

Analisi Matematica 1 e Geometria - 26 settembre 2013

Prof. F. Gazzola

Teoria (3 punti) Enunciare il teorema di Rouché-Capelli per i sistemi del tipo $Ax = b$ con A matrice $m \times n$.

1) (8 punti) Studiare la funzione

$$f(x) = 2 \cos^2 x - \cos x + 1.$$

È richiesto anche lo studio della derivata seconda.

2) (4 punti) Stabilire per quali valori del parametro $k \in \mathbf{R}$, i tre vettori seguenti sono linearmente indipendenti:

$$\mathbf{u} = (1, -2, -k), \quad \mathbf{v} = (-2, 4k, 2), \quad \mathbf{w} = (-k, 2, 1).$$

Stabilire poi per quali valori di $k \in \mathbf{R}$ risulta $\mathbf{u} \wedge \mathbf{v} = 0$.

3) (4 punti) Sviluppare fino al terzo ordine in $x = 0$ la funzione

$$f(x) = \text{ArcSh } x.$$

4) (4 punti) Data $f(x) = e^{|x|}$, disegnare

$$g(t) = \min_{x \leq t} f(x) \quad (t \in \mathbf{R}).$$

5) (5 punti) Determinare la matrice X che soddisfa l'equazione

$$AX^{-1}B = A^2 \quad \text{con} \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 7 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}.$$

6) (4 punti) Calcolare l'integrale indefinito

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2 - 1}}.$$

Analisi Matematica 1 e Geometria - 12 settembre 2013

Prof. F. Gazzola

Teoria (3 punti) Enunciare e dimostrare il teorema degli zeri per le funzioni continue.

1) (8 punti) Studiare la funzione

$$f(x) = x e^{(x-1)/(x-2)} .$$

È richiesto anche lo studio della derivata seconda.

2) (5 punti) Al variare del parametro $k \in \mathbf{R}$, determinare il rango della matrice

$$M_k = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -k \\ -2 & 4k & 2 \\ -k & 2 & 1 \end{pmatrix} .$$

3) (4 punti) Calcolare l'integrale

$$\int_0^3 \frac{dx}{1 + 4\sqrt{x}} .$$

4) (4 punti) Calcolare il limite

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x \cos 2x - \sin x}{x \log(1 + 2x^2)} .$$

5) (4 punti) Si considerino i vettori

$$\mathbf{v}_1 = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}} \right) \quad \text{e} \quad \mathbf{v}_2 = \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}} \right) .$$

Si determini un vettore \mathbf{v}_3 tale che $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$ sia una base ortonormale di \mathbf{R}^3 .

6) (4 punti) Dato il numero complesso $\alpha = 2(\cos \frac{\pi}{5} - i \sin \frac{\pi}{5})$, determinare i numeri complessi z tali che αz sia immaginario puro.

Analisi Matematica 1 e Geometria - 4 luglio 2013

Prof. F. Gazzola

Teoria (3 punti) Enunciare e dimostrare il teorema fondamentale del calcolo integrale.

1) (7 punti) Studiare la funzione

$$f(x) = \log|x| - \frac{x+1}{x} \log|x+1|;$$

non è richiesto lo studio della derivata seconda. Tracciare il grafico di f sapendo che i flessi sono il minimo compatibile con lo studio dei limiti e della derivata prima.

2) (5 punti) Calcolare gli integrali

$$(i) \int_0^{\pi/2} \frac{dx}{3 + \cos x} \quad (ii) \int_{-1}^1 x^4(1+x^5)^{3/2} dx .$$

3) (5 punti) Si consideri l'applicazione lineare $L : \mathbf{R}^3 \rightarrow \mathbf{R}^3$ e sia A la matrice rappresentativa di L (rispetto alla base canonica),

$$A = \begin{pmatrix} k-3 & 7 & k-1 \\ 0 & 3 & 1 \\ 2-k & 4 & 0 \end{pmatrix} .$$

Stabilire, al variare di k , se L è iniettiva, suriettiva, biiettiva. Stabilire poi per quale valore di k il vettore $\mathbf{v} = (-5, -1, 4)$ appartiene a $Im(L)$. Per tali k trovare la controimmagine di \mathbf{v} .

