Numeri complessi

1. Il campo $\mathbb{C}$

La risoluzione di equazioni algebriche ha fatto sì che venissero introdotti i numeri complessi, per risolvere equazioni del tipo $x^2 + 1 = 0$.
Si introduce quindi il simbolo i, detto unità immaginaria:

$$i^2 = -1$$

Definizione. Un *numero complesso* è un oggetto dalla forma

$$z = x + iy, \qquad x, y \in \mathbb{R}$$

x è detta *parte reale*, indicata con $\text{Re}(z)$, e y è detta *parte immaginaria*, indicata con $\text{Im}(z)$. Questa è detta *forma algebrica* del numero complesso.

Esempio.

- $Z = 1 + i2 \in \mathbb{C}$
- $z = -\sqrt{3} - i\frac{1}{4} \in \mathbb{C}$

Si possono *rappresentare* i numeri complessi, e il campo complesso, tramite il piano cartesiano. Sull'asse delle ascisse si rappresenta $\text{Re}(z)$ e sull'asse delle ordinate $\text{Im}(z)$.

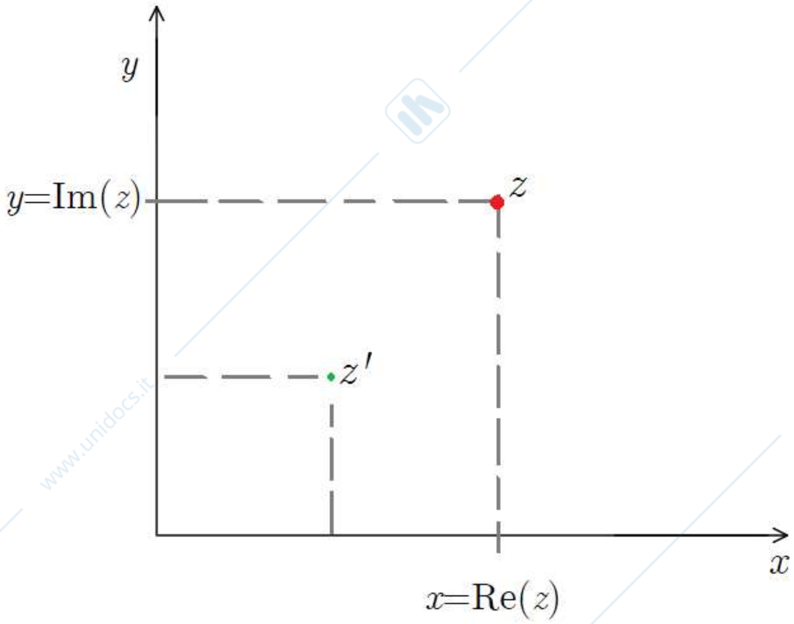

Figura 1 Rappresentazione sul piano cartesiano di un numero complesso

Tutti i numeri reali possono essere rappresentati nel piano, e sono quei numeri con $\text{Im}(z) = 0$. Essi sono tutti i numeri complessi contenuti nell'asse x, e sono identificati come $n = x + i0$.
Infatti esiste la relazione:

$$\mathbb{R} \subseteq \mathbb{C}$$

Tutti i numeri reali sono contenuti in $\mathbb{C}$, cioè $\mathbb{R}$ è un sotto-campo di $\mathbb{C}$.

Essendo $\mathbb{C}$ un campo verifica gli *assiomi* di *gruppo*, ma non è un gruppo abeliano. Infatti non è possibile stabilire una relazione d'ordine tra gli elementi di $\mathbb{C}$. In un campo ordinato vale:

$$\text{se } x \neq 0 \Longrightarrow x^2 > 0$$

In particolare, scegliendo $x = 1$, si ricava che $1 > 0$; in $\mathbb{C}$, scegliendo

$$x = i \rightarrow x^2 = -1 < 0$$

Dunque in $\mathbb{C}$ non c'è un ordine *totale*.

Definizione. Il *modulo di un numero complesso* è

$$|z| = \sqrt{x^2 - y^2}$$

ed è il vettore generato da z, con origine O ($|z| \geq 0$ sempre).

