

StuDocu.com

01 - Matrici

Geometria e algebra lineare (Politecnico di Milano)

MATRICI, M.E.G., SISTEMI LINEARI

PROF.
MARCO
COMPAGNONI

This document is available free of charge on **StuDocu.com**

Scariato da Lollo Bianchi (lorenzobianchi7822@gmail.com)

SEZIONE 3.

- definizione
- operazioni

SEZIONE 3.

- riduzione a scala
- ranghi

SEZIONE 3.

- sistemi lineari
- Teorema di Rouché - Capelli
- teorema di struttura delle soluzioni

Scaricato da Lollo Bianchi (lorenzobianchi7822@gmail.com)

MATRICI (3.1)

MATRICE (DEFINIZIONE 3.1)

$$M = \{1, 2, \dots, m\} \quad N = \{1, 2, \dots, n\}$$

Una matrice è una funzione $A: M \times N \rightarrow K$
 $(i, j) \mapsto a_{ij}$

$$A = \begin{matrix} & \begin{matrix} 1 & 2 & \dots & n \end{matrix} \\ \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ \vdots \\ m \end{matrix} & \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} \end{matrix} \in \text{Mat}(m, n; K)$$

$M =$ insieme indici righe
 $N =$ insieme indici colonne

ESEMPI NOTEVOLI (DEFINIZIONE 3.4)

$O_{mm} = \begin{bmatrix} 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & \vdots \\ 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}$ Matrice nulla

$I_{mm} = \begin{bmatrix} \overset{I_m}{1} & 0 & \dots & 0 & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \overset{O_{m,m-m}}{1} & \dots & 0 & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & \vdots & \vdots & \vdots \end{bmatrix}$ Matrice identità (caso $m > n$)

$O_{mm}(i, j) = 0 \quad \forall i, j$

$I_{m,n}(i, j) = \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{se } i = j \\ 0 & \text{se } i \neq j \end{cases}$

This document is available free of charge on **StuDocu.com**

Scaricato da Lollo Bianchi (lorenzobianchi7822@gmail.com)

www.unidocs.it - Appunti e dispense per superare i tuoi esami universitari

www.unidocs.it - Appunti e dispense per superare i tuoi esami universitari

NOTAZIONI

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1m} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mm} \end{bmatrix} = [a_{ij}] = \begin{bmatrix} AR(1) \\ \vdots \\ AR(m) \end{bmatrix} = [AC(1) \mid \dots \mid AC(m)]$$

$AR(i) = [a_{i1} \dots a_{im}] \in \text{Mat}(1, m; \mathbb{K})$ riga i -esima di A

$AC(j) = \begin{bmatrix} a_{1j} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{bmatrix} \in \text{Mat}(m, 1; \mathbb{K})$ colonna j -esima di A

$a_{ij} = (A)_{ij} =$ elemento o entrata di posto (i, j)

ESEMPIO

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \begin{matrix} AR(1) \\ AR(2) \end{matrix} \in \text{Mat}(2, 2; \mathbb{Q})$$

$AC(1) \quad AC(2)$

$$(A)_{11} = a_{11} = 1$$

$$(A)_{21} = a_{21} = 3$$

Scaricato da Lollo Bianchi (lorenzobianchi7822@gmail.com)

SOMMA E PRODOTTO PER UNO SCALARE (DEF. 3.5, PROP. 3.7)

$+$: $\text{Mat}(m, m; \mathbb{K}) \times \text{Mat}(m, m; \mathbb{K}) \rightarrow \text{Mat}(m, m; \mathbb{K})$ Elemento per elemento
 $([a_{ij}], [b_{ij}]) \mapsto [a_{ij} + b_{ij}]$

\cdot : $\mathbb{K} \times \text{Mat}(m, m; \mathbb{K}) \rightarrow \text{Mat}(m, m; \mathbb{K})$ elemento
 $(t, [a_{ij}]) \mapsto [t a_{ij}]$

$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow A + A = \begin{bmatrix} 1+1 & (-1)+(-1) \\ (-1)+(-1) & 1+1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \cdot 1 & 2 \cdot (-1) \\ 2 \cdot (-1) & 2 \cdot 1 \end{bmatrix} = 2A$