4) (4 punti) Scrivere in forma trigonometrica e in forma esponenziale le radici seste di $64i$. Rappresentarle poi nel piano complesso.

5) (4 punti) Determinare il poinimio di MacLaurin di $f(x) = \log \cos x$ al quarto ordine. Calcolare quindi al variare di $\lambda > 0$ il limite

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\log \cos x}{x^\lambda}$$

6) (4 punti) Nello spazio \mathbf{R}^3 determinare la distanza tra la retta d'equazione $x = 2y = 1 - z$ e il piano d'equazione $3x + 2y + 4z = 2$.

SOLUZIONE

3) Risulta $i = 64e^{i\pi/2}$. Quindi le sei radici seste sono

$$\sqrt[6]{64i}^{\text{C}} = 2e^{i(\pi/12+k\pi/3)} = 2 \left[\cos \left(\frac{\pi}{12} + k\frac{\pi}{3} \right) + i \sin \left(\frac{\pi}{12} + k\frac{\pi}{3} \right) \right] \quad (k = 0, \dots, 5).$$

Le soluzioni si dispongono nei vertici di un esagono regolare inscritto nella circonferenza di raggio 2.

Analisi Matematica 1 e Geometria - 27 febbraio 2013

Ingegneria dei Processi Industriali

Prof. F. Gazzola

Teoria (3 punti) Enunciare e dimostrare il teorema del valor medio di Lagrange.

1) **(8 punti)** Studiare la funzione

$$f(x) = \arcsin |e^{2x} - 1| - 1$$

e rappresentarne il grafico. È richiesto anche lo studio della derivata seconda.

2) **(3 punti)** Determinare i polinomi di McLaurin di grado 4 e di grado 5 della funzione

$$f(x) = \sin(x) + \frac{\sin(x^3)}{6} - x.$$

3) **(4 punti)** Calcolare l'integrale indefinito

$$\int \frac{\sin x \cos^3 x}{1 + \cos x} dx$$

4) **(4 punti)** Per ogni valore di k determinare il rango della matrice

$$A_k = \begin{pmatrix} k & 1 & -1 \\ 1 & k & -k \\ k+1 & 2k & -2 \end{pmatrix}.$$

Stabilire per quali valori di k la matrice A_k è invertibile e calcolare l'inversa di A_0 .

5) **(4 punti)** Scrivere l'equazione della sfera con centro in $(-1, 0, 0)$ e tangente alla retta r di equazioni $x - 2y + 3z = 2x + y + z = 4$.

6) **(3 punti)** Trovare nel campo complesso tutte le soluzioni dell'equazione

$$z^4 = (\sqrt{3} - i)z.$$

7) **(3 punti)** Dato l'insieme

$$E = \left\{ x_n = (-1)^n - \frac{2}{n}, \quad n \in \mathbb{N} \right\}$$

valutare $\text{Sup } E$, $\text{Inf } E$, $\text{Max } E$, $\text{Min } E$.

Analisi Matematica 1 e Geometria - 28 gennaio 2013

Ingegneria dei Processi Industriali

Prof. F. Gazzola

Teoria (3 punti) Enunciare e dimostrare il teorema degli zeri per funzioni continue.

1) (12 punti) Studiare la funzione

$$f(x) = (3x - 2)^{1/9} e^{-x/3}$$

e rappresentarne il grafico. È richiesto anche lo studio della derivata seconda.

2) (4 punti) Calcolare il limite

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{e^{-2x^2} - \cos 2x}{x^4} .$$

3) (5 punti) Usando la formula di Taylor, calcolare il valore approssimato di $\sin(0.1)$ con un errore inferiore a 10^{-4} .