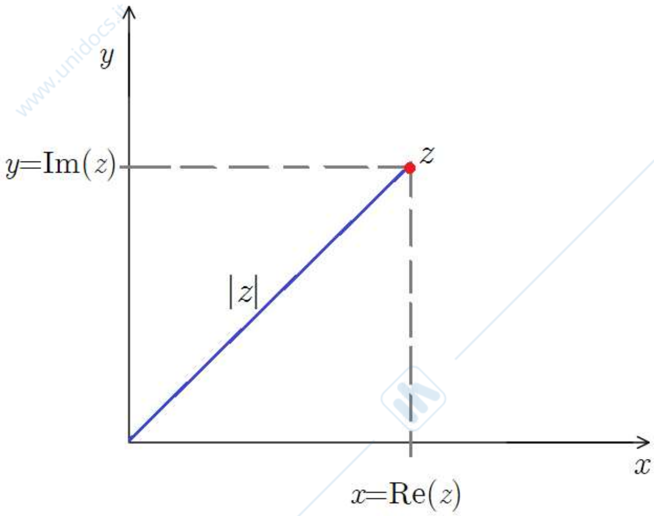

Figura 2 Modulo di un numero complesso

Esempio. $z_1 = 1 + i2 \rightarrow |z_1| = \sqrt{5}$

Definizione. Dato un numero complesso $z = x + iy$, si dice *complesso coniugato* di z il numero

$$\bar{z} = x - iy$$

Ossia il numero con stessa Re di z e Im opposta.

Esempio.

- $z_1 = 1 + i2 \ \rightarrow \ \overline{z_1} = 1 - i2$
- $z_2 = -\sqrt{3} - i3 \ \rightarrow \ \overline{z_2} = -\sqrt{3} + i3$

2. Proprietà dei numeri complessi

2.1. Somma

Dati

$$z = a + ib \ \text{ e } \ w = c + id, \quad a, b, c, d \in \mathbb{R}$$

La loro somma è

$$z + w = (a + c) + i(b + d) \qquad z + w \in \mathbb{C}$$

Esempio. $z_1 = 1 + i2,\ z_2 = -\sqrt{3} + i2$

$$z_1 + z_2 = \left(1 - \sqrt{3}\right) + i4$$

2.2. Prodotto

$$z \cdot w = (a + ib)(c + id) = ac + iad + ibc + i^2 db \quad (i^2 = -1)$$
$$= (ac - db) + i(ad + bc)$$

Esempio.$z_1 \cdot z_2 = (1 + i2)\left(-\sqrt{3} - i2\right) = -\sqrt{3} - i2 - i^2 4 - i2\sqrt{3} =$
$$= -\sqrt{3} - i2 + 4 - i2\sqrt{3} = \left(4 - \sqrt{3}\right) + i\left(-2 - 2\sqrt{3}\right)$$

2.3. Proprietà immediate

Dato $z = x + iy \in \mathbb{C}$:

$$z \in \mathbb{C} \begin{cases} \mathrm{Re}(z) = \dfrac{z + \bar{z}}{2} \\ \mathrm{Im}(z) = \dfrac{z - \bar{z}}{2} \end{cases}$$

Infatti:

$$z = x + iy \ \ e\ \bar{z} = x - iy$$

- $z + \bar{z} = 2x \Longrightarrow x = \frac{z+\bar{z}}{2}$
- $z - \bar{z} = 2iy \Longrightarrow y = \frac{z-\bar{z}}{2}$

2.4. Proprietà del modulo

1) $|z|^2 = |\bar{z}|^2 = z \cdot \bar{z}$

$$(x + iy)(x - iy) = x^2 - ixy + ixy + y^2 = x^2 + y^2 = |z|^2$$

2) $|z| = 0 \Leftrightarrow z = 0 \Leftrightarrow \sqrt{x^2 + y^2} = 0 \Leftrightarrow y = 0 \text{ e } x = 0 \Leftrightarrow x^2 + y^2 = 0$

3) $|z \cdot w| = |z| \cdot |w|$

   (*prodotto di numeri complessi*) = (*prodotto di numeri reali*)

$$z = a + ib \ \text{ e } \ w = c + id$$

   $|z \cdot w|^2 = (ac - db)^2 + (ab + bc)^2 = a^2c^2 + b^2d^2 - 2abcd + a^2d^2 + b^2c^2 + 2abcd = (a^2 + b^2)(c^2 + d^2) = |z|^2 \cdot |w|^2$

4)
   - $|\mathrm{Re}(z)| \leq |z|$
   - $|\mathrm{Im}(z)| \leq |z|$

$$z = x + iy \quad |x| = \sqrt{x^2} \leq \sqrt{x^2 + y^2} = |z|$$

5) *Disuguaglianza triangolare*:

$$|z + w| \leq |z| + |w|$$

2.5. Inverso di un numero complesso

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{a + ib} = \frac{a - ib}{a - ib} \cdot \frac{1}{a + ib} \ (razionalizzazione)$$
$$= \frac{a - ib}{|z|^2} = \frac{a}{|z|^2} - i\frac{b}{|z|^2} \ \rightarrow numero\ complesso$$

Risolvibile se e soltanto se $|z|^2 \neq 0 \Leftrightarrow z \neq 0$.

