www.unidocs.it - Appunti e dispense per superare i tuoi esami universitari

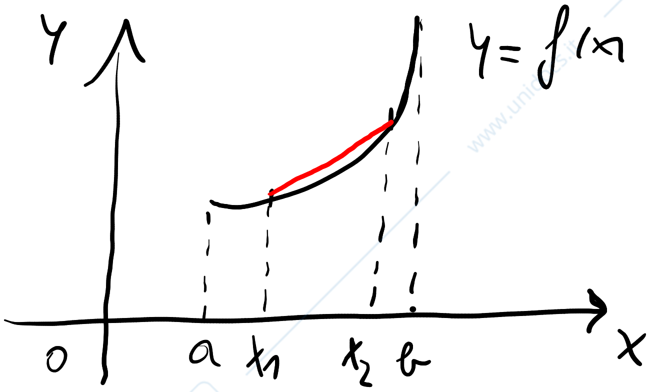
CONVESSITÀ, CONCAVITÀ, PUNTI DI FLESSO

CONSIDERIAMO $f: I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

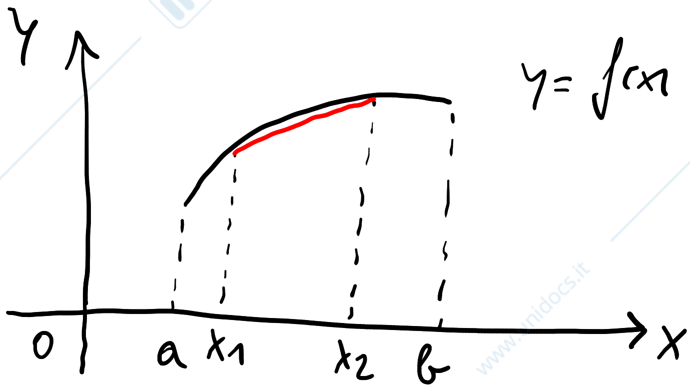
DEF. DIREMO CHE f È <u>CONVESSA IN I</u> SE $\forall$ $P_1 = (x_1, f(x_1))$, $P_2 = (x_2, f(x_2))$ CON $x_1 \neq x_2$ IL GRAFICO DI f GIACE AL DI SOTTO DEL SEGMENTO $\overline{P_1P_2}$ IN (x_1, x_2) (OPPURE (x_2, x_1)).

f SI DIRÀ <u>CONCAVA</u> IN I SE $-f$ È CONVESSA IN I.

<u>OSS. 1</u>



$y = f(x)$ È CONVESSA IN (a, b)



$y = f(x)$ È CONCAVA IN (a, b)

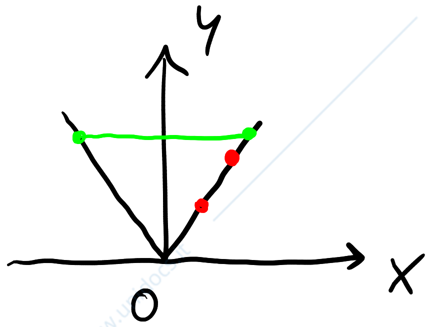
www.unidocs.it - Appunti e dispense per superare i tuoi esami universitari

www.unidocs.it - Appunti e dispense per superare i tuoi esami universitari

OSS 2 SE IL GRAFICO DI f È STRETTAMENTE AL DI SOTTO (AL DI SOPRA) DI OGNI SEGMENTO $P_1 P_2$ f SI DIRÀ STRETTAMENTE CONVESSA (CONCAVA) IN I.