4) (8 punti) Calcolare gli integrali indefiniti

$$\int \frac{(\log x) \cos(\pi \log x)}{x} dx \quad , \quad \int \frac{x + 1}{x^2 + 2x + 10} dx .$$

Analisi Matematica 1 e Geometria - 14 novembre 2012

Ingegneria dei Processi Industriali

Prof. F. Gazzola

Teoria (3 punti) Enunciare il Teorema di Rouché-Capelli per la risoluzione di sistemi lineari.

1) (2 punti) Mostrare per induzione o mediante calcolo diretto che

$$\sum_{k=1}^n (4k - 2) = 2n^2 .$$

2) (2 punti) Risolvere in \mathbf{C} l'equazione $\bar{z}^4 = (1 + i)z^2$.

3) (4 punti) Disegnare nel piano di Gauss gli insiemi

$$\begin{aligned} A &= \left\{ z \in \mathbf{C} : 1 \leq |z| < 2 \text{ e } \frac{\pi}{3} \leq \arg(z) \leq \frac{\pi}{2} \right\} \\ B &= \left\{ w \in \mathbf{C} : w = z^3, z \in A \right\} \\ C &= \left\{ v \in \mathbf{C} : v = -\frac{i}{2}w, w \in B \right\} . \end{aligned}$$

4) (3 punti) Scrivere l'equazione del piano Π passante per il punto $P(-2, 1, 1)$ e contenente la retta di equazioni parametriche

$$\begin{cases} x = 1 - 3t \\ y = 2t \\ z = 1 + t . \end{cases}$$

5) (2 punti) Per quali valori di $k \in \mathbf{R}$ i tre punti $P(1, 1, k)$, $Q(0, k, 1)$, $R(2, k - 1, 2k)$ sono complanari con l'origine?

6) (4 punti) Trovare il nucleo e l'immagine della trasformazione lineare $L : \mathbf{R}^3 \rightarrow \mathbf{R}^2$ definita da $L(x, y, z) = (x - 2y + z, x - 2y + 2z)$. Stabilire poi se è iniettiva e/o suriettiva.

7) (4 punti) Scrivere la matrice che rappresenta l'applicazione lineare $A : \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}^2$ definita da

$$A\mathbf{e}_1 = \mathbf{u}, \quad A\mathbf{e}_2 = \mathbf{v} \quad \text{con} \quad \mathbf{u} = \begin{pmatrix} 2 \\ \alpha \end{pmatrix}, \quad \mathbf{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} .$$

a) Per quali valori di $\alpha \in \mathbf{R}$ la matrice A è invertibile?

b) Trovare le rette per l'origine trasformate in se stesse dall'applicazione lineare associata alla matrice A .

8) (4 punti) Determinare autovalori e autovettori della matrice

$$A = \begin{pmatrix} -1/2 & -3/2 & 0 \\ -3/2 & -1/2 & 0 \\ 3/2 & 3/2 & 1 \end{pmatrix}$$

e stabilire se è diagonalizzabile.

9) (4 punti) Dire per quali valori di $k \in \mathbf{R}$ il seguente sistema è risolvibile. Calcolare quindi le soluzioni, sia con il metodo per sostituzione che con il metodo di Cramer.

$$\begin{cases} x + 2y + kz = 1 \\ x + ky + (k - 1) = 0 . \end{cases}$$

Prova scritta di **Analisi e Geometria 1** - 10 settembre 2012

Percorso ASPRO

Prof. F. Gazzola

Punteggi: Teoria 6, 1) 10, 2) 5, 3) 4, 4) 5.

Teoria: Equazioni differenziali lineari del prim'ordine; illustrare il principio di sovrapposizione e il metodo di variazione delle costanti arbitrarie.

1) Studiare e rappresentare il grafico della funzione

$$f(x) = (x + 1) \exp\left(\frac{x}{x - 1}\right).$$

È richiesto anche lo studio della derivata seconda.