(i) $(\text{Mat}(m, m; \mathbb{K}), +)$ è un gruppo abeliano, con elemento neutro O ed inverso additivo di A la matrice $(-1) \cdot A$;

- (ii) $t \cdot (A+B) = (t \cdot A) + (t \cdot B)$
 - (iii) $(t_1 + t_2) \cdot A = (t_1 \cdot A) + (t_2 \cdot A)$
 - (iv) $t_1 \cdot (t_2 \cdot A) = (t_1 \cdot t_2) \cdot A$
 - (v) $1 \cdot A = A$ normalizzazione.
- distributività; $A + A \stackrel{(v)}{=} (1 \cdot A) + (1 \cdot A) = (1+1) \cdot A = 2A$

This document is available free of charge on **StuDocu.com**
 Scariato da Lollo Bianchi (lorenzobianchi7822@gmail.com)

www.unidocs.it - Appunti e dispense per superare i tuoi esami universitari

www.unidocs.it - Appunti e dispense per superare i tuoi esami universitari

PRODOTTO RIGA PER COLONNA (DEF. 3.8, PROP. 3.1)

$$*: \text{Mat}(m, p; \mathbb{K}) \times \text{Mat}(p, m; \mathbb{K}) \rightarrow \text{Mat}(m, m; \mathbb{K})$$

$$([a_{ij}], [b_{ij}]) \longmapsto \left[\sum_{k=1}^p a_{ik} b_{kj} \right]$$

$$m = m = 1: [a_{11} \dots a_{1p}] * \begin{bmatrix} b_{11} \\ \vdots \\ b_{p1} \end{bmatrix} = \left[\sum_{k=1}^p a_{1k} b_{k1} \right] = [a_{11} b_{11} + \dots + a_{1p} b_{p1}]$$

$m = 2, p = 2, m = 3:$

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} & a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} & a_{11}b_{13} + a_{12}b_{23} \\ a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} & a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} & a_{21}b_{13} + a_{22}b_{23} \end{bmatrix}$$

ESEMPI

$$\begin{matrix} (1,3) \\ [1 \ 0 \ -1] \end{matrix} * \begin{matrix} (3,1) \\ \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \end{matrix} = [1 \cdot 1 + 0 \cdot 1 + (-1) \cdot 1] = [0] = 0 \quad (1,1)$$

$$\begin{matrix} (3,1) \\ \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \end{matrix} * \begin{matrix} (1,3) \\ [1 \ 0 \ -1] \end{matrix} = \begin{bmatrix} 1 \cdot 1 & 1 \cdot 0 & 1 \cdot (-1) \\ 1 \cdot 1 & 1 \cdot 0 & 1 \cdot (-1) \\ 1 \cdot 1 & 1 \cdot 0 & 1 \cdot (-1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \quad (3,3)$$

Scaricato da Lollo Bianchi (lorenzobianchi7822@gmail.com)

$$i) A * (B * C) = (A * B) * C \quad \text{associatività};$$

$$ii) A * (B + C) = (A * B) + (A * C), \quad (A + B) * C = (A * C) + (B * C) \quad \text{distributività};$$

$$iii) t \cdot (A * B) = (t \cdot A) * B = A * (t \cdot B) \quad \text{omogeneità};$$

$$iv) I_m * A = A, \quad A * I_m = A.$$

$$\text{Dim: } ii) (A * (B + C))_{ij} = \sum_{k=1}^p a_{ik} (B + C)_{kj} = \sum_{k=1}^p a_{ik} (b_{kj} + c_{kj}) \\ = \sum_{k=1}^p a_{ik} b_{kj} + \sum_{k=1}^p a_{ik} c_{kj} = (A * B)_{ij} + (A * C)_{ij}$$

ATTENZIONE: per * non valgono tutte le usuali proprietà

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix} \Rightarrow A * B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad B * A = \begin{bmatrix} b_{11} & 0 \\ b_{21} & 0 \end{bmatrix}$$

$$A * B = B * A \quad \text{se } b_{12} = b_{21} = 0;$$

$$A * B = O_{22} \quad \text{se } b_{11} = b_{12} = 0, \quad \text{anche se } A, B \neq O_{22};$$

$$A * B \neq I_2 \quad \text{per } \dots \quad \text{multiplicative}$$

This document is available free of charge on

StuDocu.com

Scaricato da Lollo Bianchi (lorenzobianchi7822@gmail.com)

