www.unidocs.it - Appunti e dispense per superare i tuoi esami universitari

Fenomeno probabilistico (aleatorio):

Modelli matematici non deterministici
↓ ↳ c'è una componente di casualità ↓

Fenomeni deterministici: dato un certo evento si può sempre risalire in modo certo alle cause che l'hanno provocato (conoscendo le cause si risale sempre agli effetti)

Il risultato, data una certa causa, non è definito a priori (dato un evento non è nota l'evoluzione)

Es: Nel lancio della moneta ci sono una serie di fattori che intervengono che non sono prevedibili, per cui il risultato a priori è ignoto
↳ Molti fenomeni di questo tipo (es. lancio della palla a canestro)
↓

Modelli matematici ci devono dare una stima dell'attendibilità con cui io posso ottenere un certo risultato

Si dice PROBABILISTICO un fenomeno la cui evoluzione non sia determinata esattamente ma solamente entro un margine ± ampio d'incertezza (determinato da complessità e/o imponderabilità dei fattori che intervengono)

Applicazioni
- Nell'ambito delle telecomunicazioni: trasmettere informazioni a distanza ↓ per esempio io posso trasmettere un segnale d'informazione in cui sovrapposto al segnale utile c'è un segnale di rumore determinato dal movimento degli elettroni in un conduttore ↓ Trascurabile inizialmente (segnale utile è molto + intenso) ma più mi allontano minore è la differenza
- Analisi dell'affidabilità di sistemi complessi
- Componenti elettroniche: non so mai il valore effettivo di una resistenza ma è sempre presente un certo errore
- ambiente economico

STUDIO DEI FENOMENI ALEATORI:
- Statistica (1)
- Teoria della probabilità (2)

Dal particolare al generale

(1) si basa su METODO INDUTTIVO ⟶ parte dai dati e cerca di trovare una

www.unidocs.it - Appunti e dispense per superare i tuoi esami universitari

regola generale che descrive al meglio un certo fenomeno

www.unidocs.it - Appunti e dispense per superare i tuoi esami universitari

② Si basa su METODO DEDUTTIVO → metodo matematico che si basa su assiomi e li utilizza per descrivere fenomeni aleatori

Dal generale al particolare

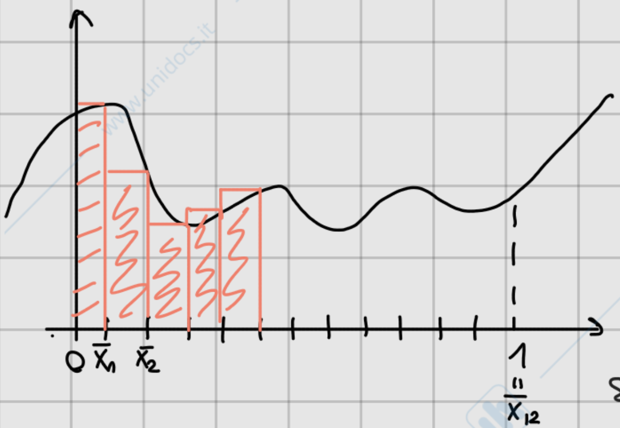
Strettamente correlati: la statistica ci serve per andare a verificare se gli assiomi descrivono correttamente il fenomeno in questione

Es. utilizzo di questa teoria x il calcolo di fenomeni non aleatori:

calcolo dell' integrale

$I = \int_0^1 f(x)\,dx$ con $f(x)$ continua in $[0,1]$

Supponiamo di non conoscere la primitiva → Approssimazione di Riemann



Divido $(0,1)$ in n intervalli di $\Delta = \frac{1}{n}$

$\bar{x}_k = k\Delta \qquad k = 1, 2, \dots, n$

$$\int_0^1 f(x)\,dx \simeq \sum_{k=1}^{n} f(\underbrace{k\Delta}_{=\bar{x}_k})\,\Delta$$

Si avvicina alla realtà quando $n \longrightarrow \infty$, $\Delta \longrightarrow 0$