2) Per ogni $\alpha, \beta > 0$ si consideri l'integrale

$$I(\alpha, \beta) = \int_0^1 x^\alpha (1 - x)^\beta dx.$$

i) Dimostrare che $I(\alpha, \beta) = I(\beta, \alpha) \quad \forall \alpha, \beta > 0$.ii) Dimostrare che, per ogni $\alpha, \beta > 0$, è ben definito $I(\alpha + 1, \beta - 1)$ ed esprimerlo in funzione di $I(\alpha, \beta)$.iii) Calcolare $I(4, 7)$.3) Determinare il polinomio di McLaurin di settimo grado della funzione $g(x) = 1 - \cos(x) \cosh(x)$.4) Si consideri la linea γ in forma parametrica

$$r(t) = \begin{cases} x(t) = t - \sin t \\ y(t) = 1 - \cos t \end{cases} \quad (0 \leq t \leq 2\pi).$$

i) Disegnare la linea γ .ii) Stabilire se γ è semplice, chiusa, regolare.

iii) Determinare le coordinate del suo baricentro.

SOLUZIONE (10/9/12)

1) Dominio $\mathbf{R} \setminus \{1\}$; $f(-1) = 0$;

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty, \quad \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = 0, \quad \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty;$$

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = e, \quad \lim_{x \rightarrow \pm\infty} [f(x) - ex] = 2e \implies y = e(x+2) \text{ asintoto obliquo in } \pm\infty.$$

$$f'(x) = \frac{x(x-3)}{(x-1)^2} \exp\left(\frac{x}{x-1}\right) \quad f''(x) = \frac{5x-3}{(x-1)^4} \exp\left(\frac{x}{x-1}\right).$$

Quindi $f'(x) > 0$ se $x < 0$ o $x > 3$ mentre $f'(x) < 0$ se $0 < x < 1$ o $1 < x < 3$; inoltre, $f''(x) > 0$ se $\frac{3}{5} < x < 1$ o $x > 1$ mentre $f''(x) < 0$ altrove.

2) i) Si ottiene con il cambio di variabile $t = 1 - x$.ii) Se $\beta > 0$, allora $\beta - 1 > -1$ ed è quindi integrabile (eventualmente in senso improprio) anche $I(\alpha + 1, \beta - 1)$; integrando per parti si ottiene poi

$$I(\alpha, \beta) = \frac{\beta}{\alpha + 1} I(\alpha + 1, \beta - 1).$$

iii) Applicando più volte quanto visto sopra, ci si riduce al calcolo di $I(11, 0)$ che è elementare:

$$I(4, 7) = I(7, 4) = \frac{1}{2} I(8, 3) = \frac{1}{6} I(9, 2) = \frac{1}{30} I(10, 1) = \frac{1}{30} \frac{1}{11} I(11, 0) = \frac{1}{30} \frac{1}{11} \frac{1}{12}.$$

3) Sfruttando un prodotto notevole, si trova

$$\begin{aligned} \cos(x) \cosh(x) &= \left(1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + o(x^7)\right) \left(1 + \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^6}{6!} + o(x^7)\right) \\ &= \left(1 + \frac{x^4}{4!}\right)^2 - \left(\frac{x^2}{2} + \frac{x^6}{6!}\right)^2 + o(x^7) = 1 - \frac{x^4}{6} + o(x^7); \end{aligned}$$

pertanto, il polinomio cercato è $\frac{x^4}{6}$.4) ii) Dato che $x, y \in C^1[0, 2\pi]$ e che $x'(t) = 1 - \cos t > 0$ in $[0, 2\pi]$ la linea è semplice e regolare; inoltre, $x(0) \neq x(2\pi)$ e quindi la linea non è chiusa.iii) Si ha $x'(t) = 1 - \cos t$ e $y'(t) = \sin t$ per cui la lunghezza è data da

$$\ell(\gamma) = \int_0^{2\pi} \sqrt{2(1 - \cos t)} dt = 2 \int_0^{2\pi} \sin(t/2) dt = 8.$$

Pertanto,

$$\bar{x} = \frac{1}{\ell(\gamma)} \int_0^{2\pi} x(t) \sqrt{2(1 - \cos t)} dt = \frac{1}{4} \int_0^{2\pi} (t - \sin t) \sin(t/2) dt = \pi, \quad \bar{y} = \frac{4}{3}.$$

Prova scritta di **Analisi e Geometria 1** - 9 luglio 2012

Percorso ASPRO

Prof. F. Gazzola

Punteggi: Teoria 6, 1) 10, 2) 5, 3) 5, 4) 4.

