + 1x_2 = 4 = x_2 = 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 11 \\ x_2 = 4 \end{cases}$$

ESEMPIO 2

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 2 \\ 2x_1 - 3x_2 = -1 \\ -x_1 + x_3 = 0 \end{cases}$$

3 eq e 3 inco.

$$\begin{array}{c} a \\ b \\ c \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} +1 & +1 & 0 & 2 \\ +2 & -3 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & +1 & 0 \end{array}\right) = (A|b)$$

$b \to 2a - b$ e $c \to a + c$

$$\begin{array}{c} a \\ b \\ c \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} +1 & +1 & 0 & 2 \\ 0 & +5 & 0 & 5 \\ 0 & +1 & +1 & 2 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ b \to 2a-b \\ c \to a+c \end{array}$$

$$\begin{array}{c} a \\ b \\ c \end{array}\left(\begin{array}{ccc|c} +1 & +1 & 0 & 2 \\ 0 & 5 & 0 & 5 \\ 0 & +1 & +1 & 2 \end{array}\right) \Rightarrow \begin{cases} 1x_1 + 1x_2 + 0x_3 = 2 \Rightarrow 1(1) + 1(1) = 2 = 4 \\ 0x_1 + 5x_2 + 0x_3 = 5 \Rightarrow 5x_2 = 5 \Rightarrow x_2 = \frac{5}{5} \Rightarrow x_2 \\ 0x_1 + 1x_2 + 1x_3 = 2 \Rightarrow 1x_2 + 1x_3 = 2 \Rightarrow 1(1) + 2 \end{cases}$$

ESEMPIO 3:

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 = 1 \\ 3x_1 - x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 - x_2 + x_3 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{array}{c} a \\ b \\ c \end{array}\left(\begin{array}{ccc|c} +2 & +1 & +1 & +1 \\ +3 & -1 & +1 & 0 \\ +1 & -1 & +1 & 0 \end{array}\right)$$

$b \to 3a - 2b$ e $c \to a + 2c$

$$\begin{array}{c} a \\ b \\ c \end{array}\left(\begin{array}{ccc|c} +2 & +1 & +1 & +1 \\ 0 & 5 & 1 & +3 \\ 0 & 3 & -1 & +1 \end{array}\right)$$

$c \to 3b - 5c$

Elimino cx_2

$c \to 3b - 5c$

$$\begin{array}{c} a \\ b \\ c \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 5 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 8 & 4 \end{array}\right) \Rightarrow \begin{cases} 2x_1 + 1\left(\frac{1}{2}\right) + 1\left(\frac{1}{2}\right) = 1 \Rightarrow 2x_1 = 0 \Rightarrow x_1 = 0 \\ 0x_1 + 5x_2 + 1\left(\frac{1}{2}\right) = +3 \Rightarrow 5x_2 + \frac{1}{2} = 3 \Rightarrow 5x_2 = \frac{5}{2} \Rightarrow x_2 = \frac{1}{2} \\ 0x_1 + 0x_2 + 8x_3 = +4 \Rightarrow 8x_3 = +4 \Rightarrow x_3 = \frac{4}{8} \Rightarrow x_3 = \frac{1}{2} \end{cases}$$

Sistema compatibile e determinato

$$\underbrace{\left(0; \frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right)}_{\exists\, 1 \text{ sol}}$$

Il metodo di Gauss consiste nell'eliminazione dell'incognita successiva.

ESEMPIO N°4:

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 - 2x_2 + x_3 = 1 \\ 2x_1 - 3x_2 + 2x_3 = 1 \end{cases}$$

$$\begin{array}{c} a \\ b \\ c \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} +1 & -1 & +1 & 0 \\ +1 & -2 & +1 & +1 \\ +2 & -3 & +2 & +1 \end{array}\right)$$

$b \to a - b$ e $c \to 2a - c$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} +1 & -1 & +1 & 0 \\ 0 & +1 & 0 & -1 \\ 0 & +1 & 0 & -1 \end{array}\right)$$

$c \to b - c$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

SISTEMA COMPATIBILE E INDETERMINATO

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \end{array}\right) \Rightarrow \begin{cases} x_1 - (-1) + x_3 = 0 \Rightarrow x_1 + 1 + x_3 \Rightarrow x_1 = -x_3 - 1 \\ x_2 = -1 \end{cases}$$

$\exists\, \infty$ sol

↳ Numero delle incognite [illegible] di eq.

Scansionato con CamScanner

ESEMPIO N°5.

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 = 4 \\ x_2 - 5x_3 = 0 \\ x_1 - x_2 + x_3 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{array}{c} a \\ b \\ c \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} +1 & -2 & +1 & 4 \\ 0 & +1 & -5 & 0 \\ +1 & -1 & +1 & 0 \end{array}\right)$$

uso $c \to c - a$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} +1 & -2 & +1 & 4 \\ 0 & +1 & -5 & 0 \\ 0 & +1 & 0 & -4 \end{array}\right)$$

$c \to c - b$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} +1 & -2 & +1 & 4 \\ 0 & +1 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & -4 \end{array}\right) \Rightarrow \begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 = 4 \Rightarrow x_1 - 2(-4) + \left(-\frac{4}{5}\right) = 4 \Rightarrow x_1 = 4 - 8 + \frac{4}{5} \Rightarrow x_1 = \frac{-16}{5} \\ x_2 - 5x_3 = 0 \Rightarrow x_2 - 5\left(-\frac{4}{5}\right) = 0 \Rightarrow x_2 + 4 = 0 \Rightarrow x_2 = -4 \\ 5x_3 = -4 \Rightarrow x_3 = \frac{-4}{5} \end{cases}$$

DETERMINATO E COMPATIBILE

$$P_0 = \left(-\frac{16}{5}; -4; -\frac{4}{5}\right)$$

$\exists$ 1 sol

$$\begin{cases} x_1 = -\frac{16}{5} \\ x_2 = -4 \\ x_3 = -\frac{4}{5} \end{cases}$$