



---

# Successioni e Limiti di successioni

---

*Author:*

Livolsi Luca

<b>1</b>	<b>Definizione e proprietà</b>	<b>1</b>
1.1	Successioni limitate, positive e negative . . . . .	2
1.2	Successioni convergenti e divergenti . . . . .	3
<b>2</b>	<b>Limite di una successione</b>	<b>5</b>
2.1	Successione di Bernoulli . . . . .	10
<b>3</b>	<b>Sottosuccessioni</b>	<b>10</b>
<b>4</b>	<b>Successioni di Cauchy</b>	<b>12</b>
4.1	Proprietà delle successioni di Cauchy . . . . .	12
<b>5</b>	<b>Limiti di successioni</b>	<b>13</b>
5.1	Operazioni sui limiti . . . . .	13
5.2	La successione $(1 - 1/n)^n$ . . . . .	13
5.3	Operazioni e aritmetica in $\mathbb{R}$ . . . . .	14
5.4	Forme di indecisione e successioni particolari . . . . .	14
5.5	Limiti notevoli . . . . .	15
5.6	Gerarchie di infiniti e di infinitesimi . . . . .	18
<b>6</b>	<b>L'Asintotico</b>	<b>20</b>
6.1	Prodotto e quoziente . . . . .	21
6.2	Potenze . . . . .	21
6.3	Considerazioni sulle proprietà . . . . .	21
6.4	Polinomio in $n$ . . . . .	21
6.5	Asintotici notevoli . . . . .	21
6.6	Limiti di usabilità dell'asintotico . . . . .	22
6.7	Asintotico rispetto al logaritmo . . . . .	22
6.8	Asintotico rispetto all'esponenziale . . . . .	23

*Tratto dalle lezioni di Analisi Matematica 1  
del professor Vittorino Pata*

## 1. Definizione e proprietà

### Successione Numerica

**Definizione 1.1.** Una *successione numerica* è una funzione  $a : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ , di dominio  $D(a) = \{n_0, n_0 + 1, n_0 + 2, \dots\}$ . La variabile indipendente è indicata con  $n$  e la funzione  $a(n)$  come  $a_n$ . In generale:

$$a : n \mapsto a_n \text{ e } f : \{n \in \mathbb{N} : n \geq n_0\} \rightarrow \mathbb{R}$$

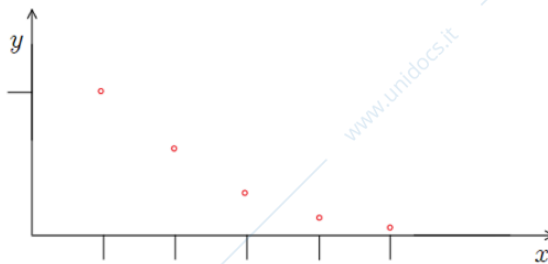
**Esempio.**

$$a_n = \frac{1}{n} \rightarrow n > 0 \text{ opp. } n \geq 1$$

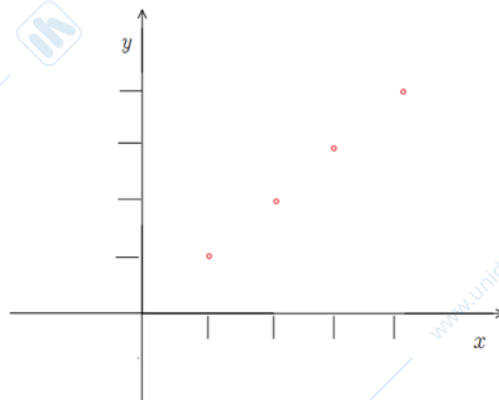
$$b_n = \frac{1}{\log(\log n)} \rightarrow n \geq 2$$

Esempi di successioni particolari:

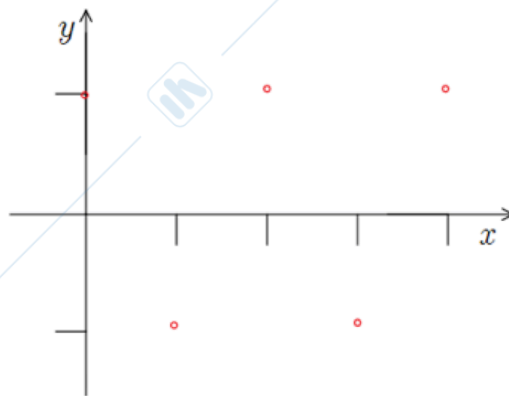
■  $a_n = \frac{1}{n}$ : converge



■  $b_n = n \rightarrow$  diverge



■  $c_n = (-1)^n$ : irregolare



**Definizione**

**Definizione 1.2.** Si dice che  $a_n$  possiede (o acquista) *definitivamente* (*defin.*) una certa proprietà (p) se

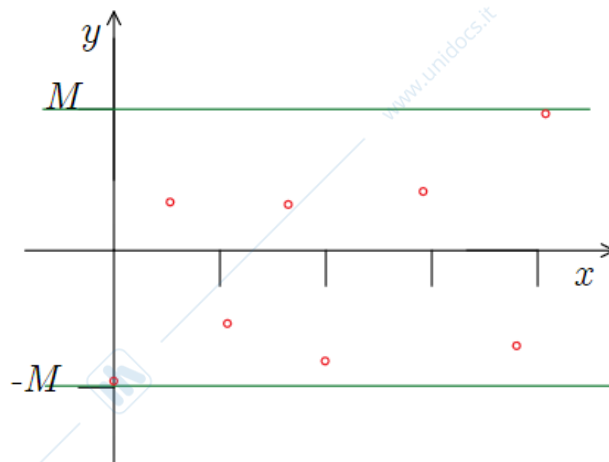
$$\exists n_0 \in \mathbb{N} \text{ t.c. } a_n \text{ soddisfa } (p) \forall n \geq n_0$$

**Esempio.**  $a_n = n - 13$  Non positiva, ma definitivamente positiva.

**1.1** Successioni limitate, positive e negative**Successione limitata**

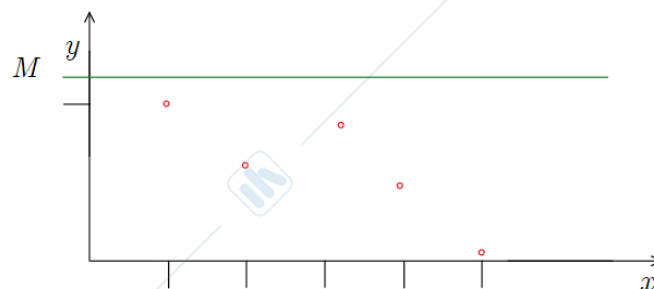
**Definizione 1.3.** Una successione è *limitata* se  $\exists M > 0$  t.c.  $|a_n| \leq M \forall n$

Dal grafico si intuisce che tutti gli elementi sono contenuti nella striscia  $[-M; M]$ :

**Successione superiormente limitata**

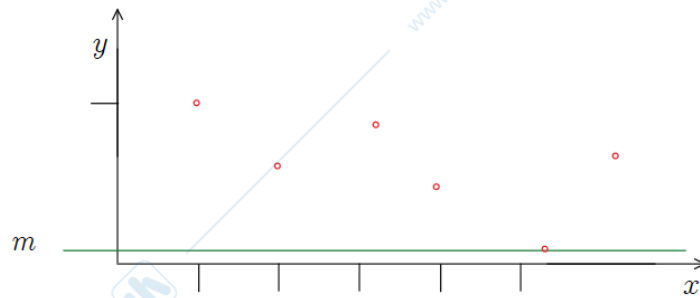
**Definizione 1.4.** Una successione  $a_n$  si dice *superiormente limitata* se  $\exists M \in \mathbb{R}$  t.c.  $a_n \leq M \forall n$

Graficamente è rappresentata così:

**Successione inferiormente limitata**

**Definizione 1.5.** Una successione  $a_n$  si dice *inferiormente limitata* se  $\exists m \in \mathbb{R}$  t.c.  $a_n \geq m \forall n$

Graficamente è rappresentata così:



### Successione positiva

**Definizione 1.6.** Una successione  $a_n$  si dice *positiva* se

$$a_n \geq 0 \quad \forall n \text{ (in senso lato)}$$

$$a_n > 0 \quad \forall n \text{ (senso stretto)}$$

### Successione negativa

**Definizione 1.7.** Una successione  $a_n$  si dice *negativa* se

$$a_n \leq 0 \quad \forall n \text{ (in senso lato)}$$

$$a_n < 0 \quad \forall n \text{ (in senso stretto)}$$

## 1.2 Successioni convergenti e divergenti

### Successione negativa

**Definizione 1.8.** Si dice che  $a_n$  *diverge a*  $\pm\infty$ , o è *divergente* o *tende a*  $\pm\infty$  o *ha limite*  $\pm\infty$ , se

■ **Caso  $+\infty$ :**

$\forall M > 0, \exists n_0 = n_0(M)$  t.c.  
Se  $n \geq n_0 \implies a_n \geq M$  definitivamente

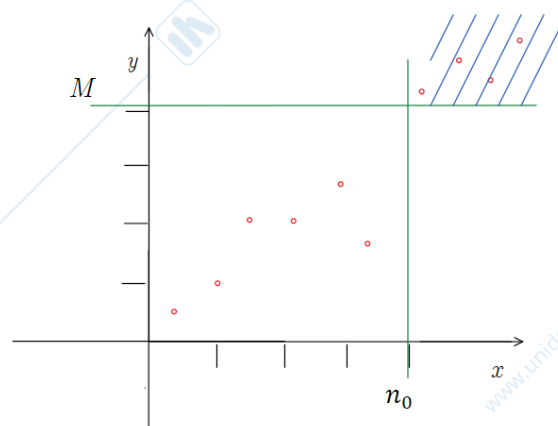
e si indica con

$$a_n \rightarrow +\infty : \begin{cases} \lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = +\infty \\ \lim a_n = +\infty \end{cases}$$

■ **Caso  $-\infty$ :**

$\forall M > 0, \exists n_0 = n_0(M)$  t.c.  
Se  $n \geq n_0 \implies a_n < -M$  definitivamente  
 $a_n \rightarrow -\infty$

Una successione divergente a  $+\infty$  presenta un grafico simile al seguente.



A partire da  $n_0$  la successione rimarrà sempre nella zona "blu". Si può dire che una successione divergente è *convergente in senso lato* ( $+\infty$  o  $-\infty$ ).