Teoria: La formula di Taylor. Enunciare il risultato sia con il resto di Peano che con il resto di Lagrange e dimostrare il primo.

1) Studiare e rappresentare il grafico della funzione

$$f(x) = \arctan\left(x - \frac{1}{x}\right).$$

È richiesto anche lo studio della derivata seconda.

2) Risolvere il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'' = -\frac{x}{y'} \\ y(0) = 0 \\ y'(0) = 1. \end{cases}$$

3) Sia r la retta che passa per il punto $(0, 1, 2)$ ed è parallela ai due piani di equazioni

$$x + y = 4, \quad 2y - z = 0.$$

(i) Determinare le equazioni parametriche della retta r .(ii) Determinare la distanza tra i punti di intersezione della retta r con la sfera di equazione $x^2 + y^2 + z^2 = 1$.4) Stabilire per quali valori reali di α e β converge l'integrale

$$\int_0^{+\infty} \frac{(x+1)^\alpha}{|x-1|^\beta} \sin \frac{1}{x} dx.$$

SOLUZIONE (9/7/12)

1) L'insieme di definizione è $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$: funzione dispari, studio su $(0, +\infty)$.

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = -\frac{\pi}{2}, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \frac{\pi}{2}.$$

Asintoto orizzontale $x = \frac{\pi}{2}$ per $x \rightarrow +\infty$. Osserviamo che $f(1) = 0$. Derivate:

$$f'(x) = \frac{1+x^2}{x^4-x^2+1}, \quad f''(x) = -\frac{2x(x^4+2x^2-2)}{(x^4-x^2+1)^2}.$$

Quindi, $f'(x) > 0 \forall x > 0$, mentre f'' si annulla per $x = \sqrt{\sqrt{3}-1} < 1$ dove c'è un flesso discendente. Il grafico è:

2) Riduciamo l'ordine ponendo $z = y'$

$$\begin{cases} z' = -\frac{x}{z} \\ z(0) = 1. \end{cases}$$

Separando le variabili e imponendo la condizione iniziale si trova $z(x) = \sqrt{1-x^2}$. Integrando $y'(x) = \sqrt{1-x^2}$ e imponendo $y(0) = 0$ si ottiene

$$y(x) = \int_0^x \sqrt{1-t^2} dt = \frac{1}{2} (\arcsin x + x\sqrt{1-x^2})$$

dove abbiamo utilizzato il cambio di variabile $t = \sin \tau$.

3) (i) Posto $y = t$, l'intersezione tra i due piani è la retta di equazioni parametriche

$$x = 4 - t, \quad y = t, \quad z = 2t;$$

questa retta ha vettore direttore $v = (-1, 1, 2)$. Lo stesso v è vettore direttore di r che ha quindi equazioni

$$x = -t, \quad y = 1 + t, \quad z = 2(1 + t).$$

(ii) Intersecando la retta r con la sfera si ottiene l'equazione

$$(-t)^2 + (1+t)^2 + 4(1+t)^2 = 1 \implies 3t^2 + 5t + 2 = 0 \implies t \in \left\{ -1, -\frac{2}{3} \right\}.$$

Si trovano i punti $A(1, 0, 0)$ e $B(\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3})$, la cui distanza è $\sqrt{2/3}$.

4) Converge sse $\alpha < \beta < 1$.

Prova scritta di **Analisi e Geometria 1** - 13 febbraio 2012

Percorso ASPRO

Prof. F. Gazzola

Punteggi: Teoria 6, 1) 10, 2) 4, 3) 6, 4) 4.

Teoria: La formula di Taylor. Enunciare il risultato sia con il resto di Peano che con il resto di Lagrange e dimostrare il primo.