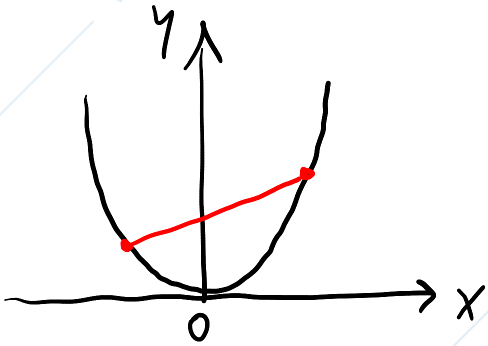
ESEMPI

1) $f(x) = |x|$
$x \in \mathbb{R}$



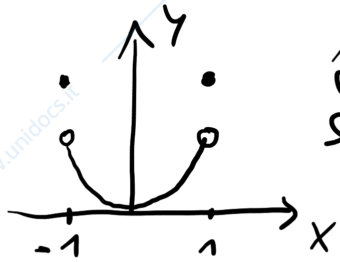
f È CONVESSA MA NON STRETTAMENTE

2) $f(x) = x^2$
$x \in \mathbb{R}$



f È STRETTAMENTE CONVESSA

3) $f(x) = \begin{cases} x^2 & |x| < 1 \\ 2 & |x| = 1 \end{cases}$



f È STRETTAMENTE CONVESSA

f È DISCONTINUA IN ± 1.

DOMANDA: UNA FUNZIONE CONVESSA (CONCAVA) IN (a, b) PUÒ AVERE PUNTI DI DISCONTINUITÀ? NO.

www.unidocs.it - Appunti e dispense per superare i tuoi esami universitari

www.unidocs.it - Appunti e dispense per superare i tuoi esami universitari

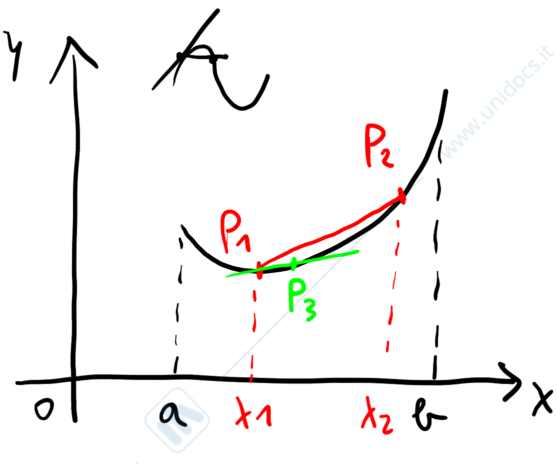
VALE INFATTI IL

TEO. (REGOLARITÀ FUNZIONI CONVESSE)

SIA $f: (a, b) \to \mathbb{R}$, $a, b \in \mathbb{R}^*$. SE f È CONVESSA (CONCAVA) IN (a, b) ALLORA f È CONTINUA E IL SUO GRAFICO PUÒ AVERE AL PIÙ PUNTI ANGOLOSI.

SUPPONIAMO ORA CHE $f: (a, b) \to \mathbb{R}$, $a, b \in \mathbb{R}^*$, SIA DERIVABILE IN (a, b).

OSSERVIAMO CHE SE f È CONVESSA IN (a, b) ALLORA



N.B. IL GRAFICO DI f È AL DI SOPRA DI QUALUNQUE RETTA TANGENTE

SE $x_2 \to x_1$ LA RETTA PASSANTE PER P_1 E P_2 DIVENTA LA RETTA TANGENTE AL GRAFICO DI f IN P_1

QUINDI

$$f(x) \geq f(x_1) + f'(x_1)(x - x_1) \quad \forall x \in (a, b)$$

VALE ANCHE IL VICEVERSA. INFATTI ABBIAMO

www.unidocs.it - Appunti e dispense per superare i tuoi esami universitari

www.unidocs.it - Appunti e dispense per superare i tuoi esami universitari

TEO. (CONVESSITÀ E RETTA TANGENTE)

SIA $f:(a,b)\to\mathbb{R}$, $a,b\in\mathbb{R}^*$, DERIVABILE IN (a,b).