### Successione convergente

**Definizione 1.9.** Una successione  $a_n$  si dice *convergente* oppure ha un *limite*  $l \in \mathbb{R}$ , se

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 = n_0(\varepsilon) \text{ t.c.}$$

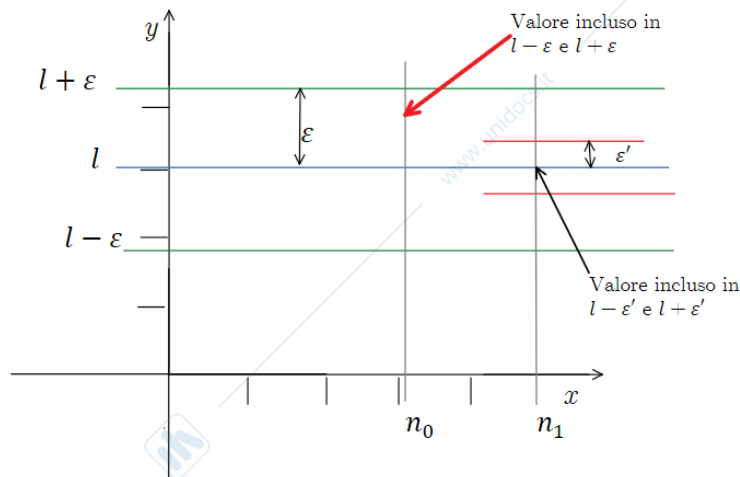
$$\text{Se } n \geq n_0 \implies |a_n - l| < \varepsilon (\leq) \text{ definitivamente}$$

$$\implies l - \varepsilon < a_n < l + \varepsilon$$

e si indica con

$$a_n \rightarrow l : \begin{cases} \lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = l \\ \lim a_n = l \end{cases}$$

Il grafico avrà queste caratteristiche:



### Successione regolare

**Definizione 1.10.** Una successione si dice *regolare* se converge o diverge ( $+\infty$  o  $-\infty$ ).

### Successione oscillante

**Definizione 1.11.** Una successione si dice *oscillante* o *non regolare* o *indeterminata* se non converge e non diverge.

**Proposizione.** Sia  $a_n \geq 0$  t.c.  $a_n \rightarrow a \geq 0$  (per teorema della permanenza del segno), allora

$$\begin{aligned} \sqrt{a_n} &\rightarrow \sqrt{a} \\ \implies |\sqrt{a_n} - \sqrt{a}| & \end{aligned}$$

Proprietà:  $|\sqrt{a} - \sqrt{b}| \leq \sqrt{|a - b|}$

$$\implies |\sqrt{a_n} - \sqrt{a}| \leq \sqrt{|a_n - a|} \implies \text{si fissa } \varepsilon > 0$$

Si trova  $n_0$  t.c. se  $n \geq n_0 \implies |a_n - a| < \varepsilon^2$

$$\implies |\sqrt{a_n} - \sqrt{a}| \leq \sqrt{|a_n - a|} < \sqrt{\varepsilon^2} = \varepsilon$$

**Proposizione.** Sia  $a_n \rightarrow a \in \mathbb{R}$  e sia  $k \in \mathbb{R}$  allora

$$ka_n \rightarrow ka \quad (k = 0 \text{ e } k \neq 0)$$

**Proposizione.** Le successioni  $a_n = \cos n$  e  $b_n = \sin n$  sono *oscillanti* e *non periodiche*.

## 2. Limite di una successione

### Limite di una successione

**Definizione 2.1.** Si dice *limite di una successione*  $a_n$  e si indica con

$$a_n \rightarrow l \in \mathbb{R}$$

il valore a cui  $a_n$  tende (ad assumere) per  $n \rightarrow +\infty$ .

$$a_n \rightarrow l \in \mathbb{R} \iff \forall \varepsilon > 0 \implies |a_n - l| < \varepsilon \text{ definitivamente}$$

Si chiama  $\mathbb{R}$  *esteso*, e lo si indica con  $\bar{\mathbb{R}}$ , l'insieme  $[-\infty; +\infty]$ .

$$\bar{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty\} \cup \{+\infty\}$$

Se si impone

$$a_n \rightarrow l \in \bar{\mathbb{R}}$$

allora  $a_n$  *converge* sempre, se non è oscillate.

### Intorno di un punto

**Definizione 2.2.** Sia  $l \in \bar{\mathbb{R}}$ , si chiama *intorno* di  $l$  un generico insieme dalla forma

$$U(l) = \begin{cases} (l - \varepsilon; l + \varepsilon) & \text{con } \varepsilon > 0 \text{ se } l \in \mathbb{R} \\ (M; +\infty) & \text{con } M > 0 \text{ se } l = +\infty \\ (-\infty; -M) & \text{con } M > 0 \text{ se } l = -\infty \end{cases}$$

Sia  $l \in \bar{\mathbb{R}}$ , allora

$$a_n \rightarrow l \iff \forall U(l) : a_n \in U(l) \text{ defin.}$$

### Successione infinitesima

**Definizione 2.3.** Sia  $a_n$  una successione t.c.  $a_n \rightarrow 0$ , allora  $a_n$  è detta *infinitesima*. Una successione infinitesima la si indica con  $\varepsilon_n$

Ne consegue il seguente teorema:

#### Teorema

**Teorema 2.1.** Sia la successione  $a_n \rightarrow a$ ,  $a \in \mathbb{R}$ , allora la successione  $a_n$  tende ad  $a$  se e solo se  $|a_n - a| \rightarrow 0$  (tende a 0).

**Corollario.**  $a_n$  è infinitesima  $\iff |a_n|$  è infinitesimo.

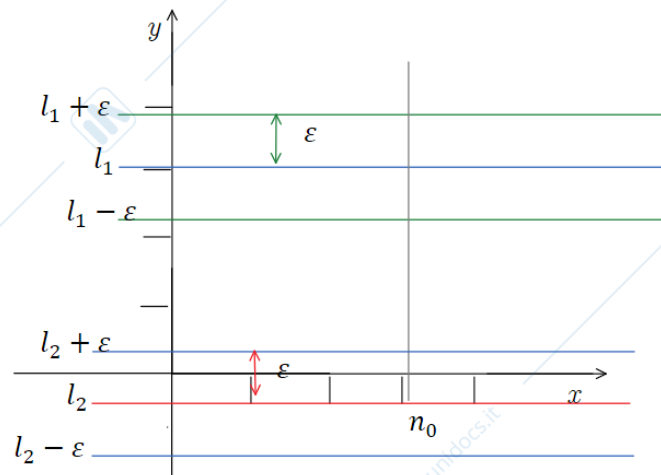
#### Unicità del limite

**Teorema 2.2.** . Se  $a_n$  è convergente allora il suo limite è *unico*.

$$a_n \rightarrow l \in \bar{\mathbb{R}} \implies \exists! l \text{ (unico)}$$

### Dimostrazione per assurdo

$a_n \rightarrow l_1$  e  $a_n \rightarrow l_2$  con  $l_1 \neq l_2$



$\varepsilon = \frac{|l_1 - l_2|}{2}$ , per rispettare gli intornoi dei due limiti

Dunque,  $\forall n \geq \max\{l_1; l_2\} \implies \begin{cases} |a_n - l_1| < \varepsilon \\ |a_n - l_2| < \varepsilon \end{cases}$

$|l_1 - l_2| = |l_1 - a_n + a_n - l_2| \leq |l_1 - a_n| + |a_n - l_2| < \varepsilon + \varepsilon < 2\varepsilon = \frac{2}{2} |l_1 - l_2|$   
 $\rightarrow$  **FALSO**

### Teorema

**Teorema 2.3.** Se  $a_n$  è convergente (ha un limite reale) allora  $a_n$  è limitata.

### Dimostrazione

Per ipotesi:  $\exists l \in \mathbb{R}$  t.c.  $a_n \rightarrow l$

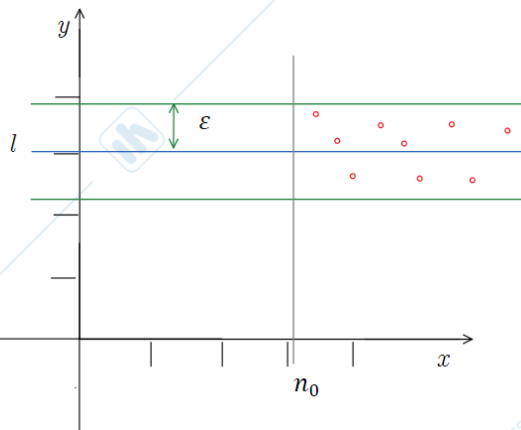
Si fissa ad esempio  $\varepsilon = 62$ ,  $\exists n_0$  t.c. se  $n \geq n_0 \implies |a_n - l| < 62$ .

Se  $n \geq n_0 \implies |a_n| = |a_n - l + l| \leq |a_n - l| + |l| < 62 + |l|$

■ Se  $n \geq n_0 \implies |a_n| < l + 62$

■ Se  $n < n_0 \implies |a_n| \leq \max(|a_1|; |a_2|; \dots; |a_{n_0-1}|) = A$

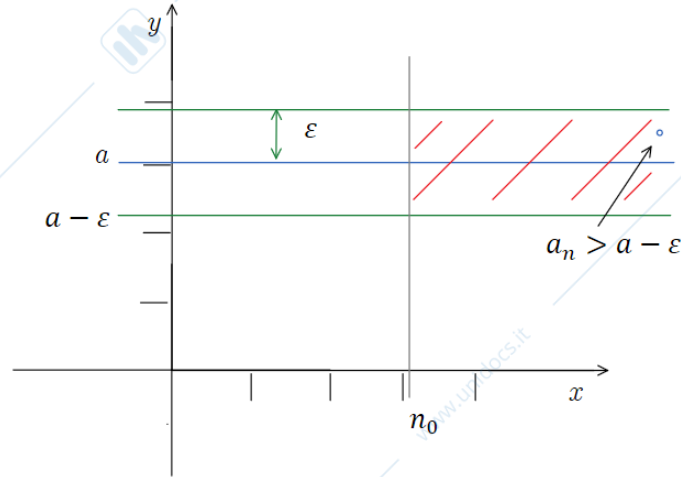
$M = A + B \implies |a_n| \leq M, \forall n \in \mathbb{R}$



### Permanenza del segno

**Teorema 2.4.** Sia  $a_n \rightarrow a \in \mathbb{R}$

- Se  $a > 0 \implies a_n > 0$  definitivamente
- Se  $a_n \geq 0$  definitivamente  $\implies a \geq 0$



### Dimostrazione per assurdo

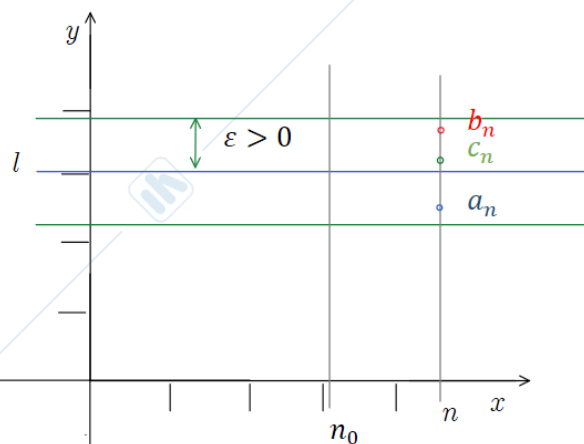
$a < 0$  dal punto 1)  $\implies a_n < 0$  defin.  
 Dunque, se  $a_n > 0$  defin.  $\implies a \geq 0 \implies$  *FALSO*

### (1) Teorema del confronto (o dei carabinieri)

**Teorema 2.5.** Siano  $a_n < c_n < b_n$  definitivamente e siano  $a_n \rightarrow l$  e  $b_n \rightarrow l, l \in \mathbb{R}$   
 Allora  $c_n \rightarrow l$

### Dimostrazione

$(l - \varepsilon) < a_n < (l + \varepsilon)$  e  $(l - \varepsilon) < b_n < (l + \varepsilon) \forall \varepsilon > 0 \exists n_0$  t.c. se  $n \geq n_0 \implies (l - \varepsilon) \leq a_n \leq c_n \leq b_n \leq (l + \varepsilon)$   
 Dunque:  $(l - \varepsilon) < c_n < (l + \varepsilon)$  ovvero  $|c_n - l| < \varepsilon$



**(2) Teorema del confronto (o dei carabinieri)**

**Teorema 2.6.** Sia  $a_n \leq b_n$  definitivamente, allora

- se  $a_n \rightarrow +\infty \implies b_n \rightarrow +\infty$
- se  $b_n \rightarrow -\infty \implies a_n \rightarrow -\infty$

**Infinitesima  $\times$  limitata**

**Teorema 2.7.** Sia  $\varepsilon_n$  infinitesima e  $a_n$  limitata. Allora la successione prodotto  $\varepsilon_n \cdot a_n$  è infinitesima.

