



Corso di Analisi Matematica I (Prof. Vittorino Pata)

LA DERIVATA

1. Il problema della retta tangente	1
2. L'approccio analitico	3
3. Definizione formale	3
4. Approssimazione lineare	5
5. Derivabilità e continuità	7
6. Calcolo di derivate	11
7. Punti di flesso	14
8. Estremi locali	15
9. La funzione derivata	18
10. Il teorema di Lagrange	20
11. Derivabilità e monotonia	22
12. Derivate successive	25
13. Derivata seconda e convessità	25
14. Approssimazione polinomiale	30
15. Il resto di Lagrange	34
16. Il teorema di de l'Hôpital	36
Note	40

1. Il problema della retta tangente

È noto dall'antichità il concetto di retta tangente ad una conica, nozione che si estende in modo naturale a diverse altre curve, come le cubiche o le quartiche. Affrontiamo ora il discorso in maggior generalità: sia (a, b) un intervallo della retta reale e sia $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione assegnata. Dato $x_0 \in (a, b)$, ci poniamo il problema di trovare la tangente al grafico di f nel punto P_0 di coordinate cartesiane $(x_0, f(x_0))$. Sorge subito una questione non banale:

come si definisce geometricamente la tangente al grafico di una funzione?

Benché, mossi dall'esperienza della geometria elementare, si sia generalmente inclini a ritenere la risposta ovvia, il grafico di una funzione, quand'anche continua, potrebbe essere singolarmente complicato.

Esempio 1. È possibile dimostrare l'esistenza di una funzione $\psi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ che soddisfa la relazione^[N1]

$$|\psi(x) - \psi(y)| \leq |x - y|$$

per tutti i numeri reali x e y , e tuttavia *priva* di intervalli di monotonia. In altre parole, la ψ non è monotona su alcun intervallo della retta.

Osservazione 2. L'esempio sfata l'abusato (e sostanzialmente errato) luogo comune secondo cui "le funzioni continue sono quelle che si possono disegnare senza staccare la penna dal foglio". L'idea stessa di poter anche solo disegnare una tale ψ appare illusoria.^[N2]

Potrebbe quindi risultare assai poco evidente, se non impossibile, fornire condizioni geometriche per l'esistenza della tangente al grafico di una data funzione. Ma ci spingiamo a dire di più: in generale, non è nemmeno chiaro stabilire *cosa sia* la tangente.

Esempio 3. Si consideri la funzione

$$\varphi(x) = \begin{cases} x^2 \sin \frac{1}{x} & \text{se } x \neq 0 \\ 0 & \text{se } x = 0 \end{cases}$$

il cui grafico presenta infinite oscillazioni nei pressi del punto $x = 0$.

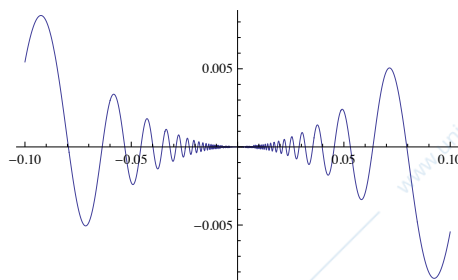


fig. 1 Grafico qualitativo della funzione φ

Definire *geometricamente* la tangente al grafico di φ nell'origine del piano cartesiano appare impresa oltremodo ardua. Tuttavia, come vedremo a breve, la tangente effettivamente esiste, ed è la retta di equazione $y = 0$. Dobbiamo però procedere per via *analitica*.

2. L'approccio analitico

Per una generica funzione $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ e un punto $x_0 \in (a, b)$, consideriamo la retta r_h passante per i punti del piano

$$P_0 = (x_0, f(x_0))$$

e

$$P_h = (x_0 + h, f(x_0 + h)),$$

dove h è una quantità piccola, positiva o negativa. Il coefficiente angolare m_h della retta r_h è dato dalla formula

$$m_h = \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}.$$

Al tendere di h a zero, il punto P_h si muove lungo il grafico della funzione, sovrapponendosi al punto P_0 quando h diventa nullo. Contestualmente, il coefficiente angolare m_h cambia al variare di h . Se m_h si stabilizza su un certo valore m_0 allorché h è abbastanza piccolo, possiamo *definire* la retta tangente r_0 come la retta passante per P_0 di coefficiente angolare m_0 .

