METODO DI GAUSS

$$\begin{cases} x - y - z = 0 \\ 2x + y + z = 1 \end{cases}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -1 & 0 \\ 2 & +1 & +1 & 1 \end{array}\right)$$

$b \to 2a - b$

Se avessimo avuto 0 nella prima equazione, scambiamo le di posto le due equazioni

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & -3 & -3 & -1 \end{array}\right)$$

$+3 \quad +3 \quad +1$

-> cambio tutti i segni di questa equazione

$a \to b + 3a$

Possiamo ancora semplificare

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & +3 & +3 & +1 \end{array}\right)$$

Possiamo ancora semplificare:

$b \to \frac{b}{3} \qquad a \to \frac{a}{3}$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1/3 \\ 0 & 1 & 1 & 1/3 \end{array}\right)$$

-> Matrice unitaria di ordine 2 (quando sulla diagonale principale abbiamo 1 e 0)

Porto la terza incognita al secondo membro:

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 1/3 \\ 0 & 1 & 1/3 - z \end{array}\right)$$

Vado a scriverla nel sistema

$$\begin{cases} x = \frac{1}{3} \\ y = \frac{1}{3} - z \end{cases} \quad \forall z \in \mathbb{R} \quad \underset{sol}{\infty}$$

Avendo z al secondo membro avremo infinite soluzioni. Al variare di z variano le nostre soluzioni, le quali so infinite

Teorema fondamentale delle matrici

Se prendo una matrice $A \neq 0$ (che non sia tutta nulla), la posso sempre trasformare in una forma ridotta R.

$$A \neq 0 \longrightarrow R = \left[\begin{array}{c|c} I_{pp} & K \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right]$$

La matrice A ha rango P (l'ordine con il quale compare il rango unitario della sua forma ridotta.

Def. Chiameremo rango della matrice A l'ordine P con il quale compare il blocco unitario I_{pp} nella sua forma ridotta.

ESEMPIO

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$b \to a + 2b$ } Dobbiamo trovare quel valore tale da mi annullare quello di sotto.

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

$a \to a - b$

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

$a \to \frac{a}{2}$

$$\begin{bmatrix} \boxed{\begin{matrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{matrix}} & \begin{matrix} -1 \\ 2 \end{matrix} \end{bmatrix}$$

$$\left[I_{22} \middle| \begin{matrix} -1 \\ 2 \end{matrix}\right] : R : [I_{22} | K] \Rightarrow \text{Rango } A = 2$$

$$R = \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{array}\right]$$

Esempio:

$$A=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Scambiamo di posto la prima equazione e la seconda

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$c \to c - a$

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$a \to b - a \quad c \to b - c$

$$\left(\begin{array}{cc|c} +1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ \hline 0 & 0 & 0 \end{array}\right) = R = \left[\begin{array}{c|c} I_{22} & K \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right]$$

$$\boxed{I_{22} = \text{Rango di } A = 2}$$

Teorema di Rouché - Capelli

Sia $Ax=b$ un sistema qualunque, $\exists$ sol $\Leftrightarrow$ rango A = rango $(A|b)$

Se i due ranghi sono uguali il sistema avrà soluzioni, senno non ci sono soluzioni.

In particolare se il rango A = rango $(A|b)$ (esistono soluzioni), noi avremo che se $p=n \Rightarrow \exists 1$ sol (determinato). Se ~~[illegible]~~ $p<n \Rightarrow \exists \infty$ sol (indeterminato)

numero delle incognite

sistema determinato

sistema indeterminato.

~~resto~~

P sarebbe il rango

Scansionato con CamScanner

$$\left[\begin{array}{c|c|c} I_{pp} & K & b' \\ \hline 0 & 0 & b'' \end{array}\right]$$

$b'' \neq 0 \Rightarrow$ rango $(A|b) = (p+1)$

$\Downarrow$

$\nexists$ sol

$b'' = 0 \Rightarrow$ rango $A =$ rango $(A|b)$

$$\left[\begin{array}{c|c|c} I_{pp} & K & b' \\ \hline 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

Se $p = m$ $\left[I_{pp} \mid b' \right]$ 1 sol $x = b'$

Se $p < m$ $\left[I_{pp} \mid K \mid b' \right] \Rightarrow \left[I_{pp} \mid b' - Kx \right] \Rightarrow \infty$ sol.

ESEMPIO:

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 = 3 \\ x_1 - x_2 + x_4 = 0 \\ x_2 - x_3 + 3x_4 = 1 \end{cases}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 0 & 0 & 3 \\ 1 & -1 & 0 & +1 & 0 \\ 0 & +1 & -1 & +3 & 1 \end{array}\right)$$

$b \rightarrow b - a$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & +1 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & +1 & -1 & +3 & 1 \end{array}\right)$$

$a \rightarrow a + 2b$

$c \rightarrow c - b$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & +2 & -3 \\ 0 & +1 & 0 & +1 & -3 \\ 0 & 0 & -1 & +2 & 4 \end{array}\right)$$

$c \rightarrow -c$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & +2 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & +1 & -2 & -4 \end{array}\right)$$

I_{33} 3 = righe

Rango $A = 3 =$ rango $(A|b) \Rightarrow \exists$ sol

Sistema compatibile.

$\rho = 3 < 4 = n \Rightarrow \exists\, n \Rightarrow$ indeterminato $\Rightarrow \exists\, \infty$ sol.

una volta fra equazioni impostate la 4 incognita la trasportiamo al secondo membro

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -3-2x_4 \\ 0 & 1 & 0 & -3-1x_4 \\ 0 & 0 & 1 & -4+2x_4 \end{array}\right)$$

I_{33}

$x_1 = -3-2x_4$

$x_2 = -3-x_4$

$x_3 = -4-2x_4$

$\forall x_4 \in \mathbb{R} \iff \infty$ sol

DETERMINANTI DI A MATRICE QUADRATA

↳ Numero di righe = numero incognite
$\downarrow$ n $\downarrow$ m

$\boxed{n=1}$

$A = (a_{11})$

$\det A = |A| = a_{11} \in \mathbb{R}$

ESEMPIO:

$A = (3) \Rightarrow |A| = 3 \in \mathbb{R}$

$\boxed{n=2}$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

$\det A = a_{11} \cdot a_{22} - a_{12} \cdot a_{21} \in \mathbb{R}$

ESEMPIO:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 8 \end{pmatrix} \quad |A| = 2 \cdot 8 - 3 \cdot 5 = 16 - 15 = 1 \in \mathbb{R}$$

$\boxed{n=3}$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

$|A| = a_{11} \cdot A_{12} + a_{12} \cdot A_{22} + a_{13} \cdot A_{13}$

$$A_{11} = (-1)^{1+1} \cdot \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = (-1)^2 \cdot (a_{22} \cdot a_{33} - a_{23} \cdot a$$

$$A_{12} = (-1)^{1+2} \cdot \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} = (-1)^3 \cdot (a_{21} \cdot a_{33} - a_{23} \cdot a$$