Alternativa: Metodo MonteCarlo:

$$\int_0^1 f(x)\,dx \simeq \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f(x_k)$$

(Legge dei grandi numeri)

con x_k punti presi a caso in $[0,1]$

* Risolvo un problema deterministico attraverso tecniche probabilistiche (estrazione casuale di un punto)

Legame con il th del valore medio: $\int_0^1 f(x)\,dx = f(x^*)$

x^* punto interno a $(0,1)$

TEORIA ASSIOMATICA DELLA PROBABILITÁ: → É un insieme di assiomi che vanno a definire un modello matematico adatto a descrivere esperimenti che presentano una variabilità casuale ogni qual volta

Kolmogorov 1933

↳ Questo modello predice correttamente il

www.unidocs.it - Appunti e dispense per superare i tuoi esami universitari

www.unidocs.it - Appunti e dispense per superare i tuoi esami universitari

comportamento reale dell' esperimento e vengono eseguiti
e quindi può essere usato invece di eseguire l'esp.

Spazio di probabilità : terna di oggetti (3 insiemi Ω, F, P)

- Ω : insieme qualsiasi che descrive i possibili risultati del fenomeno aleatorio in questione, questo insieme è detto SPAZIO CAMPIONARIO
- F : famiglia (classe) di sottoinsiemi di Ω, ha struttura di σ-algebra
- P : funzione/mappa di probabilità, che è definita in F e a valori in $[0,1] \subset \mathbb{R}$ (a descrive il grado di probabilità) $\rightarrow P: F \rightarrow [0,1]$

Deve avere una certa struttura affinché sia utile x quello che sto facendo:

- Deve contenere il complementare, perché potrei essere interessato a calcolare la probabilità che un certo evento non si verifichi.
- Deve contenere l'intersezione di due sottoinsiemi di Ω perché potrei voler calcolare la probabilità che si verifichi sia A e B
- Deve contenere l'unione di 2 sottoinsiemi perché potrei voler calcolare che si verifichi A o B

Spazio campionario Ω :

Ω è un insieme astratto qualsiasi, ma nelle applicazioni della teoria della probabilità e problemi concreti, gli elementi rappr. i possibili risultati in un esperimento aleatorio

Es: Lancio della moneta

$\Omega = \{T, C\}$ (testa, croce)

$\{H, T\}$ (head, tail) * il nome non ha importanza, è più importante il numero di elementi

$\{0, 1\}$

↳ Può essere rappresentato con un bit

Es: Esperimento: Lancio di una moneta 3 volte

Osservazione: # di teste nei 3 lanci

$\Omega = \{0,1,2,3\}$ ← Questo spazio campionario non è sufficiente per dedurre la seconda osservazione

Esperimento: Lancio di una moneta 3 volte

Osservazione: sequenza delle facce nei 3 lanci

$\Omega = \{CCC, TCC, CTC, CCT, TTC, TCT, CTT, TTT\}$ cardinalità finita

↳ Questo volendo mi risolve anche la prima osservazione, ma è sovrabbondante, quindi è + opportuno quello + piccolo

www.unidocs.it - Appunti e dispense per superare i tuoi esami universitari

www.unidocs.it - Appunti e dispense per superare i tuoi esami universitari

Lancio di una moneta ripetuto

Osservazione: Numero del lancio in cui esce la prima testa

$\Omega = \{1, 2, 3, \dots\} = \mathbb{N}_+$ (potenzialmente possono uscire infinite croci)
cardinalità infinita numerabile

Esperimento: lettura di una parola in memoria

Osservazione: valori delle cifre binarie della parola di m bit

$\Omega = \{(b_1, \dots, b_m) : b_i \in \{0,1\}\}$
cardinalità finita (2^m combinazioni)

Esperimento: misura della "vita" (durata) di una lampadina LED

Osservazione tempo di vita

$\Omega = [0, \infty) = \mathbb{R}^+$ cardinalità infinita più che numerabile

Esperimento: descrizione del consumo di corrente di uno smartphone

Osservazione: andamento della corrente nelle 24 ore

$\Omega = \{f : [0,24] \longrightarrow \mathbb{R}\}$ insieme di funzioni (cardinalità superiore a $\mathbb{R}$)

Potrei misurare contemporaneamente anche la tensione e avrei una cardinalità ancor maggiore (funzioni bidimensionali) $\Omega = \{f : [0,24] \longrightarrow \mathbb{R}^2\}$

In generale: scegliere lo spazio campionario il più semplice possibile ma che sia comunque adatto all'osservazione fatta
Importante l'osservazione e non solo l'esperimento (vedi primi esempi)

Posso avere anche spazi campionari misti (osservazione: persone che fumano $\to \{0,1\}$ e che hanno una certa altezza $\to \mathbb{R}_+$) $\Rightarrow \Omega = \{0,1\} \times \mathbb{R}_+$

Cardinalità = "dimensione" di un dato insieme (vedi esempi sopra)

Terminologia:

Ω spazio campionario (sample space) — Lancio di un dado $\{1,2,3,4,5,6\}$

elementi di Ω

$\omega \in \Omega$ esito (evento elementare) (outcome) — valore di una faccia di un dado

collezione di esiti

$A \subset \Omega$ evento (sottoinsieme di Ω) — x es: facce pari $\{2,4,6\} \subset \Omega$
→ un evento si verifica se l'esito ω di un esperimento appartiene ad A

- Ω evento certo (sottoinsieme di se stesso) → ottengo sempre un risultato
- ϕ evento impossibile

www.unidocs.it - Appunti e dispense per superare i tuoi esami universitari

www.unidocs.it - Appunti e dispense per superare i tuoi esami universitari

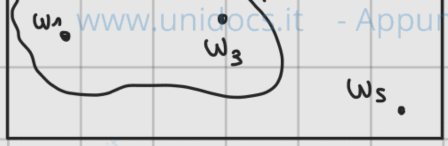
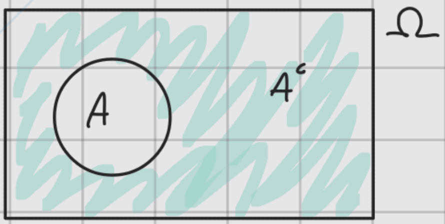


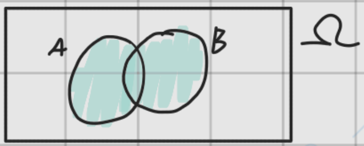
Diagramma di Venn

Definiti — Ω spazio campionario — $A \subset \Omega$, $B \subset \Omega$ eventi — ho che:

- sottoinsieme
  $A \subset B$ se $\omega \in A \Rightarrow \omega \in B$
- $A \subset B$ e $B \subset A \Rightarrow A = B$
- $A \subset B$ e $A \neq B$ si dice A sottoinsieme proprio di B
- Complemento: $\bar{A} = A^c = \{ \omega \in \Omega : \omega \notin A \}$ →

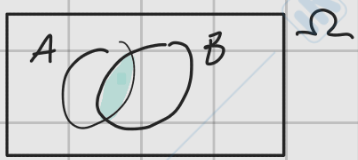


- insieme vuoto
  $\emptyset = \Omega^c$
- $\emptyset \subset A \quad \forall A$
- $A \subset \Omega \quad \forall A$
- Unione $A \cup B = \{ \omega \in \Omega : \omega \in A$ oppure $\omega \in B \}$ →



- Intersezione $A \cap B = \{ \omega \in \Omega : \omega \in A$ e $\omega \in B \}$ →

  può essere rappresentato se non c'è ambiguità con AB



- $A \subset B \Rightarrow A \cap B = A$
- $A \cap \Omega = A$
- $A \cap \emptyset = \emptyset$

www.unidocs.it - Appunti e dispense per superare i tuoi esami universitari

www.unidocs.it - Appunti e dispense per superare i tuoi esami universitari

www.unidocs.it - Appunti e dispense per superare i tuoi esami universitari