PROBABILITÀ

Cos'è la probabilità?
La probabilità è una prova che genera un evento o una probabilità.

Cos'è la prova?
La prova è un azzardo, un esperimento svolto in condizioni di incertezza.

Cos'è un evento?
Gli eventi sono l'effetto delle prove, vengono generati dalla prova in condizioni di incertezza.

Incertezza e probabilità.
Avremo la probabilità quando ci troviamo in condizioni di incertezza.

Eventi compatibili
Quando due eventi si verificano insieme (lancio i dadi e o mi esce 2 o un numero pari)

Eventi incompatibili
Quando non si verificano insieme due eventi (lancio il dado e o mi esce 2 o mi esce 3)

Eventi complessi
Eventi complessi quando per esempio può essere suddiviso in più sottoeventi

Eventi elementari / semplici
Eventi semplici non possono essere suddivisi in più sottoeventi

Intersezione (∩)
Avremo un intersezione quando si verificano gli eventi insieme. Abbiamo l'evento A e l'evento B, avrò A ∩ B, quando si verificano entrambi (es vincita delle ~~bollette~~ scommesse)

Unione (∪)
Avrò un unione quando si verifica o uno o l'altro evento. Abbiamo l'evento A e B, avrò un unione A ∪ B, quando o si verifica A, o B, o entrambi (es vincita scommesse)

Negazione (¯) (Trattino sopra l'evento)
Vado a scrivere la negazione sopra l'evento, ossia può verificarsi tutto, tranne quell'evento. Per esempio negazione evento A, ossia $\bar{A}$ "non A", si può verificare qualsiasi evento tranne A.

Diagramma di Venn

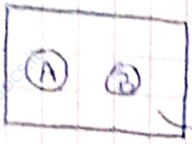
Questa scatola è la nostra prova che può essere divisa in più parti in base agli eventi che possono verificarsi.
L'insieme di tutti gli eventi che possono verificarsi si chiama spazio degli eventi o anche detto spazio campionario. Lo spazio degli eventi lo indichiamo con Ω (omega)

Rappresentare un intersezione

A ∩ B → A e B sono compatibili.

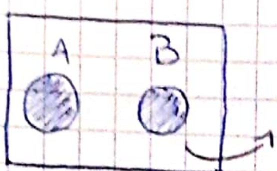
Scansionato con CamScanner

Rappresentare un intersezione con elementi incompatibili



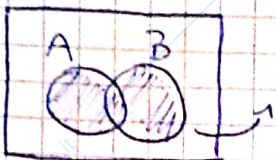
$A \cap B = \emptyset$ (insieme vuoto) → Incompatibili

Rappresentare un unione



$A \cup B$ → Incompatibili → O A e B, o solo A o solo B.

Rappresentare un unione con elementi compatibili



$A \cup B$ → Compatibili

Rappresentare una negazione

$\bar{A}$

<u>La probabilità</u>

Tre teorie:

1. La probabilità di un evento estratto da una prova di eventi equiprobabili è pari al rapporto tra numero di eventi favorevoli fratto dal numero di eventi possibili (Teoria classica della probabilità).

$$P = \frac{\#\text{ eventi favorevoli}}{\#\text{ eventi probabili}}$$

Esempio: la probabilità che ci esca 5 lanciando il dato.

$$P(⚄) = \frac{1}{6}$$

Esempio: La probabilità che ci esca un numero pari lanciando il dato

$$P(\text{num. pari}) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

Eventi equiprobabili = La probabilità che gli eventi si verificano deve essere uguale per tutti gli eventi.

La teoria classica non è applicabile quando non abbiamo eventi equiprobabili o quando abbiamo infiniti eventi

2. Teoria frequentista delle probabilità: Una prova che si ripete infinite volte nelle medesime condizioni la probabilità di un evento che si verifica è pari alla frequenza relativa dei successi

$$\lim_{n \to \infty} \frac{n.\text{ successi}(+)}{n} = P \qquad n = \text{numero di prove.}$$

Esempio:
$n = 1.000.000$
$f = 650.000$

$P = \frac{650.000}{1.000.000} = 0,65$

$\rightarrow \simeq$ rischio

La teoria frequentistica non è applicabile quando non abbiamo le stesse condizioni

3. Teoria soggettivista: La probabilità di un evento è pari alla somma che un individuo razionale è disposto a scommettere per poter vincere uno.

Individuo razionale: o scommette a rischio, quindi è avverso al rischio, maggiore è il rischio e meno scommette. Inoltre scommette sempre una somma inferiore in base alla vincita.