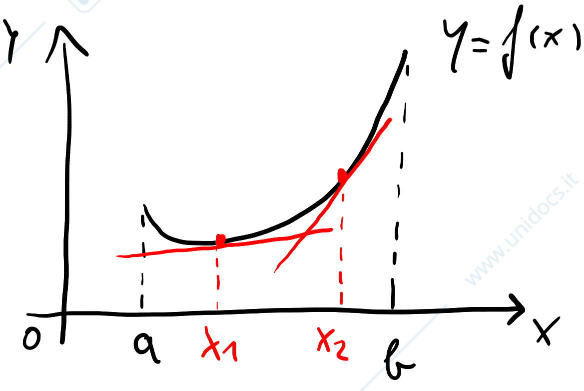
ALLORA:

f È CONVESSA (CONCAVA) IN (a,b) $\iff$ $\forall x_0\in(a,b)$

$$(1)\quad f(x) \geq (\leq)\ f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0) \quad \forall x\in(a,b).$$

OSS. 3 SE IN (1) VALE $>$ ($<$) PER $x\neq x_0$ ALLORA f SARÀ STRETTAMENTE CONVESSA (CONCAVA).

OSS. 4 OSSERVIAMO CHE



$x_2>x_1$

$\Downarrow$

$f'(x_2)>f'(x_1)$

PERCIÒ

f CONVESSA (CONCAVA) IN (a,b) $\iff$ f' È CRESCENTE (DECRESCENTE)

PIÙ PRECISAMENTE VALE IL SEGUENTE

www.unidocs.it - Appunti e dispense per superare i tuoi esami universitari

www.unidocs.it - Appunti e dispense per superare i tuoi esami universitari

TEO. (CONVESSITÀ E DERIVATA SECONDA)

SIA $f:(a,b)\to\mathbb{R}$, $a,b\in\mathbb{R}^*$, 2 VOLTE DERIVABILE IN (a,b). ALLORA:

f È CONVESSA (CONCAVA) IN $(a,b) \iff f''(x)\geq 0$ $(\leq)$ $\forall x\in(a,b)$.

OSS. 5 SE $f''(x)>0$ $(<)$ $\forall x\in(a,b)$ ALLORA f È STRETTAMENTE CONVESSA (CONCAVA) IN (a,b).

IL VICEVERSA PUÒ NON VALERE. INFATTI

$f(x)=x^4$, $x\in\mathbb{R}$ È STRETTAMENTE CONVESSA IN $\mathbb{R}$

MA $f''(x)=12x^2$ NON È STRETTAMENTE POSITIVA IN $\mathbb{R}$.

www.unidocs.it - Appunti e dispense per superare i tuoi esami universitari

www.unidocs.it - Appunti e dispense per superare i tuoi esami universitari

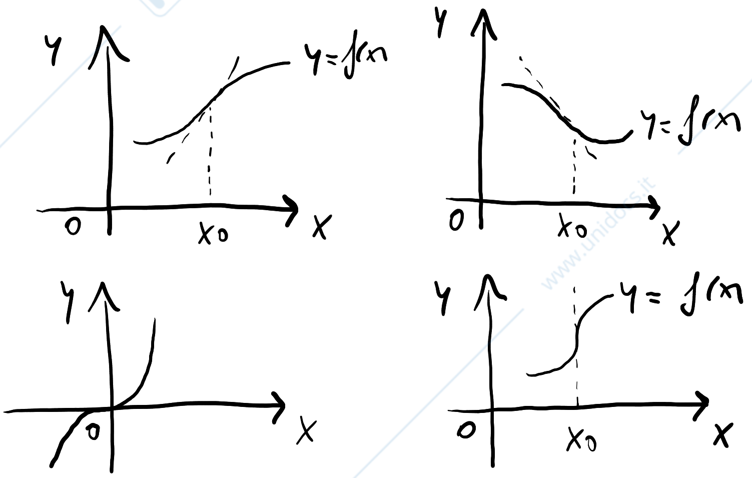
DEF. SIA $f : (a, b) \to \mathbb{R}$, $a, b \in \mathbb{R}^*$, DERIVABILE IN $x_0 \in (a, b)$ CON DERIVATA FINITA O INFINITA. SE $\exists\, \delta > 0$ T.C.

$$\begin{cases} f \text{ È STRETT. CONVESSA (CONCAVA) IN } (a,b) \cap (x_0, x_0+\delta) \\ f \text{ È STRETT. CONCAVA (CONVESSA) IN } (a,b) \cap (x_0-\delta, x_0) \end{cases}$$

ALLORA DIREMO CHE $(x_0, f(x_0))$ È UN <u>PUNTO DI FLESSO PER IL GRAFICO DI</u> f.