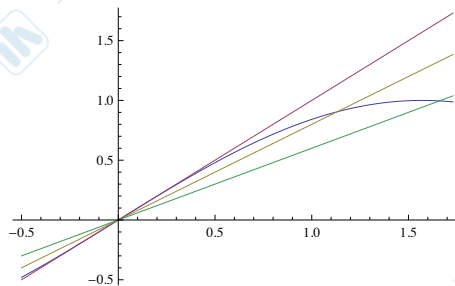


fig. 2 Visualizzazione grafica della procedura

Per formalizzare questa procedura si deve naturalmente far ricorso al concetto di limite.

3. Definizione formale

Sia $f = f(x)$ una funzione a valori reali della variabile x definita sull'intervallo aperto (a, b) , e sia $x_0 \in (a, b)$. Per h reale e sufficientemente piccolo affinché

$$x_0 + h \in (a, b),$$

la quantità

$$\mathcal{R}(f, x_0, h) = \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

viene chiamata *rapporto incrementale* della f nel punto x_0 di incremento h .

Definizione 4. La funzione f è *derivabile* nel punto x_0 se esiste $L \in \mathbb{R}$ tale che

$$\lim_{h \rightarrow 0} \mathcal{R}(f, x_0, h) = L. \quad (1)$$

Il numero reale L è detto *derivata* della f in x_0 , denotato in letteratura indifferentemente con i simboli

$$f'(x_0), \quad \frac{df}{dx}(x_0), \quad Df(x_0).$$

Definizione 5. Se nella formula (1) si considera solo il limite destro, si ottiene la *derivata destra*

$$f'_+(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0^+} \mathcal{R}(f, x_0, h).$$

Allo stesso modo, si definisce la *derivata sinistra*

$$f'_-(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0^-} \mathcal{R}(f, x_0, h).$$

Si noti che per calcolare la derivata destra è sufficiente che la f sia definita in $[x_0, b)$. Analogamente, per calcolare la derivata sinistra è sufficiente che la f sia definita in $(a, x_0]$

Osservazione 6. La f è derivabile in x_0 se e solo se esistono sia derivata destra che sinistra in x_0 e sono uguali. In tal caso,

$$f'(x_0) = f'_+(x_0) = f'_-(x_0).$$

Riacciandoci alla discussione precedente, disponiamo ora di un *metodo operativo* per definire la retta tangente.^[N3]

Definizione 7. Se f è derivabile in x_0 , si definisce *tangente* al grafico di f nel punto $P_0 = (x_0, f(x_0))$ la retta r_0 di equazione

$$r_0(x) = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0). \quad (2)$$

Quando esiste solo la derivata destra [sinistra] nel punto, parliamo di tangente destra [sinistra].

Esempio 8. Per la funzione φ dell'esempio 3 si ha

$$\varphi'(0) = \lim_{h \rightarrow 0} \mathcal{R}(\varphi, 0, h) = \lim_{h \rightarrow 0} h \sin \frac{1}{h} = 0.$$

Come anticipato, esiste la tangente al grafico di φ nell'origine, data dalla retta $y = 0$.

Osservazione 9. È interessante considerare anche la situazione in cui la derivata in x_0 non esiste nel senso della definizione 4 (e quindi f non è derivabile in x_0), ma

$$\lim_{h \rightarrow 0} \mathcal{R}(f, x_0, h) = +\infty.$$

Con abuso di notazione, si dice che f ha derivata $+\infty$ in x_0 . Analogamente, f ha derivata $-\infty$ in x_0 se

$$\lim_{h \rightarrow 0} \mathcal{R}(f, x_0, h) = -\infty.$$

Possiamo ancora definire la tangente nel punto P_0 , che risulta essere la retta verticale di equazione $x = x_0$, non esprimibile come funzione di una variabile.