MATRICE TRASPOSTA (DEFINIZIONE 3.11, PROPOSIZIONE 3.12)

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1m} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mm} \end{bmatrix} \in \text{Mat}(m, m; \mathbb{K}) \Rightarrow A^T = \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{m1} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{1m} & \dots & a_{mm} \end{bmatrix} \in \text{Mat}(m, m; \mathbb{K})$$

$$\textcircled{i} (A^T)^T = A \quad \text{involuzione};$$

$$\textcircled{ii} (t_1 \cdot A_1 + t_2 \cdot A_2)^T = t_1 \cdot A_1^T + t_2 \cdot A_2^T \quad \text{linearità};$$

$$\textcircled{iii} (A * B)^T = B^T * A^T.$$

ESERCIZIO: verificare che $(A_1 * \dots * A_k)^T = A_k^T * \dots * A_1^T$.

Scaricato da Lollo Bianchi (lorenzobianchi7822@gmail.com)

METODO DI ELIMINAZIONE DI GAUSS (3.2)

PIVOT E MATRICE A SCALA (DEFINIZIONE 3.13)

Pivot P_i = primo elemento non nullo di $AR(i)$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & \dots & 0 & P_1 & * & \dots & * & * & * & \dots & * & * & * & \dots & * \\ 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & P_2 & * & \dots & * & * & * & \dots & * \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & P_r & * & \dots & * \end{bmatrix} \in \text{Mat}(m, n; \mathbb{K})$$

$O_{m-r, n}$

P_i è pivot
sinistra di P_{i+1}
per ogni $1 \leq i < r$

Una matrice con la struttura di A si dice a scala.

rank di $A = r(A) = r \leq \min(m, n)$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

A SCALA, $r(A) = 2$

" " " "

" " " " A SCALA

This document is available free of charge on **StuDocu.com**
 Scaricato da Lollo Bianchi (lorenzobianchi7822@gmail.com)

OPERAZIONI ELEMENTARI SULLE RIGHE (DEFINIZIONE 3.15)

i) Permutazione: $AR(i) \leftrightarrow AR(j)$;ii) Moltiplicazione per uno scalare non nullo: $AR(i) \rightarrow t \cdot AR(i)$, $t \neq 0$ iii) Somma di righe: $AR(i) \rightarrow AR(i) + t \cdot AR(j)$, $t \in \mathbb{K}$, $i \neq j$.

METODO DI ELIMINAZIONE DI GAUSS (TEOREMA 3.16)

È sempre possibile ridurre una matrice A ad una matrice S .

S attraverso una sequenza finita di operazioni elementari.

RANGO (DEFINIZIONE 3.18)

rango di $A = r(A) = r(S)$

$$B = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{R_2 - R_1 \rightarrow R_2} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$r(B) = 1$$

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{R_2 \leftrightarrow R_3} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$r(C) = 2$$

Scaricato da Lollo Bianchi (lorenzobianchi7822@gmail.com)

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 6 & 8 \end{bmatrix} \xrightarrow[\substack{R_2 - \frac{1}{2} \cdot R_1 \rightarrow R_2 \\ R_3 - R_1 \rightarrow R_3}]{R_2 - \frac{1}{2} \cdot R_1 \rightarrow R_2} \begin{bmatrix} 2 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 4 \\ 0 & 4 & 4 & 8 \end{bmatrix} \xrightarrow{R_3 - 2R_2 \rightarrow R_3} \begin{bmatrix} 2 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = S$$

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 6 & 8 \end{bmatrix} \xrightarrow[\substack{R_3 - 2 \cdot R_2 \rightarrow R_3}]{\frac{1}{2} \cdot R_1 \rightarrow R_1} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{R_2 - R_1 \rightarrow R_2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = S'$$

$$\Rightarrow r(A) = r(S) = r(S') = 2$$

Esistono diverse riduzioni a scala di A , ma tutte hanno stesso numero di pivot!