OSS. 6 SI USA ANCHE DIRE CHE x_0 È UN PUNTO DI FLESSO PER f.

ESEMPI



PUNTO DI FLESSO A TANGENTE ORIZZONTALE

PUNTO DI FLESSO A TANGENTE VERTICALE

USANDO IL TEOREMA DI FERMAT POSSIAMO PROVARE UNA CONDIZIONE NECESSARIA PER L'ESISTENZA DI UN PUNTO DI FLESSO. VALE INFATTI IL SEGUENTE

www.unidocs.it - Appunti e dispense per superare i tuoi esami universitari

www.unidocs.it - Appunti e dispense per superare i tuoi esami universitari

TEO. (CONDIZIONE NECESSARIA $\exists$ PUNTO DI FLESSO)

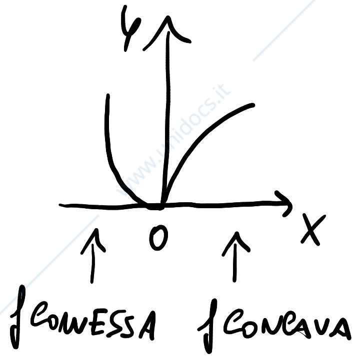
SE $(x_0, f(x_0))$ È UN PUNTO DI FLESSO PER IL GRAFICO DI $f:(a,b)\to\mathbb{R}$, $a,b\in\mathbb{R}^*$, E f È 2 VOLTE DERIVABILE IN x_0 ALLORA

$$f''(x_0)=0.$$

DIM. BASTA APPLICARE IL TEO. DI FERMAT A f' NOTANDO CHE f' ESISTE IN UN INTORNO DI x_0.

OSS. 7 I PUNTI ANGOLOSI O CUSPIDALI NON SONO CLASSIFICATI COME PUNTI DI FLESSO. PER ESEMPIO

$$f(x):=\begin{cases}\sqrt{x}, & x\geq 0\\ x^2, & x<0\end{cases}$$



$f'_+(0)=+\infty$

$f'_-(0)=0$

MA $(0,0)$ NON È UN PUNTO DI FLESSO.

OSS. 8 LA CONDIZIONE $f''(x_0)=0$ È SOLO NECESSARIA.

INFATTI

$$f(x)=x^4,\ x\in\mathbb{R} \implies f''(x)=12x^2,\ f''(0)=0$$

MA $(0,0)$ È UN PUNTO DI MINIMO GLOBALE E NON È UN PUNTO DI FLESSO.

www.unidocs.it - Appunti e dispense per superare i tuoi esami universitari

www.unidocs.it - Appunti e dispense per superare i tuoi esami universitari

OSS. 9 SE $f:(a,b)\to\mathbb{R}$, $a,b\in\mathbb{R}^*$, È DUE VOLTE DERIVABILE IN (a,b), LA STRATEGIA PER INDIVIDUARE GLI EVENTUALI PUNTI DI FLESSO SARÀ QUELLA DI STUDIARE IL SEGNO DI f'' IN (a,b). UNA STRATEGIA ANALOGA A QUELLA PER INDIVIDUARE GLI EVENTUALI PUNTI ESTREMANTI DI f, MA IN QUESTO CASO OCCORRE STUDIARE IL SEGNO DI f' IN (a,b).

