Matematica

$\boxed{n=3}$

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

$$|A| = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13}$$

$$A_{11} = (-1)^{1+1} \cdot \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = (-1)^2 (a_{22}a_{23} - a_{23}a_{32})$$

$$A_{12} = (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} = (-1)^3 (a_{21}a_{33} - a_{23}a_{31})$$

$$A_{13} = (-1)^{1+3} \cdot \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} = (-1)^4 \cdot (a_{21}a_{32} - a_{22}a_{21})$$

ESEMPIO:

Matrice con 3 righe e 3 colonne

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 3 & 1 & -1 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$|A| = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13}$$

↳ Determinante.

$$|A| = 1 \cdot A_{11} + 2 \cdot A_{12} + 5 \cdot A_{13}$$

$$A_{11} = +1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = +1(1 \cdot 2 - (-1) \cdot 1) = +1(2+1) = +1 \cdot 3 = 3$$

$$A_{12} = (-1)^3 \cdot \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ -2 & 2 \end{vmatrix} = -1(6-2) = -4$$

$$A_{13} = (-1)^4 \cdot \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} = +1(3+2) = +1(5) = 5$$

$$|A| = (1 \cdot 3) + [2 \cdot (-4)] + (5 \cdot 5) = 3 - 8 + 25 = 20$$

ESEMPIO:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$|A| = a_{11} A_{11} + a_{12} A_{12} + a_{13} A_{13}$

$|A| = 1 \cdot A_{11} + 2 A_{12} + 0 A_{13}$

$A_{11} = (-1)^2 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = +1 \cdot (1 \cdot 1 + 0 \cdot 1) = +1$

$A_{12} = (-1)^3 \cdot \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = -1 \cdot (-1 \cdot 1 - 0 \cdot 3) = +1$

$A_{13} = (-1)^4 \cdot \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = +1 \cdot (-1 - 3) = +1 \cdot (-4) = -4$

$|A| = 1 \cdot 1 + 2 \cdot 1 + 0 \cdot (-4) = 1 + 2 + 0 = 3.$

ESEMPIO:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$|A| = a_{21} \cdot A_{21} + a_{22} \cdot A_{22} + a_{23} \cdot A_{23}$

$|A| = -1 \cdot A_{21} + 1 \cdot A_{22} + 0 \cdot A_{23}$

$A_{21} = (-1)^3 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -1 (2) = -2$

$A_{22} = (-1)^4 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = +1 (+1) = +1$

$A_{23} = (-1)^5 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = -1 (1 - 6) = +5.$

$|A| = -1 \cdot (-2) + 1 \cdot 1 + 0 \cdot 5 = +2 + 1 + 0 = 3.$

↳ Vediamo che prendendo la prima riga o la seconda riga il determinante è sempre lo stesso.

Calcolando per qualsiasi riga il risultato del determinante è sempre lo stesso.

ESEMPIO:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$|A| = a_{31} A_{31} + a_{32} A_{32} + a_{33} A_{33}$

$|A| = 3 A_{31} + 1 A_{32} + 1 A_{33}$

$A_{31} = (-1)^4 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = +1 \cdot 0 = 0$

$A_{32} = (-1)^5 \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} = -1 \cdot 0 = 0$

$A_{33} = (-1)^6 \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = +1 \cdot (1+2) = 3$

$|A| = 3 \cdot 0 + 1 \cdot 0 + 1 \cdot 3 = 3$

Il modo di calcolare il determinante non cambia, è sempre lo stesso per qualsiasi m (m è il numero di colonne e di righe).

ESEMPIO. (m = 4)

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Come scegliere come calcolare il determinante? Scelgo la riga o la colonna con più 0 perché calcolo molto più veloce.

$|A| = a_{41} A_{41} + a_{42} A_{42} + a_{43} A_{43} + a_{44} A_{44}$

$|A| = 0 \, A_{41} + 0 \, A_{42} + 0 \, A_{43} + (-1) \, A_{44}$

$|A| = -1 \cdot A_{44}$

Essendo dispari cambiamo il segno

$A_{44} = (-1)^8 \cdot \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = +1 \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -1 \, (2-3) = -1 \, (-1) = +1$

$|A| = -1$

Il determinante.

Il determinante ci aiuta a determinare il rango di una matrice.

$\boxed{\text{Rango } A}$

Teorema degli orlati

Sia A una qualunque matrice (con un numero arbitrario di n). Orlando un certo numero di m, avremo un sottogruppo della matrice, D_{pp}.

Sia A_{mn} qualunque matrice e sia D_{pp} una matrice quadrata tale che $\det D_{pp} \neq 0$.

① Allora rango $A \geq p$

② Se tutti gli orlati della matrice D_{pp} di ordine $(p+1)$ hanno determinante nullo, allora rango $A = p$.

$$A = \begin{pmatrix} & \| & \\ - & \boxed{D_{pp}} & - \\ & \| & \end{pmatrix}$$

Gli orlati sono quelle righe e quelle colonne che si trovano attorno alla matrice D_{pp}.

ESEMPIO:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$D_{22} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

↳ Sottomatrice

$\det D_{22} = 3 \neq 0$

↓

① Rango $A \geq p$

↓

Rango $A \geq 2$

↓

Rango $A = 2$

$$R = \left(\begin{array}{c|c} I_{pp} & K \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right)$$

↳ Forma ridotta

↓

Rango $A = p$ della forma ridotta

ESEMPIO:

$$A = \begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{matrix}} & \begin{matrix} 0 \\ 1 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 0 & 1 \end{matrix} & 0 \end{pmatrix}$$

Può essere

rango $A = \underbrace{1, 2, 3}_{m=3}$

$$D_{22} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

Det $D_{22} = 4+1=5$.

$5 \neq 0$

rango $A \geq 2$ (D_{22}) (Dobbiamo capire se è 2 o 3)

Attraverso gli orlati.

Con gli orlati avrò la matrice A.

Il determinante A o mi viene $=0$ o $\neq 0$.

Se è $=0$ il rango $A = 2$

Se è $\neq 0$ il rang $A = 3$

$$\det \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \\ \cancel{0} & \cancel{1} & \cancel{0} \end{pmatrix}$$

⇒ Dispari, cambio i segni.

$$\det - \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = -2 \neq 0 \Rightarrow \text{rango } A = 3$$

Scansionato con CamScanner

ESEMPIO:

$$A=\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

3 righe 4 colonne

rango A = 1, 2, 3

$$D_{22}=\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}=2\neq 0 \Rightarrow \text{rango } A\geq 2$$

Orlati D_{22}

$$\underbrace{D_{33}=\begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} \quad \text{oppure} \quad D'_{33}=\begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix}}_{\text{Sono i due possibili orlati.}}$$

Se $D_{33}=0$, allora rango $A=2$

Se $D_{33}\neq 0$, allora rango $A\geq 3$

$$\det D_{33}=\begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}=2-2=0$$

$$\det D'_{33}=2\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}=0$$

rango $A=2$.

ESEMPIO:

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

rango $A=\rho=\cancel{1},2,3$

$$D_{22}=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \quad \det D_{22}=-1\neq 0.$$

$\Downarrow$

rango $A\geq 2$

Scansionato con CamScanner

$$D_{33} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 2 & -1 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{oppure} \quad D'_{33} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Se $\det D_{33} = \det D'_{33} = 0$ allora rango $A = 2$

Se $\det D_{33}$ oppure $\det D'_{33}$ sono $\neq 0$ allora rango $A = 3$.

$$\det D_{33} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 2 & -1 & -1 \end{vmatrix} = 1 \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} - 1 \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = 1 - 1 = 0$$

$$\det D'_{33} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \end{vmatrix} = 1 \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} + 2 \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = 1 + 2(1) = 3 \neq 0$$

rango $A = 3$.

ESEMPIO.

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad \text{rango } A = \cancel{1}, 2, 3$$

$$|D_{22}| = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -1 \neq 0 \quad \text{rango } A \geq 2$$

$$D_{33} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{oppure} \quad D'_{33} = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Se $\det D_{33} = \det D'_{33} = 0$ allora rango $= 2$.

Se $\det D_{33}$ oppure D'_{33} sono $\neq 0$ allora rango $= 3$.

$$\det D_{33} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{vmatrix} = -1 \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -1(-1-4) = +5 \neq 0$$

Come è uscito? Prendo la seconda riga che ha più 0, prendendo solo 1, che si trova in una posizione dispari (3 colonna + 2 righe = 5) quindi cambio i segni e invece di scrivere +1 scriverò -1.

rango $A = 3$.