This document is available free of charge on **StuDocu.com**

Scaricato da Lollo Bianchi (lorenzobianchi7822@gmail.com)

SISTEMI LINEARI (DEFINIZIONE 3.21)

$a_{ij}, b_i \in \mathbb{K}$ coefficienti, x_j incognite, $1 \leq i \leq m$, $1 \leq j \leq n$.

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + \dots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases} \Rightarrow A = \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}, X = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

$$\begin{matrix} \updownarrow \\ A * X = B \end{matrix}$$

$[A|B]$ = matrice completa del sistema lineare

$[A|0_m]$ = matrice del sistema omogeneo

ALGORITHM DI GAUSS PER LA RISOLUZIONE DEI SISTEMI LINEARI

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 1 \\ x_1 - x_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow [A|B] = \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{array} \right] \xrightarrow{R_2 - R_1 \rightarrow R_2} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & -1 \end{array} \right] \Rightarrow$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 1 \\ -2x_2 = -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 1 - 1/2 = 1/2 \\ x_2 = 1/2 \end{cases} \Rightarrow (x_1, x_2) = (1/2, 1/2)$$

Verifica: $\begin{cases} 1/2 + 1/2 = 1 \\ 1/2 - 1/2 = 0 \end{cases}$ $A * X = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} 1/2 \\ 1/2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = B$

Scaricato da Lollo Bianchi (lorenzobianchi7822@gmail.com)

EQUIVALENZA DEI SISTEMI LINEARI (PROPOSIZIONE 3.22)

Sia $[A|B]$ un sistema lineare ed $[S|B']$ una sua riduzione a

Allora i due sistemi lineari hanno lo stesso insieme delle soluzioni.

Dim: ogni riga di $[A|B]$ corrisponde ad una equazione.

i) $[A|B]_{R(i)} \leftrightarrow [A|B]_{R(j)}$ = cambio l'ordine delle equazioni
le soluzioni non cambiano.

ii) $[A|B]_{R(i)} \rightarrow t \cdot [A|B]_{R(i)}$, $t \neq 0$ = l'equazione è moltiplicata per
costante \Rightarrow le soluzioni non cambiano.

iii) $[A|B]_{R(i)} \rightarrow [A|B]_{R(i)} + t \cdot [A|B]_{R(j)} = [A_{R(i)} + t \cdot A_{R(j)} | b_{i1} + t \cdot b_{j1}]$

$$1) \begin{cases} a_{i1}x_1 + \dots + a_{im}x_m - b_i = 0 \\ a_{j1}x_1 + \dots + a_{jm}x_m - b_j = 0 \end{cases}$$

Sistema
iniziale

$$2) \begin{cases} (a_{i1}x_1 + \dots + a_{im}x_m - b_i) + t(a_{j1}x_1 + \dots + a_{jm}x_m - b_j) = 0 \\ a_{j1}x_1 + \dots + a_{jm}x_m - b_j = 0 \end{cases}$$

Sistema
trasformato

This document is available free of charge on

StuDocu.com

Scaricato da Lollo Bianchi (lorenzobianchi7822@gmail.com)

• Sia $(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_m) \in \mathbb{K}^m$ soluzione di (1). Allora

$$(a_{i1}\bar{x}_1 + \dots + a_{im}\bar{x}_m - b_i) + t \cdot (a_{i1}\bar{x}_1 + \dots + a_{im}\bar{x}_m - b_i) = 0 + t \cdot 0 = 0$$

$\Rightarrow (\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_m)$ è soluzione di (2).

• Sia $(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_m) \in \mathbb{K}^m$ soluzione di (2). Allora

$$(a_{i1}\bar{x}_1 + \dots + a_{im}\bar{x}_m - b_i) + t \cdot (a_{i1}\bar{x}_1 + \dots + a_{im}\bar{x}_m - b_i) = 0 \Rightarrow$$

$$(a_{i1}\bar{x}_1 + \dots + a_{im}\bar{x}_m - b_i) + t \cdot 0 = a_{i1}\bar{x}_1 + \dots + a_{im}\bar{x}_m - b_i = 0 \quad \forall t$$

$\Rightarrow (\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_m)$ è soluzione di (1).

Combinando i risultati precedenti, possiamo dire che ogni sistema lineare è equivalente ad un sistema ridotto a scala. Pertanto analizziamo tutti i possibili casi di sistemi ridotti.

CASO 1: $\text{rk}([A|B]) > \text{rk}([A]) \Rightarrow$ SISTEMA SOVRANETERMINATO

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \Rightarrow \begin{cases} x + y + z = 0 \\ y + z = 0 \\ 0 = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{array}{l} \text{L'ultima equazione} \\ 0 \cdot x + 0 \cdot y + 0 \cdot z = \\ \text{non ha soluzione} \end{array}$$

CASO 2: $\text{rk}([A|B]) = \text{rk}([A]) = n \Rightarrow$ SISTEMA DETERMINATO

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right] \Rightarrow \begin{cases} x + y + z = 0 \\ y + z = 0 \\ z = 1 \\ 0 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -y - z = 1 - 1 = 0 \\ y = -z = -1 \\ z = 1 \end{cases}$$

Esiste un pivot per ogni colonna, cioè per ogni incognita. Partendo dall'ultima equazione, troviamo un'unica soluzione.

CASO 3: $\text{rk}([A|B]) = \text{rk}([A]) < n \Rightarrow$ SISTEMA SOTTODETERMINATO

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array} \right] \Rightarrow \begin{cases} x + y + z = 0 \\ z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -y - z = -t \\ y = t \\ z = 0 \end{cases} \quad \begin{array}{l} t \text{ varia} \\ \text{in } \mathbb{K} \end{array}$$

Esistono infinite soluzioni, in quanto sono incognite non corrispondenti ai pivot.

This document is available free of charge on **StuDocu.com**

Scaricato da Lolo Bianchi (lorenzobianchi7822@gmail.com)

www.unidocs.it - Appunti e dispense per superare i tuoi esami universitari

www.unidocs.it - Appunti e dispense per superare i tuoi esami universitari

TEOREMA DI ROUCHE - CAPELLI (TEOREMA 3.24)

Consideriamo il sistema associato ad $[A|B] \in \text{Mat}(m, m+1; \mathbb{K})$:

- i) la soluzione non esiste se $r([A|B]) > r(A)$;
- ii) la soluzione esiste unica se $r([A|B]) = r(A) = m$;
- iii) esistono infinite soluzioni dipendenti da $m - r(A)$ parametri se $r([A|B]) = r(A) < m$.

SISTEMI LINEARI OMOGENEI (COROLLARIO 3.25)

$[A|0_{m,1}]$ ha sempre soluzione. (in particolare $X = 0_{m,1}$)

NUCLEO DI UNA MATRICE (DEFINIZIONE 3.26)

$\text{Ker}(A) = \{ X \in \text{Mat}(m, 1; \mathbb{K}) \mid A * X = 0_{m,1} \} = \text{nucleo o Kernel di } A$

$$\text{Ker} \left(\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \right) = \left\{ \begin{bmatrix} -t \\ t \\ 0 \end{bmatrix} = t \cdot \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, t \in \mathbb{K} \right\} \quad \infty^{3-2} = \infty^1$$

Scaricato da Lollo Bianchi (lorenzobianchi7822@gmail.com)

$$\begin{cases} x + y + z = 1 \\ z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 1 - t \\ y = t \\ z = 0 \end{cases} \Rightarrow X = \begin{bmatrix} 1-t \\ t \\ 0 \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}}_{X_p} + t \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}}_{X_0}$$

$$A * X_0 = 0_{2 \times 1}, \quad A * X_p = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = B \quad \infty^1 \text{ soluzioni}$$

STRUTTURA DELLE SOLUZIONI (TEOREMA 3.28)

Sia $[A|B]$ risolubile \Rightarrow la soluzione generale è $X = X_p + X_0$,

- X_p = una soluzione particolare di $[A|B]$;
- X_0 = la soluzione generale di $[A|0_{m \times 1}]$.

This document is available free of charge on **StuDocu.com**

Scaricato da Lollo Bianchi (lorenzobianchi7822@gmail.com)