Dato $z = a + ib \rightarrow$
$$\frac{1}{z} = \frac{a}{a^2+b^2} - i\frac{b}{a^2+b^2} = \frac{z}{|z|^2} = \frac{1}{z} \rightarrow \quad z \neq 0$$
In particolare, se $|z| = 1$ si ha che
$$\frac{1}{z} = \bar{z}$$

2.6. Proprietà del coniugato

1) $\overline{(\bar{z})} = z \rightarrow ovvio$
2) $\bar{z} + \bar{w} = \overline{z + w}$
3) $\bar{z} \cdot \bar{w} = \overline{z \cdot w}$
4) $\overline{\left(\frac{1}{z}\right)} = \frac{1}{\bar{z}}$

$$\frac{1}{z} = \frac{\bar{z}}{|z|^2} \rightarrow \overline{\left(\frac{1}{z}\right)} = \overline{\left(\frac{\bar{z}}{|z|^2}\right)} \rightarrow \frac{z}{|z|^2} = \frac{z}{|\bar{z}|^2} = \frac{1}{z} \qquad \left[\ \overline{\left(\frac{\bar{z}}{|z|^2}\right)} = \frac{\overline{(\bar{z})}}{|z|^2} = \frac{z}{|\bar{z}|^2}\right]$$

3. Forme dei numeri complessi

3.1. Forma trigonometrica

Analogamente alle coordinate polari, dati δ, modulo di z, e ϑ, angolo riferito a z, essi identificano un solo numero complesso:

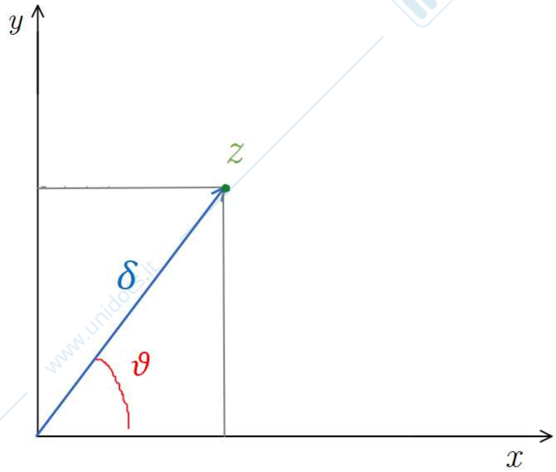

Figura 3 Componenti trigonometriche di z

$$z = x + iy \rightarrow ⊛ \begin{cases} x = \delta \cos\vartheta \\ y = \delta \sin\vartheta \end{cases} \quad \vartheta \in [0; 2\pi]$$
$$\rightarrow \delta = \sqrt{x^2 + y^2}$$

Dal sistema si ricava che $\tan\vartheta = \frac{x}{y}$, con $x \neq 0$, e dunque:
$$\begin{cases} \tan\vartheta = \dfrac{x}{y} \\ \delta = \sqrt{x^2+y^2} \end{cases} \rightarrow per \tan\vartheta\ bisogna\ controllare\ se\ aggiungere\ o\ meno\ \pi$$

Usando il sistema ⊛ si ottiene la *forma trigonometrica* di un numero complesso
$$\boxed{z = a + ib = \delta(\cos\vartheta + i\sin\vartheta)}$$

Da questa forma si ottiene la *formula di Eulero*:

$$e^{i\pi} = \cos x + i \sin x$$

E nello specifico l'*identità di Eulero*:

$$e^{i\pi} + 1 = 0$$

3.2. Forma logaritmica

A partire dalla forma trigonometrica si può definire la *forma logaritmica* di un numero complesso:

$$\boxed{z = \delta \cdot e^{i\vartheta}}$$

Esempio. $z_1 = 2 - i$

$$\delta = \sqrt{5}$$

$$\tan \vartheta = -\frac{1}{2}$$

$$\vartheta = \arctan\left(-\frac{1}{2}\right) \rightarrow \textit{perchè in IV quadrante}$$

$$z = \sqrt{5}\left(\cos \arctan\left(-\frac{1}{2}\right) + i \sin \arctan\left(-\frac{1}{2}\right)\right) = \sqrt{5} \cdot e^{i \arctan\left(-\frac{1}{2}\right)}$$