**Dimostrazione**

$a_n$  limitata  $\implies \exists M > 0$  t.c.  $|a_n| < M$   
 Dunque  $0 \leq |a_n \cdot \varepsilon_n| = |a_n| \cdot |\varepsilon_n| \leq M \cdot |\varepsilon_n|$   
 $0 \rightarrow 0$  e  $(M \cdot |\varepsilon_n|) \rightarrow 0 \implies |a_n \cdot \varepsilon_n| \rightarrow 0$  per primo teorema del confronto.  
 Ne consegue che:  $|a_n \varepsilon_n| \rightarrow 0 \implies a_n \varepsilon_n \rightarrow 0$

**Esempio.**  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\sin n}{n} \varepsilon_n = \frac{1}{n}$  e  $a_n = \sin n$

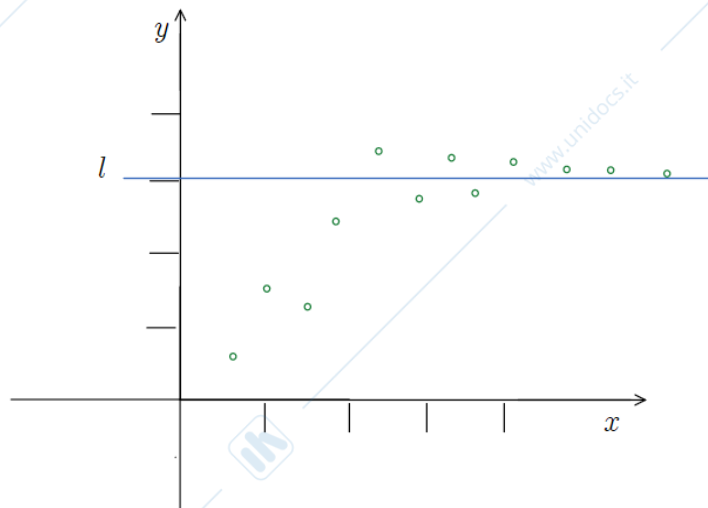
Si ottiene così: *infinitesima  $\cdot$  limitata  $\implies \lim = 0$*

**Successione convergente dall'alto**

**Definizione 2.4.** Una successione  $a_n$  converge ad  $l \in \mathbb{R}$  dall'alto, o tende a  $l \in \mathbb{R}$  per eccesso se

- $a_n \rightarrow l$
  - $a_n \geq l$  definitivamente
- allora  $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = l^+ \iff a_n \rightarrow l^+$

**Esempio.**



$a_n$  rimane  $> 0$ .

**Successione convergente dal basso**

**Definizione 2.5.** Una successione  $a_n$  converge ad  $l \in \mathbb{R}$  dal basso, o tende a  $l \in \mathbb{R}$  per difetto se

- $a_n \rightarrow l$
  - $a_n \leq l$  definitivamente
- allora  $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = l^- \iff a_n \rightarrow l^-$

### Successione monotona

**Definizione 2.6.** Una successione  $a_n$  si dice

$$\text{monotona} \begin{cases} \text{crescente (in senso lato)} \\ \text{strettamente crescente} \\ \text{decrescente (in senso lato)} \\ \text{strettamente decrescente} \end{cases} \quad \text{se} \quad \begin{cases} a_{n+1} \geq a_n \\ a_{n+1} > a_n \\ a_{n+1} \leq a_n \\ a_{n+1} < a_n \end{cases} \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

### Teorema fondamentale sulle successioni monotone

**Teorema 2.8.** Se  $a_n$  è una successione *definitivamente monotona*, allora  $a_n$  è *regolare*.

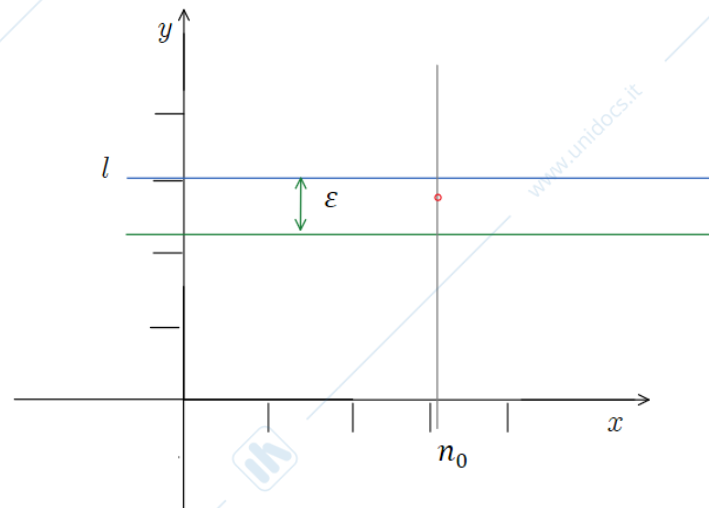
In particolare, si ha la *dicotomia*:

- (i) Se  $a_n$  è *non limitata*, allora  $a_n$  diverge ( $-\infty$  se decrescente,  $+\infty$  se crescente)
- (ii) Se  $a_n$  è *limitata*, allora
  - $a_n$  converge a un limite reale  $l$
  - se crescente  $a_n \rightarrow l^-$  opp.  $a_n \uparrow l$
  - se decrescente  $a_n \rightarrow l^+$  opp.  $a_n \downarrow l$

### Dimostrazione (crescente)

- (i) Sia  $M > 0$ .  
 $a_n$  è *non limitata*  $\implies \exists n_0 \in \mathbb{N}$  t.c.  $a_{n_0} > M$   
 Ma poiché  $a_n$  è crescente: se  $n \geq n_0 \implies a_n \geq a_{n_0} > M$
- (ii) Sia  $a_n$  crescente e (superiormente) limitata.  
 $A = \bigcup_n a_n$  è superiormente limitato  $\implies \exists l = \sup A$   
 Si mostra che  $a_n \rightarrow l$  (in realtà  $a_n \rightarrow l^-$ )

**Osservazione:**  $\forall n \ a_n \leq l$



Si fissa  $\varepsilon > 0$  allora  $\exists n_0$  t.c.  $a_n > l - \varepsilon$  (perché  $l$  è il più piccolo dei maggioranti)

Se  $n \geq n_0 \implies a_n \geq a_{n_0}$  e  $a_n \leq l$

[Se  $l$  non fosse il più piccolo dei maggioranti,  $l - \varepsilon$  sarebbe a sua volta un maggiorante, in contraddizione al fatto che  $l$  è il più piccolo dei maggioranti.]

$$\text{Se } n \geq n_0 \implies \begin{cases} a_n \geq a_{n_0} \\ a_n \leq l \end{cases} \implies |l - a_n| < \varepsilon.$$

## 2.1 Successione di Bernoulli

## Successione di Bernoulli

**Teorema 2.9.** La successione (detta di Bernoulli)

$$e_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

converge ad  $e$ . Infatti:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} e_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e \cong 2,718281\dots$$

Questa successione è:

1. Crescente
2. Limitata

Quindi  $e_n$  converge ad un limite reale indicato con  $e$ .

## Dimostrazione

1. Per  $n \geq 2$

$$e_n = \left(\frac{n+1}{n}\right)^n$$

$$\text{Dunque: } \frac{e_n}{e_{n-1}} = \frac{\left(\frac{n+1}{n}\right)^n}{\left(\frac{n}{n-1}\right)^{n-1}} = \left(\frac{n+1}{n}\right)^n \cdot \frac{n-1}{n} = \left(\frac{n^2-1}{n^2}\right)^n \cdot \frac{n-1}{n} = \left(1 - \frac{1}{n^2}\right)^n \cdot \frac{n-1}{n}$$

$$\text{Dunque per } 1(1+x)^n \geq 1+nx \implies$$

$$x = -\frac{1}{n^2} \implies \left(1 + n\left(-\frac{1}{n^2}\right)\right)^n \geq 1 + n\left(-\frac{1}{n^2}\right) = 1 - \frac{1}{n}$$

2. Si ha  $e_n \uparrow e \implies$

$$b_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1} = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \cdot \left(1 + \frac{1}{n}\right) \rightarrow e^n \leq b_n \forall n$$

$$b_n = e_n \cdot \left(1 + \frac{1}{n}\right) \rightarrow \frac{b_{n-1}}{b_n} \geq 1$$

Cioè  $b_n$  è decrescente.  $e_n$  è inferiormente limitata e  $b_n$  è superiormente limitata, dunque:

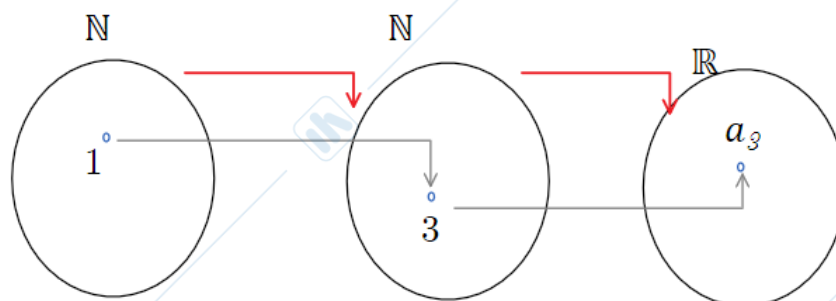
$$e_n \leq b_n \forall n \implies 2 = e_0 \leq e_n \leq b_1 = 4$$

$$\text{Allora } e_n \uparrow \text{ e } b_n \downarrow \implies \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \leq e^n \leq \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \cdot \left(1 + \frac{1}{n}\right)$$

## 3. Sottosuccessioni

## Sottosuccessione

**Definizione 3.1.** Sia  $a_n$  una successione assegnata e sia  $n_k$  una successione a valori in  $\mathbb{N}$  strettamente crescente. Si chiama *sottosuccessione* di  $a_n$  la successione composta  $a_{n_k}$ .



Dati  $a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, a_7, \dots, a_n$   
 si costruisce:  $a_{n_1} = a_2, a_{n_2} = a_5, a_{n_3} = a_7, \dots$

**Teorema**

**Teorema 3.1.** Sia  $l \in \mathbb{R}$ , allora

$$a_n \rightarrow l \iff \text{ogni sottosuccessione } a_{n_k} \rightarrow l, \quad (\Leftarrow \text{ è banale})$$

**Corollario.** Data  $a_n$  se esistono due sottosuccessioni convergenti (anche in senso lato) a due limiti distinti allora  $a_n$  è *oscillante*.

**Esempio.**  $(-1)^n$  possiede almeno due sottosuccessioni con limiti distinti:

- $(-1)^{2n}$  sottosuccessione dei numeri pari
- $(-1)^{2n+1}$  sottosuccessione dei numeri dispari

**Teorema**

**Teorema 3.2.** Sia  $a_n = \sin n$  e sia  $l \in [-1; 1]$  fissato, allora esiste una sottosuccessione  $a_{n_k}$  t.c.

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} a_{n_k} = l$$

Infatti:

- $\sin n = \sin(n + 2q\pi)$
- $\alpha$  irrazionale  $\implies \exists p_n$  e  $q_n$  t.c.  $|p_n - \alpha q_n| < \frac{1}{q^2}$

**Teorema di Bolzano-Weierstrass**

**Teorema 3.3.** Sia  $a_n$  una successione limitata, allora  $a_n$  ammette una sottosuccessione  $a_{n_k}$  convergente.

**Dimostrazione**

Sia  $I$  l'insieme degli elementi della successione  $a_n$  (valori assunti dalla funzione).

- Se  $I$  è finito ( $I = [a; b]$ ) esiste almeno un elemento  $a \in I$  che si ripete infinite volte, cioè esistono infiniti indici

$$n_k \text{ (con } n_k < n_{k+1}) \text{ t.c. } \forall k \in \mathbb{N} \implies a_{n_k} = a$$

Da cui

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} a_{n_k} = a$$

- Se  $I$  è infinito, siccome  $a_n$  è limitata, esiste un intervallo  $[c; d]$  contenente  $I$ .

Allora si divide, ad esempio,  $[c; d]$  in due intervalli di uguale ampiezza (dicotomia):

$$\left[ c; \frac{c+d}{2} \right] \text{ e } \left[ \frac{c+d}{2}; d \right]$$

Uno dei due intervalli dunque conterrà infiniti elementi di  $a_n$ .

Si indica questo intervallo con  $[c_1; d_1]$ .

Si ripete dunque la procedura: esiste un intervallo  $[c_2; d_2]$  contenuto in  $[c_1; d_1]$  che contiene infiniti elementi di  $a_n$ . Iterando la procedura si ottiene una successione di intervalli  $I_n = [c_n; d_n]$ :

1.  $I_1 \supseteq I_2 \supseteq I_3 \supseteq \dots \supseteq I_n \supseteq \dots$
2.  $d_n - c_n = \frac{d-c}{2^n}$  (intervallo iniziale diviso  $2^n$  volte)
3.  $[c; d] \cap I_n$  è infinito ( $\supseteq I_n$ )

Si considera la successione  $c_n$ .

Essa è limitata:  $c_n$  è contenuta in  $[c; d]$ .

Lo stesso accade per la successione  $d_n$ .

(Gli elementi delle successioni  $c_k$  e  $d_k$  sono i relativi estremi degli intervalli  $I_n$ )

$c_n$  è crescente, per teorema delle successioni monotone  $\implies c_n \rightarrow l \in \mathbb{R}$

Si costruisce una sottosuccessione (di  $a_n$ )  $a_{n_k}$  tale che:

- $a_{n_1}$  è il primo termine di  $a_n \in [c_1; d_1]$
- $a_{n_2}$  è il primo termine di  $a_n \in [c_2; d_2]$
- ...
- $a_{n_k}$  è il primo termine di  $a_n$ ,  $n_k > n_{k-1} \in [c_k; d_k]$

**Dimostrazione**

Si ha dunque questa relazione:

$$c_k \leq a_{n_k} \leq d_k = c_k + \frac{d+c}{2}$$

Con

$$c_k \rightarrow l \text{ e } d_k \rightarrow l \text{ (perch\`e } \frac{d+c}{2} \rightarrow 0)$$

Per il primo teorema del confronto si ottiene:  $a_{n_k} \rightarrow l$ .

**4. Successioni di Cauchy****Successione di Cauchy**

**Definizione 4.1.** Una successione  $a_n$  è detta *successione di Cauchy* se

$\forall \varepsilon > 0 \exists n_0 = n_0(\varepsilon)$  [ $n_0$  dipende da  $\varepsilon$ ] t.c. se  $n, m \geq n_0 \implies |a_n - a_m| < \varepsilon$   
(informalmente  $|a_n - a_m| \rightarrow 0$  per  $n, m \rightarrow +\infty$ )

**4.1 Proprietà delle successioni di Cauchy****Proprietà 1**

Se una successione  $a_n$  converge a  $l \in \mathbb{R} \implies a_n$  è una successione di Cauchy.

$$\forall \varepsilon > 0 \exists n_0 \text{ t.c. se } n \geq n_0 \implies |a_n - l| < \frac{\varepsilon}{2}$$

Siano  $n, m \geq n_0 \implies |a_n - a_m| = |a_n - l + l - a_m| \leq |a_n - l| + |l - a_m| < \varepsilon$   
 $\implies |a_n - l| < \frac{\varepsilon}{2}$  e  $|l - a_m| < \frac{\varepsilon}{2}$

**Proprietà 2**

Se la successione  $a_n$  è di Cauchy, allora è limitata.

Si fissa  $\varepsilon = 1 \implies \exists n_0$  t.c.  $n, m \geq 0 \implies |a_n - a_m| < 1$ ,  $m = n_0$  e  $n \geq n_0$

Per  $n \geq n_0 \implies |a_n| = |a_n - a_{n_0} + a_{n_0}| \leq |a_n - a_{n_0}| + |a_{n_0}| < 1 + |a_{n_0}|$

**Proprietà 3**

Se la successione  $a_n$  è di Cauchy ed  $\exists$  una sottosuccessione  $a_{n_k} \rightarrow l \in \mathbb{R} \implies a_n \rightarrow l$

Si applica la definizione di limite: si fissa  $\varepsilon > 0$ , poiché è una successione di Cauchy:

$$\implies \exists n_0 \text{ t.c. se } n, m \geq 0 \implies |a_n - a_m| < \varepsilon/2 \implies$$

$$|a_n - l| = |a_n - a_{n_k} + a_{n_k} - l| \leq |a_n - a_{n_k}| + |a_{n_k} - l|$$

$a_k \rightarrow l$  per  $k$  abbastanza grande  $\rightarrow k$  definitivamente grande

$$(\implies n_k \text{ grande}) \implies \begin{cases} (1) |a_n - l| < \frac{\varepsilon}{2} \\ (2) n_k \geq n_0 \end{cases}$$

Si fissa  $k$  t.c. (1) e (2) valgono, dunque  $|a_n - a_{n_k}| + |a_{n_k} - l| < \varepsilon$ , perchè  $|a_n - a_{n_k}| \rightarrow \varepsilon/2$  e  $|a_{n_k} - l| \rightarrow \varepsilon/2$

In conclusione:

- Se  $\exists a_{n_k}$  convergente  $\implies a_n$  è convergente.
- Poiché  $a_n$  è limitata  $\implies$  tale sottosuccessione  $a_{n_k}$  esiste  $\implies a_n$  è convergente.
- $a_n$  è una successione di Cauchy  $\iff a_n$  è convergente

## 5. Limiti di successioni

### 5.1 Operazioni sui limiti

#### Operazioni sui limiti

**Teorema 5.1.** Siano due successioni:  $a_n \rightarrow a \in \mathbb{R}$  e  $b_n \rightarrow b \in \mathbb{R}$ , allora

1.  $a_n + b_n \rightarrow a + b$

$$\lim(a_n + b_n) = \lim a_n + \lim b_n$$

2.  $a_n b_n \rightarrow a \cdot b$

(a) Se  $k \in \mathbb{N} \implies a_n^k \rightarrow a^k$

3. Se  $b \neq 0$  allora  $\frac{a_n}{b_n} \rightarrow \frac{a}{b}$

(a) Se  $a \neq 0 \implies a_n \rightarrow a^k \forall k \in \mathbb{Z}$

N.B.:  $b \neq 0$  definitivamente

#### Dimostrazioni

1. Somma: Fisso  $\varepsilon > 0 \exists n_0$  t.c. se  $n \geq n_0$

$$\implies \left. \begin{array}{l} a - \frac{\varepsilon}{2} \leq a_n \leq a + \frac{\varepsilon}{2} \\ b - \frac{\varepsilon}{2} \leq b_n \leq b + \frac{\varepsilon}{2} \end{array} \right\} \implies (a + b - \varepsilon) < a_n + b_n < (a + b + \varepsilon) \iff |a_n + b_n - (a + b)| < \varepsilon$$

2. Si mostra che  $|a_n b_n - ab| \rightarrow 0$

$$0 \leq |a_n b_n - ab| = |a_n b_n - a_n b + a_n b - ab| \leq |a_n b_n - a_n b| + |a_n b - ab| = |a_n(b_n - b)| + |b(a_n - a)| = |a_n||b_n - b| + |b||a_n - a| \rightarrow 0$$

$$|b_n - b| \rightarrow 0 \text{ e } |b||a_n - a| \rightarrow 0 \implies |a_n||b_n - b| \rightarrow 0 \text{ (infinitesima} \cdot \text{limitata)}$$

Dunque per il primo teorema del confronto  $|a_n||b_n - b| + |b||a_n - a| \rightarrow 0$

(a) Per induzione su  $k \in \mathbb{N}$

■  $k = 1 \implies$  verificato

■  $a_n^{k+1} \rightarrow a^{k+1}$  e  $a_n^{k+1} = a_n^k \cdot a_n \rightarrow a^k \cdot a^n$

Per ipotesi induttiva  $a_n^k \rightarrow a^k$

3. (dimostrazione del sottopunto a)

(a)  $k \in \mathbb{Z} a_n^k \rightarrow a^k$  e  $a_n^p \rightarrow a^p$

Caso  $k < 0 \implies k = -p$  con  $p \in \mathbb{N}$

$$a_n^{-p} = a_n^k = \frac{1}{a_n^p} \rightarrow \frac{1}{a^p} = a^{-p} = a^k$$

### 5.2 La successione $(1 - 1/n)^n$

$$\left(1 - \frac{1}{n}\right)^n = \left(\frac{n-1}{n}\right)^n = \frac{1}{\left(\frac{n}{n-1}\right)^n} = \frac{1}{\left(\frac{n}{n-1}\right)^{n-1} \left(\frac{n}{n-1}\right)} = \frac{1}{\left(\frac{n}{n-1}\right)^{n-1}} \cdot \left(1 - \frac{1}{n}\right)$$

$$\left[\frac{n-1}{n} = \frac{1+n-1}{n-1} = 1 + \frac{1}{n-1}\right]$$

$$\frac{1}{\left(\frac{n}{n-1}\right)^{n-1}} \cdot \left(1 - \frac{1}{n}\right) \implies \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n = \frac{1}{e_{n-1}} \cdot \left(1 - \frac{1}{n}\right)$$

$$e_n \rightarrow e \text{ ed } e_{n-1} \rightarrow e \text{ (inoltre } \left(1 - \frac{1}{n}\right) \rightarrow 1)$$

quindi:  $\frac{1}{e_{n-1}} \rightarrow \frac{1}{e} \implies \frac{1}{e_{n-1}} \cdot \left(1 - \frac{1}{n}\right) \rightarrow \frac{1}{e}$

$$\left(1 - \frac{1}{n}\right)^{-n} \rightarrow e$$

### 5.3 Operazioni e aritmetica in $\bar{\mathbb{R}}$

#### Somma

$$+\infty + \infty = +\infty$$

$$-\infty - \infty = -\infty$$

$$a \in \mathbb{R} \implies \begin{cases} a + \infty = +\infty \\ a - \infty = -\infty \end{cases}$$

**Esempio.**  $a_n \rightarrow 3$  e  $b_n \rightarrow +\infty \implies a_n + b_n \rightarrow 3 + \infty = +\infty$

#### Prodotto

$$+\infty \cdot +\infty = +\infty$$

$$+\infty \cdot (-\infty) = -\infty$$

$$-\infty \cdot +\infty = -\infty$$

$$(-\infty) \cdot (-\infty) = +\infty$$

Se  $a \in \mathbb{R}, a > 0$

$$a \cdot (+\infty) = +\infty$$

$$a \cdot (-\infty) = -\infty$$

Se  $a \in \mathbb{R}, a < 0$

$$a \cdot (+\infty) = (-\infty)$$

$$a \cdot (-\infty) = (+\infty)$$

**Divisione** Se  $a \in \mathbb{R}, a > 0$  oppure  $a = 0^+$

$$\implies \frac{+\infty}{a} = +\infty$$

$$\text{e } \frac{-\infty}{a} = -\infty$$

Se  $a \in \mathbb{R}, a < 0$  oppure  $a = 0^-$

$$\implies \frac{+\infty}{a} = -\infty$$

$$\text{e } \frac{-\infty}{a} = +\infty$$

Se  $a \in \mathbb{R}, a > 0$

$$\implies \frac{a}{0^+} = +\infty$$

$$\text{e } \frac{a}{0^-} = -\infty$$

Se  $a \in \mathbb{R}, a < 0$

$$\implies \frac{a}{0^+} = -\infty$$

$$\text{e } \frac{a}{0^-} = +\infty$$

Se  $a \in \mathbb{R}$

$$\frac{a}{\pm\infty} = 0$$

### 5.4 Forme di indecisione e successioni particolari

Le *forme di indecisione* sono tutte quelle forme di operazioni tra infiniti e/o infinitesimi che non hanno una risoluzione a priori.

$$+\infty - \infty, \frac{0}{0}, \frac{\infty}{\infty}, 0 \cdot \infty$$

Per queste forme di solito si trasforma l'operazione in:

$$\frac{a_n \rightarrow 0}{b_n \rightarrow 0} \rightarrow \frac{a_n}{b_n} = a_n \cdot \frac{1}{b_n}$$

Altre forme di indecisione (o indeterminate) sono:

$$1^\infty, \infty^0, 0^0$$

Esse si studiano come:  $a_n^{b_n}$

Si hanno poi dei tipi particolari di successione:

- $\lim e^{a_n} = e^{\lim a_n}$  Sia  $a_n \rightarrow l \in \bar{\mathbb{R}}$

$$e^{a_n} \rightarrow e^l = \begin{cases} e^l & \text{se } l \in \mathbb{R} \\ +\infty & \text{se } l = +\infty \\ -\infty & \text{se } l = -\infty \end{cases}$$

- $\lim \log a_n = \log(\lim a_n)$   
Sia  $a_n > 0$ , con  $a_n \rightarrow l \in [0; +\infty]$   
allora

$$\log a_n \rightarrow \log l = \begin{cases} \log l & \text{se } l \in [0; +\infty] \\ +\infty & \text{se } l = +\infty \\ -\infty & \text{se } l = -\infty \end{cases}$$

- Sia  $a_n \rightarrow l \in \mathbb{R}$ , allora

$$a_n^\alpha : \begin{cases} 1. \alpha \in \mathbb{Z} \\ 2. \alpha = \frac{1}{k} k \in \mathbb{N} \end{cases}$$

$$\sqrt[k]{a_n} \text{ definito per } \begin{cases} a \geq 0 \text{ se } k \text{ è pari} \\ a \in \mathbb{R} \text{ se } k \text{ è dispari} \end{cases}$$

Vale dunque che

$$\text{Se } a_n \rightarrow l \in \bar{\mathbb{R}} \implies \sqrt[k]{a_n} \rightarrow \sqrt[k]{l}$$

$$\sqrt[k]{l} = \begin{cases} \sqrt[k]{l} & \text{se } l \in \mathbb{R} \text{ (} k \text{ pari, } l \geq 0 \text{)} \\ +\infty & \text{se } l = +\infty \\ -\infty & \text{se } l = -\infty \text{ (} k \text{ dispari)} \end{cases}$$

Data la successione  $a_n \rightarrow a \in \mathbb{R}$ , si ha:

$$a_n^\alpha \text{ e } a^\alpha \text{ con } \alpha \in \mathbb{R}$$

$$\rightarrow a^\alpha = e^{\alpha \log a} \text{ (} a > 0 \text{)}$$

Dunque  $a_n^\alpha = e^{\alpha \log a_n}$

$$a_n > 0 \text{ e } a_n \rightarrow l \in [0; +\infty]$$

$$\implies a_n^\alpha \rightarrow l^\alpha \text{ con } \alpha \in \mathbb{R}$$

Per  $\alpha > 0$  (ad esempio  $\alpha = \pi \rightarrow a_n^\pi = e^{\pi \log a_n}$ )

$$l^\alpha = \begin{cases} +\infty & \text{se } l = +\infty \\ l^\alpha & \text{se } l \in (0; +\infty) \\ 0 & \text{se } l = 0 \end{cases}$$

Le forme di indecisione:

$$1^\infty, 0^0, \infty^0$$

Le si risolvono utilizzando la formula:

$$a_n^{b_n} = e^{b_n \log a_n} \implies \lim a_n^{b_n} = e^{\lim [b_n \log a_n]}$$

che è il caso che si studia più frequentemente.

## 5.5 Limiti notevoli

$$\lim a_n = \begin{cases} +\infty & \text{se } a > 1 \\ 1 & \text{se } a = 1 \\ 0 & \text{se } |a| < 1 \\ \nexists & \text{se } a \leq -1 \text{ (per } a \geq -1 \text{ esiste)} \end{cases}$$

- Se  $a > 1 \implies a = 1 + b, b > 0$

$$a^n = (1 + b)^n \geq nb \rightarrow +\infty$$

(nb da sviluppo del binomio di Newton)

$$\implies a^n \rightarrow +\infty \text{ per 2° teorema del confronto}$$

- $|a| < 1 \implies a_n \rightarrow 0 \iff |a^n| \rightarrow 0 \implies |a| = \frac{1}{b} \text{ con } b > 1$

$$|a^n| = (|a|)^n = \left(\frac{1}{b}\right)^n = \frac{1}{b^n} \left[ b^n \rightarrow +\infty \text{ quindi } \frac{1}{b^n} \rightarrow 0 \right]$$

- $a < -1 \implies a = -b \text{ con } b > 1$

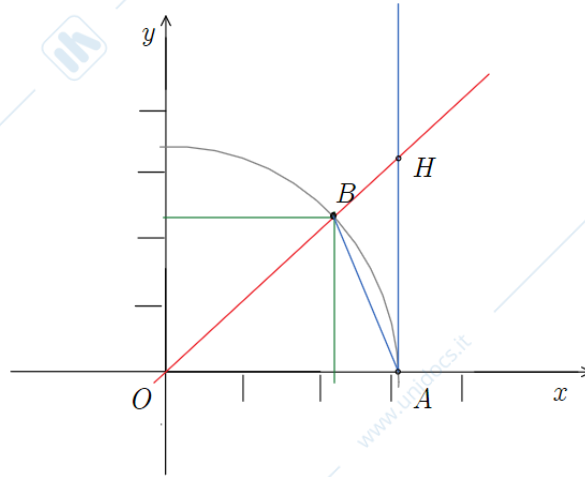
$$a^n = (-b)^n = (-1)^n \cdot b^n \text{ [} (-1)^n \rightarrow \text{oscillante e } b^n \rightarrow +\infty \text{]} \implies a_n \text{ è oscillante e non limitata}$$

**Limiti notevoli delle funzioni goniometriche**

$$x \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right] \quad 0 \leq \sin x \leq x \leq \tan x$$

Infatti

$$\begin{aligned} \text{AreaTriangolo}(OBA) &\leq \text{AreaArco}(OBA) \leq \text{AreaTriangolo}(OHA) \\ \frac{1}{2} \sin x &\leq \frac{1}{2} x \leq \frac{1}{2} \tan x \end{aligned}$$

**Successione infinitesima**

**Definizione 5.1.** Si definisce  $\varepsilon_n$  una generica *successione infinitesima*.

Dunque

1. Limiti notevoli di seno e coseno

$$\blacksquare \boxed{\sin \varepsilon_n \rightarrow 0} \quad \varepsilon_n \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$$

$$|\sin \varepsilon_n| = \sin |\varepsilon_n| \leq |\varepsilon_n| \quad (\text{I e IV quadrante})$$

$$\blacksquare \boxed{\cos \varepsilon_n \rightarrow 1}$$

$$\begin{aligned} \varepsilon_n \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right] \\ \cos \varepsilon_n = \sqrt{1 - (\sin \varepsilon_n)^2} \rightarrow 1 \end{aligned}$$

Si hanno quindi i seguenti limiti notevoli:

$$2. \boxed{\frac{\sin \varepsilon_n}{\varepsilon_n} \rightarrow 1}$$

$$\varepsilon_n \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right) \Rightarrow \frac{\sin |\varepsilon_n|}{|\varepsilon_n|} = \frac{\sin \varepsilon_n}{\varepsilon_n}$$

$$\sin |\varepsilon_n| \leq |\varepsilon_n| \leq \tan |\varepsilon_n| \Rightarrow \frac{\sin |\varepsilon_n|}{|\varepsilon_n|} \leq \frac{|\varepsilon_n|}{|\varepsilon_n|} \leq \frac{\tan |\varepsilon_n|}{\sin |\varepsilon_n|}$$

$$1 \leq \frac{|\varepsilon_n|}{\sin |\varepsilon_n|} \leq \frac{1}{\cos |\varepsilon_n|} \Rightarrow \cos |\varepsilon_n| \leq \frac{\sin |\varepsilon_n|}{|\varepsilon_n|} \leq 1 \Rightarrow \cos |\varepsilon_n| \rightarrow 1 \text{ e } \frac{\sin |\varepsilon_n|}{|\varepsilon_n|} \rightarrow 1$$

Per il primo teorema del confronto:  $\frac{\sin |\varepsilon_n|}{|\varepsilon_n|} \rightarrow 1$

$$3. \boxed{\frac{\tan \varepsilon_n}{\varepsilon_n} \rightarrow 1}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \frac{\tan \varepsilon_n}{\varepsilon_n} &= \frac{\sin \varepsilon_n}{\cos \varepsilon_n} \cdot \frac{1}{\varepsilon_n} \Rightarrow \frac{\sin \varepsilon_n}{\varepsilon_n} \cdot \frac{1}{\cos \varepsilon_n} = \frac{\tan \varepsilon_n}{\varepsilon_n} \rightarrow 1 \\ \left[ \text{infatti: } \frac{\sin \varepsilon_n}{\varepsilon_n} \rightarrow 1 \text{ e } \frac{1}{\cos \varepsilon_n} (\rightarrow 1) \rightarrow 1 \right] \end{aligned}$$

$$4. \boxed{\frac{1 - \cos \varepsilon_n}{\varepsilon_n^2} \rightarrow \frac{1}{2}}$$

$$\Rightarrow \frac{1 - \cos \varepsilon_n}{\varepsilon_n^2} \cdot \left( \frac{1 + \cos \varepsilon_n}{1 + \cos \varepsilon_n} \right) \Rightarrow$$

$$\begin{aligned} & \left[ (1 - \cos \varepsilon_n)(1 + \cos \varepsilon_n) = 1 - \cos^2 \varepsilon_n = \sin^2 \varepsilon_n \right] \\ & \frac{\sin^2 \varepsilon_n}{\varepsilon_n^2} \cdot \frac{1}{1 + \cos \varepsilon_n} = \left( \frac{\sin \varepsilon_n}{\varepsilon_n} \right)^2 \cdot \frac{1}{1 + \cos \varepsilon_n} \Rightarrow \\ & \left[ \left( \frac{\sin \varepsilon_n}{\varepsilon_n} \right)^2 \rightarrow 1^2 \text{ e } \frac{1}{1(\rightarrow 1) + \cos \varepsilon_n(\rightarrow 1)} \rightarrow \frac{1}{2} \right] \Rightarrow \rightarrow \frac{1}{2} \end{aligned}$$

5.  $\boxed{\frac{\arcsin \varepsilon_n}{\varepsilon_n} \rightarrow 1}$  Si suppone  $\varepsilon_n > 0$ , si pone  $\arcsin \varepsilon_n = \delta_n$

$$\sin \delta_n = \varepsilon_n \Rightarrow \frac{\arcsin \varepsilon_n}{\varepsilon_n} = \frac{\delta_n}{\sin \delta_n} = \frac{1}{\frac{\sin \delta_n}{\delta_n}} \Rightarrow \text{se } \delta_n > 0 \Rightarrow \frac{1}{\frac{\sin \delta_n}{\delta_n}} \rightarrow 1$$

$$0 \leq \varepsilon_n = \sin \delta_n \leq \delta_n \leq \tan \delta_n = \frac{\sin \delta_n}{\cos \delta_n}$$

$$\frac{\sin \delta_n}{(+ \rightarrow) \sqrt{1 - \sin^2 \delta_n}} = \frac{\varepsilon_n}{\sqrt{1 - \varepsilon_n^2}} \rightarrow 0$$

Sia  $\arcsin \varepsilon_n$  che  $\varepsilon_n$  tendono a 0, quindi  $\frac{\arcsin \varepsilon_n}{\varepsilon_n} \rightarrow 1$

6.  $\boxed{\frac{\arctan \varepsilon_n}{\varepsilon_n} \rightarrow 1}$  Si suppone  $\varepsilon_n > 0$ , si pone  $\arctan \varepsilon_n = \delta_n$

$$\tan \delta_n = \varepsilon_n \Rightarrow \frac{\arctan \varepsilon_n}{\varepsilon_n} = \frac{\delta_n}{\tan \delta_n} = \frac{1}{\frac{\tan \delta_n}{\delta_n}} \Rightarrow \text{se } \delta_n > 0 \Rightarrow \frac{1}{\frac{\tan \delta_n}{\delta_n}(\rightarrow 1)} \rightarrow 1$$

$$0 \leq \delta_n \leq \varepsilon_n = \tan \delta_n$$

### Limiti notevoli (di successioni particolari)

7.  $\boxed{\left(1 + \frac{1}{\varepsilon_n}\right)^{\varepsilon_n} \rightarrow e}$  Si pone:

$$\frac{1}{\left(1 - \frac{1}{n}\right)^n} \text{ con } \varepsilon_n = -\frac{1}{n} \rightarrow \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n \rightarrow e$$

$\varepsilon_n$  piccolo e positivo  $\Rightarrow$  fissato  $n \exists k \in \mathbb{N}(k_n)$

$$\frac{1}{k+1} \leq \varepsilon_n < \frac{1}{k} \Rightarrow k < \frac{1}{\varepsilon_n} \leq k+1$$

$$\varepsilon_n \rightarrow 0 \Rightarrow k = k_n \rightarrow +\infty \Rightarrow \left(1 + \frac{1}{k+1}\right)^k \leq (1 + \varepsilon_n)^{1/\varepsilon_n} < \left(1 + \frac{1}{k}\right)^{k+1}$$

$$\Rightarrow \frac{\left(1 + \frac{1}{k+1}\right)^{k+1}}{\left(1 + \frac{1}{k+1}\right)} \leq (1 + \varepsilon_n)^{\frac{1}{\varepsilon_n}} < \left(1 + \frac{1}{k}\right)^k \left(1 + \frac{1}{k}\right)$$

$$\frac{e_{k+1}(\rightarrow e)}{1(\rightarrow 1) + \frac{1}{k+1}(\rightarrow 0) \rightarrow 1} \{ \rightarrow e \} \leq (1 + \varepsilon_n)^{\frac{1}{\varepsilon_n}} < e_k \{ \rightarrow e \} \left(1 + \frac{1}{k}(\rightarrow 0)\right) (\rightarrow 1) \{ \rightarrow e \}$$

Dunque:

$$\frac{e_{k+1}}{1 + \frac{1}{k+1}} \rightarrow e \text{ ed } e_k \left(1 + \frac{1}{k}\right) \rightarrow e$$

Per il primo teorema del confronto:  $(1 + \varepsilon_n)^{1/\varepsilon_n} \rightarrow e$

8.  $\boxed{\frac{\log(1 + \varepsilon_n)}{\varepsilon_n} \rightarrow 1}$  Si conosce che  $(1 + \varepsilon_n)^{1/\varepsilon_n} \rightarrow e$

$$\Rightarrow \log(1 + \varepsilon_n)^{1/\varepsilon_n} \rightarrow \log e = 1 \Rightarrow \frac{1}{\varepsilon_n} \log(1 + \varepsilon_n) \rightarrow 1$$

**Esempio.**  $\lim[n \cdot \log(1 + \sin(\frac{2}{n}))]$

$$n \cdot \frac{\log(1 + \sin(\frac{2}{n}))}{\sin(\frac{2}{n})} \cdot \sin\left(\frac{2}{n}\right) \cdot \frac{\frac{2}{n}}{\frac{2}{n}}, \text{ con } \frac{\frac{2}{n}}{\frac{2}{n}} = 1$$

$$n \cdot \frac{\log(1 + \sin(\frac{2}{n}))}{\sin(\frac{2}{n})} (\rightarrow 1) \cdot \frac{\sin(\frac{2}{n})}{2/n} (\rightarrow 1) \cdot \left(\frac{2}{n}\right) \Rightarrow n \cdot \left(\frac{2}{n}\right) = 2$$

9.  $\boxed{\frac{e^{\varepsilon_n} - 1}{\varepsilon_n} \rightarrow 1}$

$$e^{\varepsilon_n} - 1 = \delta_n \Rightarrow \text{se } e^{\varepsilon_n} \rightarrow 0 \Rightarrow \delta_n \rightarrow -1$$

$$e^{\varepsilon_n} = 1 + \delta_n : \rightarrow \varepsilon_n = \log(1 - \delta_n) : \rightarrow \frac{e^{\varepsilon_n} - 1}{\varepsilon_n} = \frac{\delta_n}{\log(1 + \delta_n)} = \frac{1}{\frac{\log(1 + \delta_n)}{\delta_n}(\rightarrow 1)} \rightarrow 1$$

$$10. \frac{(1 + \varepsilon_n)^\alpha - 1}{\varepsilon_n} \rightarrow \alpha \text{ con } \alpha \in \mathbb{R}$$

$$\begin{aligned} \frac{(1 + \varepsilon_n)^\alpha - 1}{\varepsilon_n} &= \frac{e^{\alpha \log(1 + \varepsilon_n)} - 1}{\varepsilon_n} \Rightarrow \left( \text{si dispone per limite } \frac{e^{\varepsilon_n} - 1}{\varepsilon_n} \right) \\ &\Rightarrow \frac{e^{\alpha \log(1 + \varepsilon_n)} - 1}{\alpha \log(1 + \varepsilon_n)} (\rightarrow 1) \cdot \frac{\log(1 + \varepsilon_n)}{\varepsilon_n} (\rightarrow 1) \cdot \alpha = 1 \cdot 1 \cdot \alpha = \alpha \end{aligned}$$

**Esempio.**  $\lim \left[ n \cdot \left( \sqrt{1 + \frac{1}{n}} - 1 \right) \right]$

$$\begin{aligned} \sqrt{1 + \frac{1}{n}} - 1 &= \frac{\left( \sqrt{1 + \frac{1}{n}} - 1 \right) \left( \sqrt{1 + \frac{1}{n}} + 1 \right)}{\sqrt{1 + \frac{1}{n}} + 1} \Rightarrow \lim n \frac{(1 + \frac{1}{n} - 1)}{\sqrt{1 + \frac{1}{n}} + 1} = \\ &= \lim n \frac{\frac{1}{n}}{\sqrt{1 + \frac{1}{n}} + 1} = \lim \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{1}{n}} (\rightarrow 0) + 1 (\rightarrow 1) \{ \rightarrow 2 \}} = \frac{1}{2} \\ \lim n \cdot \left( \sqrt{1 + \frac{1}{n}} + 1 \right) &= \frac{(1 + \frac{1}{n})^{\frac{1}{2}} - 1}{\frac{1}{n}} \rightarrow \frac{1}{2} \end{aligned}$$

$$11. \frac{Sh\varepsilon_n}{\varepsilon_n} \rightarrow 1$$

$$\blacksquare Sh\varepsilon_n = \frac{e^{\varepsilon_n} - e^{-\varepsilon_n}}{2} \rightarrow 0$$

$$\blacksquare Ch\varepsilon_n = \frac{e^{\varepsilon_n} + e^{-\varepsilon_n}}{2} \rightarrow 1$$

$$\frac{Sh\varepsilon_n}{\varepsilon_n} = \frac{1}{2} \left\{ \frac{e^{\varepsilon_n - 1} - e^{\varepsilon_n}}{\varepsilon_n} \right\} = \frac{1}{2} \left\{ \frac{e^{\varepsilon_n} - 1}{\varepsilon_n} (\rightarrow 1) + \frac{e^{-\varepsilon_n} - 1}{-\varepsilon_n} (\rightarrow 1) \right\} = \frac{1}{2}(2) = 1$$

$$12. \frac{Th\varepsilon_n}{\varepsilon_n} \rightarrow 1 \text{ Procedimento analogo a (11)}$$

$$13. \frac{Ch\varepsilon_n - 1}{\varepsilon_n^2} \rightarrow \frac{1}{2}$$

$$\begin{aligned} \frac{Ch\varepsilon_n - 1}{\varepsilon_n^2} &\Rightarrow \frac{(Ch\varepsilon_n - 1)(Ch\varepsilon_n + 1)}{\varepsilon_n^2} \cdot (Ch\varepsilon_n + 1) \Rightarrow [Ch^2x - 1 = Sh^2x] \\ &= \frac{Sh^2\varepsilon_n}{\varepsilon_n^2} \cdot \frac{1}{Ch\varepsilon_n + 1} = \left( \frac{Sh\varepsilon_n}{\varepsilon_n} \right)^2 (\rightarrow 1^2) \cdot \frac{1}{Ch\varepsilon_n (\rightarrow 1) + 1 \{ \rightarrow 2 \}} (\rightarrow \frac{1}{2}) \rightarrow \frac{1}{2} \end{aligned}$$

### Altri limiti notevoli

$$14. \frac{a^{\varepsilon_n} - 1}{\varepsilon_n} \rightarrow \log a \text{ Generalizzazione della (9)}$$

$$15. \frac{\log_\alpha(1 + \varepsilon_n)}{\varepsilon_n} \rightarrow \log_\alpha e \text{ Generalizzazione della (8)}$$

**Limite di  $a_n^{b_n}$**  Data la successione

$$\begin{aligned} a_n^{b_n}, \text{ con } a > 0 \Rightarrow \\ \sqrt[n]{a} = a^{\frac{1}{n}} = e^{\frac{1}{n} \log a} \Rightarrow \frac{1}{n} (\rightarrow 0) \log a (\rightarrow a) \Rightarrow \frac{1}{n} \log a \rightarrow 0 \\ e^{\frac{1}{n} \log a} \rightarrow 1 \end{aligned}$$

In particolare

$$\sqrt[n]{n} = e^{\frac{1}{n} \log n} = e^{\frac{\log n}{n}}$$

## 5.6 Gerarchie di infiniti e di infinitesimi

In generale, vi è questa relazione d'ordine tra le funzioni, per  $n \rightarrow +\infty$ :

$$(\log n)^r \ll n^p \ll e^{qn} \ll n! \ll n^n$$

Ciò

$$a_n \ll b_n \iff \frac{a_n}{b_n} \rightarrow 0$$

Con  $r, p, q > 0, e \in \mathbb{R}$

Per  $n \rightarrow 0$ , vi è la seguente relazione d'ordine:

$$\frac{1}{n^n} \ll \frac{1}{n!} \ll \frac{1}{e^{qn}} \ll \frac{1}{n^p} \ll \frac{1}{(\log n)^r}$$

e

$$n^k \ll n^{k-1} \ll \dots \ll k^2 \ll n, \sin n, e^n, \dots \ll n^{\frac{1}{m}}$$

Dunque  $n^k$  tenderà a 0 molto più rapidamente di  $n^{k-1}$ .

**Esempio.** Si verifica che

$$\frac{(\log n)^{9999999999999999}}{n^{0,0000000000000001}} \rightarrow 0$$

Infatti  $n^p$  per  $n \rightarrow +\infty$  assumerà un valore di infinito comunque maggiore di quello assunto da  $(\log n)^r$ .  
Altri esempi di gerarchie sono:

- $\frac{n!}{n^n} \rightarrow 0$
- $\frac{e^{qn}}{n!} \rightarrow 0$
- $\frac{n^p}{e^{qn}} \rightarrow 0$
- $\frac{(\log n)^r}{n^p} \rightarrow 0$

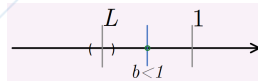
### Criteriono del rapporto

**Teorema 5.2.** Sia  $a_n > 0$  e si supponga che  $\frac{a_{n+1}}{a_n} \rightarrow L \in [0; +\infty]$ , se

$$\begin{cases} L < 1 \implies a_n \rightarrow 0 \\ L > 1 \implies a_n \rightarrow +\infty \\ L = 1 \text{ non discusso} \end{cases}$$

### Dimostrazione

Se  $\frac{a_{n+1}}{a_n} \rightarrow L < 1$



$$\begin{aligned} \exists n_0 \text{ t.c. } \forall n \geq n_0 \implies \frac{a_{n+1}}{a_n} \leq b \implies a_{n+1} &\leq b \cdot a_n \\ a_{n_0+1} \leq b \cdot a_{n_0} \implies a_{n_0+2} &\leq b \cdot a_{n_0+1} \leq b^2 a_{n_0} \\ \forall k = 1, 2, 3, \dots a_{n_0+k} &\leq b^k a_{n_0} \end{aligned}$$

■ **Dimostrazione**  $a_n = \frac{n!}{n^n}$

$$\begin{aligned} a_n = \frac{n!}{n^n} \implies \frac{a_{n+1}}{a_n} &= \frac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}} \cdot \frac{n^n}{n!} = \frac{n^n}{(n+1)^n} = \frac{1}{\left(\frac{n+1}{n}\right)^n} = \\ &= \frac{1}{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n} \rightarrow \frac{1}{e} < 1 \end{aligned}$$

■ **Dimostrazione**  $a_n = \frac{n^p}{e^{qn}}$

$$\begin{aligned} a_n = \frac{n^p}{e^{qn}} \implies \frac{a_{n+1}}{a_n} &= \frac{(n+1)^p}{e^{q(n+1)}} \cdot \frac{e^{qn}}{n^p} = \left(\frac{n+1}{n}\right)^p \cdot e^{-q} = \\ &= \left(1 + \frac{1}{n}\right)^p \cdot e^{-q} \rightarrow e^{-q} < 1 \end{aligned}$$

## Dimostrazione

■ **Dimostrazione**  $a_n = \frac{\log n}{n}$

$$\begin{aligned} a_n = \frac{\log n}{n} &\implies \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\log(n+1)}{n+1} \cdot \frac{n}{\log n} = \left(\frac{n}{n+1}\right) \cdot \frac{\log(n+1)}{\log n} \implies \\ &\implies \frac{\log(n+1)}{\log n} = \log\left(n\left(1+\frac{1}{n}\right)\right) = \frac{\log n}{\log n} + \frac{\log\left(1+\frac{1}{n}\right)}{\log n} \left[\rightarrow \frac{0}{\infty}\right] \\ a_n = \frac{\log n}{n} &\implies \log n = x \rightarrow n = e^x \\ &= \frac{x}{e^x} \implies \frac{k+1}{e^k} \rightarrow 0 \text{ con } k < x < k+1 \text{ e } k \in \mathbb{N} \\ &(k \rightarrow \infty \text{ quando } n \rightarrow \infty)(k : \text{ successione di numeri interi}) \end{aligned}$$

## 6. L'Asintotico

## Successioni asintotiche

**Definizione 6.1.** Due successioni  $a_n$  e  $b_n$  si dicono *asintotiche* se

$$\lim \left( \frac{a_n}{b_n} \right) = 1$$

Si scrive

$$a_n \sim b_n$$

La relazione di "asintotico" è una *relazione di equivalenza*.

Essendo una relazione di equivalenza, l'asintotico gode delle seguenti proprietà :

- *Riflessiva*:  $a_n \sim a_n$
- *Simmetrica*:  $a_n \sim b_n \iff b_n \sim a_n$
- *Transitiva*:  $a_n \sim c_n$  e  $b_n \sim c_n \implies a_n \sim b_n$

Si considera il limite

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_n}{b_n} = \begin{cases} 0 & (i) \\ l \text{ finito e } l \neq 0 & (ii) \\ \pm\infty & (iii) \\ \text{inesistente} & (iv) \end{cases}$$

- Se  $a_n$  e  $b_n$  sono due *infiniti*:
  - (i)  $a_n$  è un infinito di *ordine inferiore* a  $b_n$
  - (ii)  $a_n$  e  $b_n$  sono infiniti dello *stesso ordine*
  - (iii)  $a_n$  è un infinito di *ordine superiore* a  $b_n$
  - (iv)  $a_n$  e  $b_n$  *non sono confrontabili*
- Se  $a_n$  e  $b_n$  sono due *infinitesimi*:
  - (i)  $a_n$  è un infinitesimo d'*ordine superiore* a  $b_n$
  - (ii)  $a_n$  e  $b_n$  sono infinitesimi dello *stesso ordine*
  - (iii)  $a_n$  è un infinitesimo di *ordine inferiore* a  $b_n$
  - (iv)  $a_n$  e  $b_n$  *non sono confrontabili*

Se  $a_n \sim b_n$  e  $b_n \sim c_n$  allora

$$\frac{a_n}{b_n} \rightarrow 1 \text{ e } \frac{b_n}{c_n} \rightarrow 1 \implies \frac{a_n}{c_n} = \frac{a_n}{b_n} \cdot \frac{b_n}{c_n} = \dots \rightarrow 1$$

Osservazione:  $a_n \sim b_n \iff b_n = a_n(1 + \varepsilon_n)$

$$\implies \frac{b_n}{a_n} = 1 + \varepsilon_n \implies b_n = a_n \cdot \frac{b_n}{a_n} = a_n \left( 1 + \left[ \frac{b_n}{a_n} - 1 \right] \right) (\rightarrow \varepsilon_n)$$

Conseguenza: Se  $a_n \sim b_n \implies a_n$  e  $b_n$  hanno lo *stesso comportamento* al limite:

$$\lim a_n = \lim b_n$$

### 6.1 Prodotto e quoziente

Siano  $a_n \sim b_n$  e sia  $c_n \neq 0$  definitivamente

$$\implies a_n \cdot c_n \sim b_n \cdot c_n \implies \frac{a_n}{c_n} \sim \frac{b_n}{c_n}$$

### 6.2 Potenze

Se  $a_n \sim b_n \implies a_n^\alpha \sim b_n^\alpha$ . Dunque se  $\alpha \in \mathbb{R} \rightarrow a_n > 0$ .

Infatti

$$\frac{a_n^\alpha}{b_n^\alpha} = \left(\frac{a_n}{b_n}\right)^\alpha \rightarrow 1$$

### 6.3 Considerazioni sulle proprietà

Se  $a_n \sim b_n \not\Rightarrow a_n + c_n \sim b_n + c_n$ , infatti la relazione non vale se

$$c_n = -n, a_n = n + 2, b_n = n + 1$$

Però

$$\frac{a_n}{b_n} = \frac{n+2}{n+1} = 1 + \frac{1}{n+1} (\rightarrow 0) \rightarrow 1$$

**Esempio.** Sia  $a_n \rightarrow l \in \mathbb{R} \implies a_n \sim l$  (con  $l \neq 0$ )

### 6.4 Polinomio in $n$

Dato un polinomio

$$p_n = c_1 n^{\alpha_1} + c_2 n^{\alpha_2} + c_3 n^{\alpha_3} + \dots + c_k n^{\alpha_k}$$

con  $c_1, c_2, c_3, \dots, c_k \in \mathbb{R} (\neq 0)$  e  $\alpha_1 > \alpha_2 > \alpha_3 > \dots > \alpha_k$

$$\implies p_n \sim c_1 n^{\alpha_1}$$

**Esempio.**

$$\lim \left( \frac{4n^5 - 6n^\pi \cdot \sqrt{n} + 12n^2 \sqrt{n} - 1}{2n^5 + 4n\sqrt{n} - 12} \right) = (\sim) \lim \frac{(4n^5)}{2n^5} = 2$$

Si trasforma il polinomio dividendo tutti i monomi per il più grande:

$$\frac{p_n}{c_1 n^{\alpha_1}} = 1 + \frac{c_2}{c_1 n^{\alpha_1 - \alpha_2}} + \frac{c_3}{c_1 n^{\alpha_1 - \alpha_3}} + \dots + \frac{c_k}{c_1 n^{\alpha_1 - \alpha_k}} \rightarrow 1$$

**Osservazione:** Le costanti  $c_2, \dots, c_k$  possono essere rimpiazzate da successioni limitate.

**Esempio.**  $(6n^7 + 21n^6 - 12 \sin \psi^n n^\pi - 4) \sim 6n^7$

**Esempio.**  $\lim \left( \frac{n^2 - n\sqrt{n}}{4n^2 + \cos n + \arctan(\text{Sh}x) \cdot n^{\frac{\pi}{2}}} \right) = (\sim) \lim \frac{n^2}{4n^2} = \frac{1}{4}$

**Esempio.**  $(3e^{\frac{n}{2}} + n^{27} - 12 \cos n \log n) \sim 3e^{\frac{n}{2}}$

$$\implies n \log n - n + 2 \implies 1 - \frac{1}{\log n (\rightarrow \infty)} (\rightarrow 0) + \frac{2}{\log n (\rightarrow \infty)} (\rightarrow 0) \rightarrow 1$$

$$n\sqrt{n} - n(\log n)^{121} \rightarrow n\sqrt{n}$$

### 6.5 Asintotici notevoli

1. Polinomi in  $n$

2.  $\sin \varepsilon_n \sim \varepsilon_n$

3.  $\tan \varepsilon_n \sim \varepsilon_n$

4.  $1 - \cos \varepsilon_n \sim \frac{\varepsilon_n^2}{2}$

5.  $\arcsin \varepsilon_n \sim \varepsilon_n$

6.  $\arctan \varepsilon_n \sim \varepsilon_n$

7.  $(1 + \varepsilon_n)^{\frac{1}{\varepsilon_n}} \sim e$

8.  $\log(1 + \varepsilon_n) \sim \varepsilon_n$

■  $\log a_n \sim a_n - 1$  se  $a_n \rightarrow 1$  (per  $\log a_n = \log(1 + (a_n - 1))$ )

9.  $e^{\varepsilon_n} - 1 \sim \varepsilon_n$

10.  $(1 + \varepsilon_n)^\alpha - 1 \sim \alpha \varepsilon_n$

11.  $\text{Sh} \varepsilon_n \sim \varepsilon_n$

12.  $Th\varepsilon_n \sim \varepsilon_n$

13.  $Ch\varepsilon_n - 1 \sim \frac{\varepsilon_n^2}{2}$

14.  $n! \sim n^n \cdot e^{-n} \cdot \sqrt{2\pi n}$  Formula di Stirling

15.  $\log n! \sim n \log n$

**Esempio.**

$$\frac{Sh[\log(1 + \frac{n^2 - 6n \cos n}{n^3 - \arctan n})]^2}{\sqrt[4]{1 + \tan(\frac{1}{n}Th(\frac{1}{n}))} - 1}$$

Numeratore:

$$\begin{aligned} Sh[\log(1 + \partial)]^2 \text{ con } \partial &= \frac{n^2 - 6n \cos n}{n^3 - \arctan n} \sim \frac{1}{n} \\ \log(1 + \partial) \rightarrow 0 \text{ per (11)} &\implies Sh[\log(1 + \partial)]^2 \sim [\log(1 + \partial)]^2 \implies \\ \implies \text{per (8)} [\log(1 + \partial)]^2 &\sim \partial^2 \implies \text{per (1)} \partial^2 \sim \left[\frac{1}{n}\right]^2 = \frac{1}{n^2} \\ &= (\sim) \frac{\frac{1}{n^2}}{\sqrt[4]{1 + \tan(\frac{1}{n}Th(\frac{1}{n}))} - 1} \end{aligned}$$

Denominatore:

$$\begin{aligned} (1 + \partial)^{\frac{1}{4}} - 1 \text{ con } \partial &= \tan(\frac{1}{n}Th(\frac{1}{n})) \rightarrow 0 \\ \implies \text{per (10)} (1 + \partial)^{\frac{1}{4}} - 1 &\sim \frac{1}{4}\partial \implies \text{per (3)} \partial = \tan \Delta \sim \Delta = \frac{1}{n} \cdot Th(\frac{1}{n}) \\ \text{per (12)} \frac{1}{n} \cdot Th(\frac{1}{n}) &\sim \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{n} = \frac{1}{n^2} \\ \implies &\cong \frac{\frac{1}{n^2}}{\frac{1}{4n^2}} = 4 \end{aligned}$$

**Esempio.**■  $\sin(Th\varepsilon_n) \sim \sin \varepsilon_n \sim \varepsilon_n \implies$  ERRORE di procedimento■  $\sin(Th\varepsilon_n) \sim Th\varepsilon_n \sim \varepsilon_n \implies$  CORRETTO**Esempio.**

$$\begin{aligned} n \left[ Ch^n \left( \frac{n - \sqrt{n}}{n^2 + 1} \right) - 1 \right] &\implies n \left[ e^{n \log(Ch(\frac{n - \sqrt{n}}{n^2 + 1}))} - 1 \right] \\ b_n = n \log a_n \sim n \log(a_n - 1) &\implies n \left[ Ch \left( \frac{n - \sqrt{n}}{n^2 + 1} \right) - 1 \right] \sim n \cdot \frac{\varepsilon_n^2}{2} \\ \left\{ con Ch(\varepsilon_n) - 1 \rightarrow \frac{\varepsilon_n^2}{2} e^{\frac{n - \sqrt{n}}{n^2 + 1}} \sim \frac{1}{n} \rightarrow \varepsilon_n \right\} \\ &= \left(\frac{n}{2}\right) \cdot \left(\frac{n - \sqrt{n}}{n^2 + 1}\right)^2 \sim \frac{n}{2} \cdot \frac{1}{n^2} = \frac{1}{2n} = b_n \\ \implies &\sim n \cdot b_n \sim n \cdot \frac{1}{2n} = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

**6.6** Limiti di usabilità dell'asintotico

Dato, ad esempio, il limite

$$\lim n^3 \left( \frac{1}{n} - \sin \left( \frac{1}{n} \right) \right)$$

non è possibile risolverlo con l'asintotico senza perdere informazioni. Non tutti i limiti possono essere risolti tramite l'utilizzo dell'asintotico. Infatti per questi casi si utilizza l'approssimazione lineare. Il limite precedente vale

$$\lim = 1/6$$

In generale non si utilizza l'asintotico per le somme.

**6.7** Asintotico rispetto al logaritmoSia ♠  $a_n \sim b_n$ , allora  $\log a_n \sim \log b_n$ ? **Non è garantito**

Ad esempio, dati

$$a_n = 1 + \frac{1}{n}, \quad b_n = 1 + \frac{1}{n^2}$$

si ha

$$\log\left(1 + \frac{1}{n}\right) \sim \frac{1}{n} \not\sim \log\left(1 + \frac{1}{n^2}\right) \sim \frac{1}{n^2}$$

In generale è, appunto, falso.

Soltanto se il limite è diverso e distante da 1 si può applicare, in alcuni casi.

$$\frac{\log a_n}{\log b_n} = \frac{\log(b_n(1 + \varepsilon_n))}{\log b_n} = 1 + \frac{\log(1 + \varepsilon_n)}{\log b_n} (\rightarrow 0)$$

♠  $\log a_n \sim \log b_n$  è vera se  $\exists \varepsilon > 0$  t.c.

$|a_n - 1| < \varepsilon, |b_n - 1| < \varepsilon$  definitivamente

$\Rightarrow$  ♠ vera se  $a_n \rightarrow l \in \mathbb{R}$  con  $l \neq 1$  (allo stesso modo  $b_n$ )

Dato  $n! \sim n^n e^{-n} \sqrt{2\pi n}$  allora

$$\begin{aligned} \log n! &\sim \log(n^n e^{-n} \sqrt{2\pi n}) = \log n^n + \log e^{-n} + \frac{1}{2} \log 2\pi + \frac{1}{2} \log n = \\ &= n \log n - n + \frac{1}{2} \log 2\pi + \frac{1}{2} \log n \end{aligned}$$

Si ha dunque l'asintotico notevole:

$$(15) \log n! \sim n \log n (= \log n^n)$$

**Esempio.** Siano  $a_n \sim b_n \Rightarrow e^{a_n} \sim e^{b_n}$  con  $a_n > 0, b_n > 0$

Qual è l'asintoto, se esiste, di  $\log a_n - \log b_n$ ?

### 6.8 Asintotico rispetto all'esponenziale

Sia (1)  $a_n \sim b_n \Rightarrow e^{a_n} \sim e^{b_n}$ ? In generale **No.** Infatti:

$$\frac{e^{a_n}}{e^{b_n}} = e^{a_n - b_n} = e^{a_n - (1 - \frac{b_n}{a_n}) \rightarrow 0}$$

che è vero se  $a_n$  è una successione limitata

**Esempio.** Sia  $a_n \neq b_n$  e  $a_n, b_n \rightarrow l \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} e^{a_n} - e^{b_n} &\sim: e^{a_n} - e^{b_n} = e^{b_n}(e^{a_n - b_n} - 1) \sim l(a_n - b_n) \\ e^{a_n} - e^{b_n} &\sim l(a_n - b_n) \end{aligned}$$

**Esempio.**  $\lim_{n \rightarrow +\infty} (n^{\frac{1}{n}} - (n-1)^{\frac{1}{n+1}}) \cdot \frac{n^2}{\log n}$

$$n^{\frac{1}{n}} - (n-1)^{\frac{1}{n+1}} \rightarrow e^{\frac{1}{n} \log n} - e^{\frac{1}{n+1} \log n} \sim \frac{\log n}{n} - \frac{\log(n+1)}{n+1} = \frac{(n+1) \log n - n \log(n+1)}{n(n+1)}$$

$$\begin{aligned} &\left[ \log(n+1) = \log\left(n\left(1 + \frac{1}{n}\right)\right) = \log n + \log\left(1 + \frac{1}{n}\right) \right] \\ &\frac{n \log n + \log n - n \log n - n \log\left(1 + \frac{1}{n}\right)}{n(n+1)} = \frac{\log n - n \log\left(1 + \frac{1}{n}\right)}{n(n+1)} \sim \frac{\log n}{n^2} \end{aligned}$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\log n}{n^2} \cdot \frac{n^2}{\log n} = 1$$

**Esempio.**  $\lim_{n \rightarrow +\infty} (n\sqrt{n} \sin n + \cos n + n^2) \left( \sqrt{1 + \sin^2\left(\frac{1}{2n}\right)} - 1 \right)$

$$= (\sim) \lim_{n \rightarrow +\infty} (n^2) \left( \left( 1 + \sin^2\left(\frac{1}{2n}\right) \right)^{\frac{1}{2}} - 1 \right) = \lim_{n \rightarrow +\infty} (n^2) \left( 1 + \frac{1}{2} \sin^2\left(\frac{1}{2n}\right) - 1 \right) = (\sim)$$

$$= (\sim) \lim_{n \rightarrow +\infty} n^2 \left( \frac{1}{2} \sin^2\left(\frac{1}{2n}\right) \right) = (\sim) \lim_{n \rightarrow +\infty} \left( \frac{1}{2} n^2 \cdot \frac{1}{4n^2} \right) = \frac{1}{8}$$