1) Si consideri la funzione

$$f(x) = (x \log x)^2 - x(\log x + 1) + 1.$$

- dopo avere determinato il suo insieme di definizione D , calcolare le derivate f' , f'' , f''' ;
- dimostrare che $f'''(x) > 0 \forall x \in D$;
- dimostrare che f' ha un minimo assoluto su D , calcolare $f'(1)$ e determinare il numero di zeri di f' ;
- studiare la monotonia e la convessità di f e tracciarne un grafico qualitativo.

2) Stabilire se converge l'integrale improprio

$$\int_{-\infty}^1 (1 - e^{e^x} + e^{x+1}) dx.$$

3) Determinare tutte le soluzioni dell'equazione differenziale

$$y' = e^x + 3x^2(y - e^x)^2.$$

Suggerimento: si cambi la funzione incognita ponendo $z(x) = \dots$ in funzione di $y(x)$.
Determinare poi l'intervallo di prolungabilità della soluzione del problema di Cauchy $y(0) = 0$.

4) Determinare i numeri interi $n \in \mathbf{N}$ per i quali il numero complesso $(\sqrt{3} + i)^n$ è un numero reale negativo.

SOLUZIONE (13/2/12)

$$1) f'(x) = 2x \log x (\log x + 1) - \log x - 2, \quad f''(x) = 2(\log x + 1)^2 + 2 \log x - \frac{1}{x},$$

$$f'''(x) = \frac{4}{x}(\log x + 1) + \frac{2}{x} + \frac{1}{x^2}.$$

Dato che f'' è monotona e vale $\pm\infty$ in $+\infty$ e 0, c'è un solo flesso. Ci sono poi un massimo e un minimo relativi a sinistra e a destra del flesso. Direzione asintotica verticale in $+\infty$.

2) Per $x \rightarrow -\infty$ si ha $1 - e^{e^x} - e^{x+1} \sim (e-1)e^x$, integrale convergente.

3) Posto $z(x) = y(x) - e^x$, l'equazione diventa $z'(x) = 3x^2 z(x)^2$ che è a variabili separabili. Osservato che $z \equiv 0$ è soluzione, separando le variabili si ottiene

$$\frac{dz}{z^2} = 3x^2 dx \implies z(x) = -\frac{1}{x^3 + c} \quad (c \in \mathbf{R}).$$

Le soluzioni sono quindi $y(x) = e^x$ (corrispondente a $z \equiv 0$) e $y(x) = e^x - \frac{1}{x^3 + c}$. La soluzione del problema di Cauchy è quindi $y(x) = e^x - \frac{1}{x^3 + 1}$ che è prolungabile su tutto l'intervallo $(-1, +\infty)$.

4) $(\sqrt{3} + i)^n = 2^n e^{in\pi/6}$ è reale negativo sse $n\pi/6 = \pi + 2k\pi$ per qualche $k \in \mathbf{Z}$, quindi sse $n = 6 + 12k$, cioè $n = 6, 18, 30, 42, \dots$

Prova scritta di **Analisi e Geometria 1** - 30 gennaio 2012

Percorso ASPRO

Prof. F. Gazzola

Punteggi: Teoria 6, 1) 4, 2) 6, 3) 8, 4) 6.

Teoria. Risoluzione di equazioni differenziali lineari: illustrare il metodo di sovrapposizione e la variazione delle costanti arbitrarie.

1) Calcolare i seguenti integrali indefiniti

$$\int \frac{dx}{x + 2\sqrt{x} + 3}, \quad \int e^{2x} \sqrt{e^x - 1} dx .$$

2) Motivando dettagliatamente la risposta stabilire per quali valori del parametro $a \in \mathbf{R}$ convergono i seguenti integrali

$$A = \int_0^2 \frac{dx}{|\log x|^a}, \quad B = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-x} - 1}{x^a} dx, \quad C = \int_0^{+\infty} \frac{x \sin \frac{1}{x}}{1 + x^a} dx .$$

3) Determinare la funzione $y = y(x)$ definita per $x \geq 0$ e soddisfacente alle seguenti condizioni:

- il suo grafico passa per il punto $A(0, 1)$ e ha ivi tangente orizzontale;
- la lunghezza $\ell(x)$ dell'arco del grafico compreso tra i punti A e $P(x, y(x))$ coincide con la pendenza della curva in P .