4. *Approssimazione lineare*

Se f è derivabile in x_0 , si “discosta di poco” da una retta (per l'appunto, la retta tangente) nei pressi del punto x_0 .

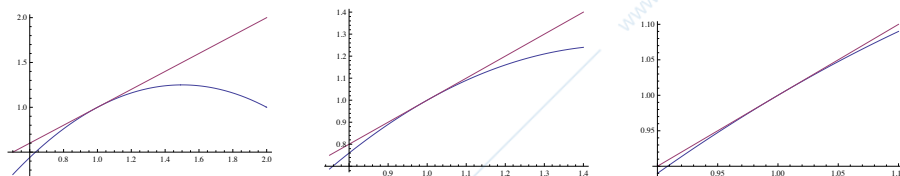


fig. 3 Tangente al grafico di una funzione a tre successive scale di ingrandimento

Lo strumento appropriato per tradurre l'affermazione in termini rigorosi è il concetto di *differenziabilità*^[N4]. Partiamo da due considerazioni, precedute da un'osservazione di carattere notazionale.

Osservazione 10. Nel seguito, senza necessariamente doverlo specificare ogni volta, indicheremo con ω una *generica* funzione reale *infinitesima* in zero, ovvero che soddisfa

$$\lim_{x \rightarrow 0} \omega(x) = 0.$$

► Se f è derivabile in x_0 , possiamo riformulare la (1) mediante la relazione

$$f(x_0 + h) = f(x_0) + f'(x_0)h + h\omega(h).$$

► Viceversa, se esiste $L \in \mathbb{R}$ per cui vale l'uguaglianza

$$f(x_0 + h) = f(x_0) + Lh + h\omega(h), \quad (3)$$

allora f è derivabile in x_0 e

$$f'(x_0) = L.$$

La formula (3) può essere infatti riletta come

$$\mathcal{R}(f, x_0, h) = L + \omega(h),$$

dalla quale si ottiene

$$\lim_{h \rightarrow 0} \mathcal{R}(f, x_0, h) = L.$$

Definizione 11. Una funzione f che soddisfa la (3) è detta *differenziabile* nel punto x_0 .

Abbiamo quindi dimostrato il seguente teorema.

Teorema 12. f è *differenziabile* in x_0 se e solo se è *derivabile* in x_0 .

Possiamo allora *linearizzare* la funzione: approssimarla cioè con la tangente r_0 di equazione (2), sapendo che la discrepanza è poco rilevante se x è vicino a x_0 . L'errore commesso è infatti quantificato da

$$\text{err}(x) = (x - x_0)\omega(x - x_0),$$

che tende a zero in modo più che lineare al tendere di x a x_0 , vale a dire

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\text{err}(x)}{x - x_0} = 0.$$

5. Derivabilità e continuità

La formula (3) ci permette anche di stabilire un legame tra derivabilità e continuità di una funzione in un punto.

Teorema 13. *Se f è derivabile in x_0 , allora f è continua in x_0 .*

Dimostrazione. Si tratta di far vedere che

$$\lim_{h \rightarrow 0} f(x_0 + h) = f(x_0).$$

Usando la (3), ricaviamo

$$\lim_{h \rightarrow 0} [f(x_0 + h) - f(x_0)] = \lim_{h \rightarrow 0} [hL + h\omega(h)] = 0,$$

come desiderato. \square

Ci si può domandare se valga il viceversa, cioè se la continuità implichi la derivabilità in un punto. La risposta è negativa, come mostrano gli esempi seguenti.