Dividendo 1 per la quota che può essere vinta avremo la probabilità percentuale che accada quel evento

Esempio:
Partita di calcio tra Barcellona e Alaves. Se vince il Barcellona la quota di vincita è 1,1, se vince Alaves è 10

$Barcellona = \frac{1}{1,1} = 90\%$ (90% che il Barcellona vince)

$Alaves = \frac{1}{10} = 10\%$ (10% che Alaves vince).

Queste tre teorie sono tutte vere, possono essere applicate tutte e sono tutte vere in alcune condizioni.
Abbiamo però una teoria che ci dà la definizione di probabilità, ossia la teoria assiomatica della probabilità.

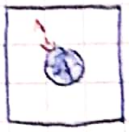
La probabilità è un valore numerico compreso tra 0 e 1.

www.unidocs.it - Appunti e dispense per superare i tuoi esami universitari

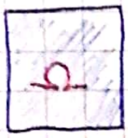
Definizione di Kolmogorov

Kolmogorov ha dato una definizione di probabilità che tutt'oggi si usa.
La probabilità è una legge che rispetta questi tre assiomi
1) Positività: Un qualunque evento A, la sua probabilità sarà sempre maggiore di 0 $P(A) \geq$
2) Certezza: Se io ho un evento certo, la probabilità dell'evento è sempre uguale a 1. $P(\Omega)=1$
3) Unione: Dati due eventi incompatibili, la $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$

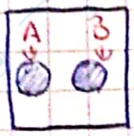
Positività:



Certezza:



Unione:



La probabilità è compresa tra 0 e 1 escluso 1.

Una qualunque prova che genera eventi incerti e rispetta questi tre assiomi è una probabilità.

↓

Teoria assiomatica → Da questa teoria provengono quattro teoremi.

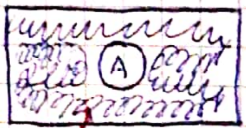
Assioma o postulato
Teoria non confermata con una prova scientifica.

Teorema della negazione
Se io ho un evento A e io voglio calcolare la negazione di A, avrò:

$A \Rightarrow P(A) \qquad P(\bar{A}) = 1 - P(A)$

$P(A) = 1 - P(\bar{A})$

Conosciuta la probabilità di A, saprò anche la probabilità di non A, e viceversa



$(\bar{A})$

$P(\Omega) = 1$

Esempio carte napoletane

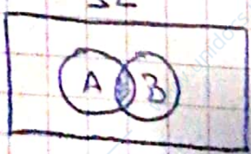
$$\underbrace{P(RE_c \cup RE_b \cup RE_s \cup RE_{sp})}_{\text{Vincere se esce un re}} = P(RE_c) + P(RE_b) + P(RE_s) + P(RE_{sp})$$

$$= \frac{1}{40} + \frac{1}{40} + \frac{1}{40} + \frac{1}{40} = \frac{4}{40}$$

Teorema delle probabilità totali
La probabilità totale la calcoliamo in questo modo:

$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

Ω



Esempio carte napoletane

A=RE
B=SPADE } Evento composto { Vinco se mi esce un re o una carta di spade. Qual'è la probabilità di vincere?

$$P(RE \cup SPADE) = \frac{4}{40} + \frac{10}{40} - \frac{1}{40} = \frac{13}{40}$$

Teorema probabilità dell'evento impossibile.
$P(\emptyset)=0$ la probabilità di un evento impossibile è 0.
↓
Insieme vuoto.

Teorema delle probabilità condizionate.
Abbiamo due eventi che possono essere compatibili o incompatibili. Se sono compatibili essi possono essere dipendenti (il verificarsi di uno muta il verificarsi dell'altro) o indipendenti (il verificarsi di uno non muta il verificarsi dell'altro). Se sono incompatibili avremo un insieme vuoto.

Esempio:

$P(R_1 \cap R_2)$ Re_1 = prima estrazione Re_2 = Re seconda estrazione.

Dipende da come si pone l'evento:

1. Rimetto la carta nel mazzo (indipendenti)

$P(R_1) = \frac{4}{40}$ (A) $P(R_2) = \frac{4}{40}$ (B)

1° R 2° $P(R) = \frac{4}{40}$

$\bar{R}$ $P(R) = \frac{4}{40}$

2. Estraggo la carta e non la inserisco nel mazzo (dipendenti)

$P(R_1) = \frac{4}{40}$ (A)

$P(R_2) = ?$ (B)

1° R — $P(R_2)$: $\frac{3}{33}$ → se esce Re alla prima estrazione $P(R_2|R_1)$

A B

$\bar{R}$ — $\frac{4}{39}$ → se non esce Re alla prima estrazione $P(R_2|\bar{R}_1)$

$$\underbrace{P(B|A)}_{\text{Probabilità condizionata}} = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$$ A = evento precedente

Scansionato con CamScanner

Esempio.

	L	$\bar{L}$	
H	10	40	50
F	50	50	100
	60	90	150

$$P(L|M) = \frac{P(L \cap M)}{P(M)} = \frac{10/150}{50/150} = \frac{10}{50} = 0{,}20$$

Abbiamo due modi

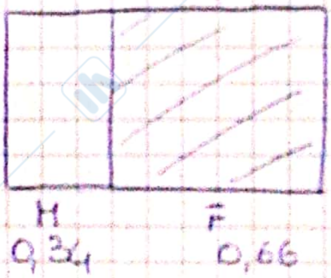
Teoria degli eventi possibili favorevoli $- \frac{10}{50}$

$P(M) = \frac{50}{100}$ $P(L) = \frac{60}{150}$ $P(M \cap L) = \frac{10}{150}$

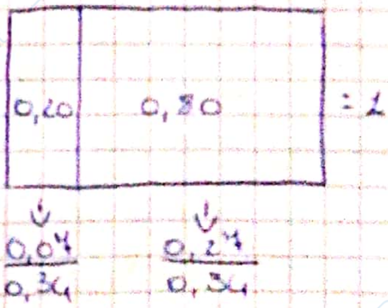
	L	$\bar{L}$	
M	0,07	0,27	0,34
F	0,33	0,33	0,66
	0,40	0,60	1

Queste saranno le nostre probabilità (Calcolate come le frequenze relative)

Diagramma di Venn $P(\Omega) = 1$



$(P(L|M))$



Teoria

Abbiamo:

$$P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$$

$P(A \cap B) = P(A)\ P(B|A)$

$P(B|A) = P(B|\bar{A}) = P(B)$

$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B) \rightarrow$ INDIPENDENZA

Definizione di indipendenza
L'indipendenza l'abbiamo quando il prodotto tra le due probabilità è uguale all'intersezione tra i due eventi (molto simile alla frequenza congiunta teorica).

$P(A \cup B)$

COMPATIBILI
$P(A)+P(B)-\underbrace{P(A \cap B)}$

INCOMPATIBILI
$P(A)+P(B)$

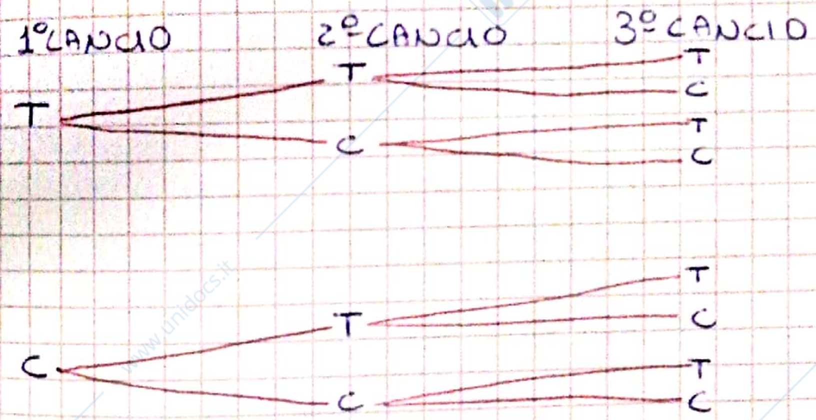
DIPENDENTI
$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B|A)$

INDIPENDENTI
$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$

In più abbiamo la negazione.

ESERCIZIO:

1. Determinare la probabilità che lanciando tre monete non truccate abbiamo 2 volte testa.



TTT
TTC ×
TCC
TCT ×

CTT ×
CTC
CCT
CCC

Quale è la probabilità che escono 2 teste? $\frac{3}{8} = 0,37$

2) Lancio due dadi e li sommo. Qual è la probabilità che esca 7?

$P(7) = ?$

Abbiamo 36 casi possibili (6·6), i casi favorevoli sono 6.

Può uscire 1 e 6 e viceversa
Può uscire 5 e 2 e viceversa
Può uscire 4 e 3 e viceversa

$\frac{6}{36} = \frac{1}{6}$.