4) Si consideri la curva

$$r(t) \begin{cases} x(t) = t^2 + 1 \\ y(t) = 2 \sin t \\ z(t) = 2 \cos t \end{cases} \quad (t \in \mathbf{R}).$$

- a) mostrare che la curva è regolare;
- b) determinare la terna intrinseca alla curva all'istante $t = 0$;
- c) determinare l'equazione del piano osculatore alla curva all'istante $t = 0$.

SOLUZIONE (30/1/12)

1) Posto $x = t^2$ (nel primo integrale) e $e^x = 1 + t^2$ (nel secondo integrale) si ottiene

$$\int \frac{dx}{x + 2\sqrt{x} + 3} = \int \frac{2t dt}{t^2 + 2t + 3} = \log(t^2 + 2t + 3) - \sqrt{2} \arctan \frac{t + 1}{\sqrt{2}} + c = \log(x + 2\sqrt{x} + 3) - \sqrt{2} \arctan \frac{\sqrt{x} + 1}{\sqrt{2}} + c$$

$$\int e^{2x} \sqrt{e^x - 1} dx = 2 \int (t^4 + t^2) dt = \frac{2}{5} t^5 + \frac{2}{3} t^3 + c = \frac{2}{5} (e^x - 1)^{5/2} + \frac{2}{3} (e^x - 1)^{3/2} + c.$$

2) A converge per $a < 1$, B converge per $1 < a < 2$, C converge per $a > 1$.3) Per ogni $x \geq 0$ le condizioni si traducono in

$$\ell(x) = \int_0^x \sqrt{1 + y'(t)^2} dt = y'(x).$$

Derivando questa relazione si trova l'equazione del second'ordine $y''(x) = \sqrt{1 + y'(x)^2}$ che deve essere completata con le condizioni iniziali $y(0) = 1$ e $y'(0) = 0$. Posto $z(x) = y'(x)$, il problema diventa

$$z' = \sqrt{1 + z^2}, \quad z(0) = 0.$$

Separando le variabili si trova $\log(z + \sqrt{1 + z^2}) = x + c$; imponendo la condizione iniziale si ricava $z(x) = \sinh x$. Integrando e ricordando che $y(0) = 1$ si trova infine $y = \cosh x$.4) a) La curva è regolare dato che si ha $r \in C^1(\mathbf{R})$ e inoltre

$$r'(t) = 2(\mathbf{i} + \cos t \mathbf{j} - \sin t \mathbf{k}) \neq 0 \quad \forall t \in \mathbf{R}.$$

b) Il versore tangente all'istante t è dato da

$$T(t) = \frac{r'(t)}{|r'(t)|} = \frac{\mathbf{i} + \cos t \mathbf{j} - \sin t \mathbf{k}}{\sqrt{t^2 + 1}}.$$

Di conseguenza,

$$T'(t) = \frac{\mathbf{i} - [t \cos t + (t^2 + 1) \sin t] \mathbf{j} + [t \sin t - (t^2 + 1) \cos t] \mathbf{k}}{(t^2 + 1)^{3/2}}.$$

Per quanto visto sopra, abbiamo

$$T(0) = \mathbf{j}, \quad N(0) = \frac{T'(0)}{|T'(0)|} = \frac{\mathbf{i} - \mathbf{k}}{\sqrt{2}}, \quad B(0) = T(0) \wedge N(0) = -\frac{\mathbf{i} + \mathbf{k}}{\sqrt{2}}.$$

c) Il punto $M(x, y, z)$ appartiene al piano osculatore sse $[M - r(0)] \cdot B(0) = 0$ e quindi sse $x + z = 3$.