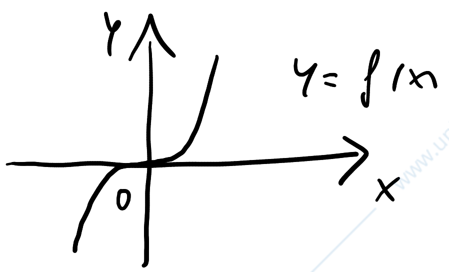
ESEMPI

1) $f(x) = x|x|$, $x\in\mathbb{R}$

$$f(x) = \begin{cases} x^2, & x\geq 0 \\ -x^2, & x<0 \end{cases}, \quad f'(x) = \begin{cases} 2x, & x\geq 0 \\ -2x, & x<0 \end{cases}$$

QUINDI $f'(x) = 2|x|$ PERCIÒ $\nexists f''(0)$

USIAMO LA DEF. DI PUNTO DI FLESSO $\begin{cases} f' \uparrow \quad x>0, \quad f' \downarrow \quad x<0 \Rightarrow (0,0) \text{ È UN PUNTO DI FLESSO} \\ f \text{ CONVESSA IN } (0,+\infty) \quad f \text{ CONCAVA IN } (-\infty,0) \end{cases}$



www.unidocs.it - Appunti e dispense per superare i tuoi esami universitari

www.unidocs.it - Appunti e dispense per superare i tuoi esami universitari

2) $f(x) = e^{-x^2}, \quad x \in \mathbb{R}$

SIMMETRIE $f(x) = f(-x) \Rightarrow f$ È UNA FUNZIONE PARI (IL GRAFICO È SIMMETRICO RISPETTO ALL'ASSE Y)

SEGNO $f(x) > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$

CONTINUITÀ, DERIVABILITÀ: f È CONTINUA IN $\mathbb{R}$ CON DERIVATE CONTINUE DI OGNI ORDINE IN $\mathbb{R}$

LIMITI AI BORDI DEL DOMINIO: $\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = 0^+ \Rightarrow y = 0$ ASINTOTO ORIZZONTALE

STUDIO PUNTI ESTREMANTI

$f'(x) = -2x\,e^{-x^2}$

f': $+$ prima di 0, $-$ dopo 0

f: $\nearrow \quad \searrow$

$x = 0$ PUNTO DI MASSIMO (GLOBALE)

$f(0) = 1$ MASSIMO GLOBALE, $\inf_{\mathbb{R}} f = 0$

$\mathrm{Im}(f) = (0, 1]$

PUNTI DI FLESSO

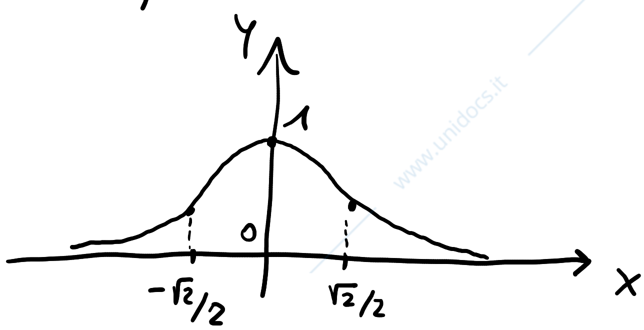
$f''(x) = -2e^{-x^2} + 4x^2 e^{-x^2} = 2(2x^2 - 1)e^{-x^2}$

f'': $+$ prima di $-\sqrt{2}/2$, $-$ tra $-\sqrt{2}/2$ e $+\sqrt{2}/2$, $+$ dopo $+\sqrt{2}/2$

f: $\cup \quad \cap \quad \cup$

$\left(\pm \frac{\sqrt{2}}{2}, e^{-1/2}\right)$ UNICI PUNTI DI FLESSO

GRAFICO QUALITATIVO



www.unidocs.it - Appunti e dispense per superare i tuoi esami universitari

www.unidocs.it - Appunti e dispense per superare i tuoi esami universitari

ESERCIZI

1) $f(x) = x^{1/3}$;

2) $f(x) = x\left(2 + \frac{1}{\ln x}\right)$.

www.unidocs.it - Appunti e dispense per superare i tuoi esami universitari