4. Moltiplicazione, potenza e radici

4.1. Moltiplicazione tra numeri complessi

Dati

$$z = \delta_1(\cos \vartheta_1 + i \sin \vartheta_1)$$
$$w = \delta_2(\cos \vartheta_2 + i \sin \vartheta_2)$$

la moltiplicazione $z \cdot w$ è data da:

$$z \cdot w = \delta_1\delta_2[(\cos \vartheta_1 \cos \vartheta_2 - \sin \vartheta_1 \sin \vartheta_2) + i(\cos \vartheta_1 \cos \vartheta_2 + \sin \vartheta_1 \sin \vartheta_2)] =$$
$$= \delta_1\delta_2(\cos(\vartheta_1\vartheta_2) + i \sin(\vartheta_1\vartheta_2))$$
$$= \delta_1 e^{i\vartheta_1} \cdot \delta_2 e^{i\vartheta_2} = \delta_1\delta_2 \cdot e^{2i\vartheta_1\vartheta_2}$$

4.2. Potenza di un numero complesso

Da questa formula si ricava la *formula di De Moivre*:

$$\forall n \in \mathbb{N} = \{1,2, \dots\}$$
$$z^n = \delta^n(\cos n\vartheta + i \sin n\vartheta)$$
$$\left(\delta \cdot e^{i\vartheta}\right)^n = \delta^n \cdot e^{in\vartheta} = z$$

Esempio. Sia $z = \frac{\sqrt{3}+i}{2}$, z^6 si calcola utilizzando la forma trigonometrica:

$$\delta = 1 \text{ e } \vartheta = \frac{\pi}{6}$$

$$z = \cos\frac{\pi}{6} + i \sin\frac{\pi}{6} = e^{\frac{i\pi}{6}}$$

$$z^6 = \cos \pi + i \sin \pi$$

4.3. Radice di un numero complesso

Dato $z \in \mathbb{C}$, una radice n-esima di z è un numero complesso $w \in \mathbb{C}$ tale che $w^n = z$

$$z = \delta_1(\cos\vartheta_1 + i\sin\vartheta_1)$$
$$w = \delta_2(\cos\vartheta_2 + i\sin\vartheta_2)$$

Si ricava δ_2 e ϑ_2 in funzione di δ_1 e ϑ_1.

$$w^n = \delta_2^n(\cos n\vartheta_2 + i\sin n\vartheta_2) = \delta_1(\cos\vartheta_1 + i\sin\vartheta_1) \Longrightarrow$$
$$\Longrightarrow \delta_2^n = \delta_1 \Longrightarrow \boxed{\delta_2 = \delta_1^{\frac{1}{n}}}$$
$$\Longrightarrow n\vartheta_2 = \vartheta_1 + 2k\pi \Longrightarrow \boxed{\vartheta_2 = \frac{\vartheta_1 + 2k\pi}{n}}$$

Si verifica che si ottengono precisamente n radici, corrispondenti a:

$$k = 0,1,2,\dots,n-1$$
$$w_k = \delta_1^{\frac{1}{n}}\left(\cos\left(\frac{\vartheta_1 + 2k\pi}{n}\right) + i\sin\left(\frac{\vartheta_1 + 2k\pi}{n}\right)\right)$$

Esempio. Determinare le radici cubiche (complesse) di 1.

$$\sqrt[\mathbb{C}]{1}$$
$$1 \to \ \delta = 1 \ \text{ e } \vartheta = 0$$
$$w_1 = 1\cdot\left(\cos\frac{o+o}{3} + i\sin\frac{0+0}{3}\right) = 1$$
$$w_2 = 1\cdot\left(\cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3}\right) = 1$$
$$w_3 = 1\cdot\left(\cos\frac{4\pi}{3} + i\sin\frac{4\pi}{3}\right) = 1$$

<u>Osservazione</u>: Le radici complesse n-esime di 1 sono i vertici di un poligono regolare di n lati iscritto nella circonferenza unitaria con un vertice in $(1;0)$.

5. Equazioni complesse

Teorema fondamentale dell'algebra. Un'equazione polinomiale nella forma:

$$a_o + a_1 z + a_2 z^2 + \dots + a_n z^n = 0$$
$$a_0, a_1, \dots, a_n \in \mathbb{C}, \qquad a_n \neq 0$$

ammette esattamente n radici complesse contate con la loro molteplicità (radici ripetibili).

Un'equazione di secondo grado reale:

$$(n = 2) \quad a,b,c \in \mathbb{C}$$
$$az^2 + bz + c = 0$$

Si risolve utilizzando $\Delta = b^2 - 4ac$:

$$z_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$$