Esempio 14. Si consideri la funzione $f(x) = |x|$. La f è continua in zero ma, poiché

$$\mathcal{R}(f, 0, h) = \operatorname{sgn}(h),$$

ha derivata destra $f'_+(0) = 1$ e derivata sinistra $f'_-(0) = -1$. Dunque non è derivabile in zero.

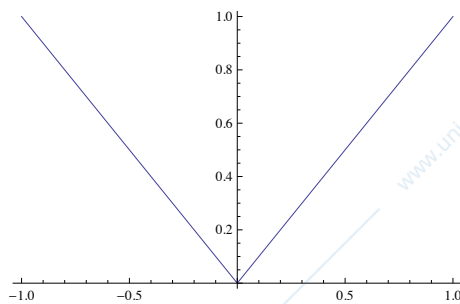


fig. 4 Grafico di $|x|$

Il punto $x = 0$ è detto *punto angoloso*. L'esistenza della derivata destra e sinistra implica infatti l'esistenza della tangente destra e sinistra, ma dette tangenti sono diverse (precisamente, le rette $y = x$ e $y = -x$) e formano un angolo nell'origine.

Esempio 15. La funzione $f(x) = \sqrt[3]{x}$ è continua in zero ma non derivabile nel senso della Definizione 4, in quanto $f'(0) = +\infty$. Nondimeno, ammette tangente (verticale) nell'origine data dalla retta di equazione $x = 0$.

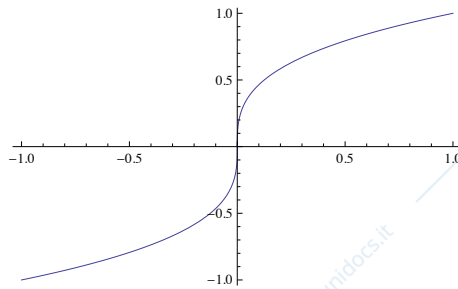


fig. 5 Grafico di $\sqrt[3]{x}$

Il punto $x = 0$ è detto *punto di tangente verticale*. Allo stesso modo, si ha la tangente verticale $x = x_0$ quando $f'(x_0) = -\infty$, come nel caso della funzione $f(x) = -\sqrt[3]{x}$.

Esempio 16. La funzione $f(x) = \sqrt{|x|}$ è continua in zero dove non ammette derivata. Tuttavia, $f'_+(0) = +\infty$ e $f'_-(0) = -\infty$.

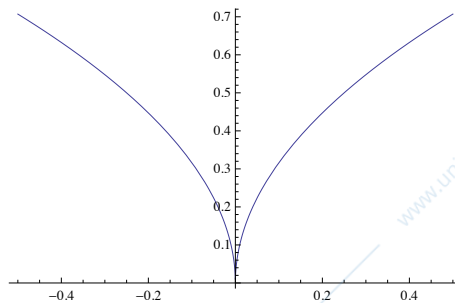


fig. 6 Grafico di $\sqrt{|x|}$

Sebbene sia lecito affermare che esistano sia tangente (verticale) destra che sinistra, la retta $x = 0$ non può essere interpretata come retta tangente, poiché il grafico della funzione, diversamente dal caso precedente, presenta una cuspide (rivolta verso il basso) nell'origine. Informalmente, potremmo dire che tangente destra e sinistra formano un angolo nullo.

Il punto $x = 0$ è detto *punto di cuspidè*. Ovviamente, si può presentare la situazione speculare di una funzione f continua in un punto x_0 e tale che

$$f'_+(x_0) = -\infty \quad \text{e} \quad f'_-(x_0) = +\infty.$$

Anche in questo caso si avrà una cuspidè (rivolta verso l'alto). Un esempio è dato dalla funzione $f(x) = -\sqrt{|x|}$.

Esempio 17. Si consideri la funzione

$$f(x) = \begin{cases} x \sin \frac{1}{x} & \text{se } x \neq 0 \\ 0 & \text{se } x = 0 \end{cases}$$

continua in ogni punto dell'asse reale. