ESERCITAZIONE

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 0 \\ x_2 - 2x_3 = 1 \\ x_1 + 3x_2 - 5x_3 = 0 \end{cases}$$

$$(A|b) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \\ 1 & 3 & -5 & 0 \end{array}\right)$$

3 eq. 3 inc.

A quadrata $\to |A|$

$\neq 0 \overset{T.}{\Rightarrow}$ Cramer det. $\Rightarrow$ Comp. e $\Rightarrow \exists 1$ sol $\Uparrow$ Regola di Cramer

$= 0 \overset{T.}{\Rightarrow}$ Cramer $\to \nexists$ sol / $\exists\, \infty$ sol

$$|A| = 1 \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 3 & -5 \end{vmatrix} + 1 \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = -5 + 6 - 4 + 3 = 0$$

$1[(1 \cdot -5) - (-2 \cdot 3)] + 1[(2 \cdot -2) - (-3 \cdot 1)] = 1[-5+6] + 1[-4+3] = 1 \cdot 1 = 0$ det $A = 0$

Rango A: $\cancel{1}, 2, \cancel{3}$ $\begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 0 & 1 & -2 \\ 1 & 3 & -5 \end{vmatrix}$

$$D_{22} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0 \overset{\text{Teorema}}{\underset{\text{Orlati}}{\Rightarrow}} \text{Rango } A \geq 2$$

$$D_{33} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 0 & 1 & -2 \\ 1 & 3 & -5 \end{vmatrix}$$

$\to$ Sappiamo già che è uguale a 0, quindi il Rango A è uguale a 2.

Rango A = 2.

Rango $(A|b) = \cancel{1}, 2, 3.$ $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \\ 1 & 3 & -5 & 0 \end{pmatrix}$ Rango $(A|b) \geq 2$ (perchè contiene D_{22})

$$D'_{33} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 0 \end{vmatrix} = -1 \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = -1 \qquad -1 \neq 0$$

Rango $(A|b) = 3 \to \nexists$ sol è un sistema impossibile

$\downarrow$

T. R. C.

Prendiamo la quarta colonna, perchè con la terza era uguale a D_{33}

Se veniva $= 0$, allora il Rango era uguale a 2 e poichè i due ranghi sono uguali esistono ∞ di sol.

$K \quad (k \in \mathbb{R})$

$$(A|b) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \\ 1 & 3 & -5 & k \end{array}\right) \quad k \in \mathbb{R}$$

$$\det A = 0 \begin{cases} \nearrow \nexists \text{ sol} \\ \searrow \exists\, \infty \text{ sol} \end{cases}$$

Rango $A = \cancel{1}, 2, \cancel{3}$

Rango $(A|b) = \cancel{1}, 2, 3$ (dipende da k)

$$D'_{33} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & k \end{vmatrix} = 1 \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & k \end{vmatrix} 1 \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = k - 3 + 2 = k - 1 = \begin{cases} \nearrow = 0 \text{ allora } \exists\, \infty \text{ sol} \\ \searrow \neq 0 \text{ allora } \nexists \text{ sol} \end{cases}$$

Scansionato con CamScanner

$|D'_{33}| = k-1 \neq 0 \Rightarrow k \neq 1$

Se $k \neq 1$ rango $(A|b) = 3 \neq$ rango $A \Rightarrow \nexists$ sol (impossibile)

Se $k = 1$ rango $(A|b) = 2 =$ rango A $\xrightarrow{T. R.C.}$ Compatibile e determinato $\Rightarrow \exists \infty$ sol

$p = 2 < 3$ num inco

Se $|D'_{33}| = 0$ allora dobbiamo trovare le soluzioni

$|D_{22}|$ e $|D'_{33}|$ ci permettono di cancellare la terza equazione, perche le principali sono le prime due, poiche i ranghi sono uguali a 2.

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 0 \\ x_2 - 2x_3 = 1 \end{cases} \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 0+3x_3 \\ 0 & 1 & 1+2x_3 \end{array}\right)$$

Applico la regola di Cramer

$$\begin{cases} x_1 = \dfrac{\begin{vmatrix} 3x_3 & 2 \\ 1+2x_3 & 1 \end{vmatrix}}{D_{22}} = \dfrac{3x_3 - 2 - 4x_3}{1} = \dfrac{-x_3 - 2}{1} = -x_3 - 2 \\ x_2 = \dfrac{\begin{vmatrix} 1 & 3x_3 \\ 0 & 1+2x_3 \end{vmatrix}}{D_{22}} = \dfrac{1 + 2x_3}{1} = 1 + 2x_3 \end{cases}$$

$\exists \infty$ sol $(-x_3 - 2 ; 2x_3 + 1 ; x_3)$ $\quad \forall x_3 \in \mathbb{R}$

Se $k \neq 1$ $\nexists$ sol

Se $k = 1$ $\exists \infty$ sol $(-x_3 - 2 ; 2x_3 + 1 ; x_3)$ $\forall x_3 \in \mathbb{R}$

ESERCITAZIONE

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \\ k & 3 & -5 & 0 \end{array}\right)$$

$$|A| = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 0 & 1 & -2 \\ k & 3 & -5 \end{pmatrix}$$

$$\det A = 1 \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 3 & -5 \end{vmatrix} + k \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = -5 + 6 + k(-1) = 1 - k \qquad |A| = 1-k$$

$|A| \neq 0$ se $k \neq 1$

$|A| = 0$ se $k = 1$ (perchè prima era uguale 1 nell'esercizio)

Se $k \neq 1$ allora $|A| \neq 0 \overset{T}{\underset{\text{Cramer}}{\Rightarrow}} \exists 1$ sol (compatibile e determinato) -> Regola di Cramer

$$\begin{cases} x_1 = \dfrac{\begin{vmatrix} 0 & 2 & -3 \\ 1 & 1 & -2 \\ 0 & 3 & -5 \end{vmatrix}}{|A|} \\ x_2 = \dfrac{\begin{vmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & -2 \\ k & 0 & -5 \end{vmatrix}}{|A|} \\ x_3 = \dfrac{\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ k & 3 & 0 \end{vmatrix}}{|A|} \end{cases}$$

$$\Downarrow$$

$$\begin{cases} x_1 = \dfrac{1}{1-k} \\ x_2 = \dfrac{-5+3k}{1-k} \\ x_3 = \dfrac{-3+2k}{1-k} \end{cases}$$

Se $k = 1$ allora $|A| = 0 \overset{T}{\underset{\text{Cramer}}{\Rightarrow}}$ $\nexists$ sol / $\exists \infty$ sol

Se $k = 1$:

$$(A|b) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \\ 1 & 3 & -5 & 0 \end{array}\right)$$

Già sappiamo che $\nexists$ sol

ESERCIZIO 1:

$$A = \begin{pmatrix} +1 & +2 & -3 \\ +3 & +1 & +k \\ +1 & 0 & +k \end{pmatrix} \quad e \quad b = \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix}$$

3 eq.
3 inco.
A(quadrata)

~~det A~~

$$\det A = +1 \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 1 & k \end{vmatrix} + k \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = 2k+3+k(-5) = 3-3k = 3(1-k)$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 3 & 1 & k \\ 1 & 0 & k \end{vmatrix}$$

$|A| = \cancel{3k-3k}\ 3(1-k) = 0 \Rightarrow 1-k=0 \Rightarrow k=1$

Se $k \neq 1$ allora $|A| \neq 0 \overset{T}{\underset{C}{\Rightarrow}} \exists 1$ sol $\Rightarrow$ Comp. e det $\Rightarrow$ Regola di Cramer

Se $k=1$ allora $|A|=0 \overset{T}{\underset{Cro.}{\Rightarrow}}$ $\nearrow \nexists$ sol ; $\searrow \exists \infty$ sol

Regola di Cramer:

$$\begin{cases} x_1 = \dfrac{\begin{vmatrix} 0 & 2 & -3 \\ 5 & 1 & k \\ 2 & 0 & k \end{vmatrix}}{3(1-k)} = \dfrac{-5\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 0 & k \end{vmatrix} + 2\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 1 & k \end{vmatrix}}{3(1-k)} = \dfrac{-5(2k)+2(2k+3)}{3(1-k)} = \dfrac{-10k+4k+6}{3(1-k)} = \dfrac{+6(\cancel{1-k})}{+3(\cancel{1-k})} = +2 \\[2ex] x_2 = \dfrac{\begin{vmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 3 & 5 & k \\ 1 & 2 & k \end{vmatrix}}{3(1-k)} = \dfrac{+1\begin{vmatrix} 5 & k \\ 2 & k \end{vmatrix} - 3\begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}}{3(1-k)} = \dfrac{3k-3}{3(1-k)} = \dfrac{\cancel{3k-3}}{\cancel{3k-3}} = -1 \\[2ex] x_3 = \dfrac{\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & 1 & 5 \\ 1 & 0 & 2 \end{vmatrix}}{3(1-k)} = \dfrac{+1\begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} + 2\begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}}{3(1-k)} = \dfrac{2-2}{3(1-k)} = \dfrac{0}{3(1-k)} = 0 \end{cases}$$

$(x_1 = +2 ; x_2 = -1 ; x_3 = 0)$

Se $k=1$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -3 & 0 \\ 3 & 1 & 1 & 5 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right) = (A|b) \qquad \det A = 0$$

Rango A = $\cancel{1}, 2, \cancel{3}$

$$|D_{22}| = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = -5 \neq 0 \Rightarrow \text{rang}\, A \geq 2$$

Rango (A|b) = $\cancel{1}, 2, \cancel{3}$

$$|D'_{33}| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & 1 & 5 \\ 1 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 0 \underset{\text{Orlati}}{\overset{T}{\Rightarrow}} \text{Rango}(A|b) = 2 = \text{rango}\, A < 3 = n \text{ numero incognite}$$

$\Downarrow$

T. R. C.

$\Downarrow$

$\exists \infty$ sol
Compatibile e indeterminato.

Trovo le soluzioni

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -3 & 0 \\ 3 & 1 & 1 & 5 \\ \cancel{1} & \cancel{0} & \cancel{1} & \cancel{2} \end{array}\right) \underset{C.}{\overset{T.}{\Rightarrow}} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & +3x_3 \\ 3 & 1 & 5-1x_3 \end{array}\right)$$

$$\begin{cases} x_1 = \dfrac{\begin{vmatrix} 3x_3 & 2 \\ 5-x_3 & 1 \end{vmatrix}}{-5} = \dfrac{3x_3 - 10 + 2x_3}{-5} = \dfrac{\cancel{5}x_3 - \cancel{10}^{2}}{-\cancel{5}} = 2 - x_3 \\ x_2 = \dfrac{\begin{vmatrix} 1 & 3x_3 \\ 3 & 5-x_3 \end{vmatrix}}{-5} = \dfrac{5 - x_3 - 9x_3}{-5} = \dfrac{-\cancel{10}^{2}x_3 + \cancel{5}^{1}}{-\cancel{5}} = +2x_3 - 1 \end{cases}$$

$\exists \infty$ sol $(2-x_3; 2x_3-1; x_3)$ $\forall x_3 \in \mathbb{R}$

Se $k \neq 1$ $\exists 1$ sol $(x_1 = +2; x_2 = -1; x_3 = 0)$

Se $k = 1$ $\exists \infty$ sol $(x_1 = 2 - x_3; x_2 = 2x_3 - 1; x_3)$ $\forall x_3 \in \mathbb{R}$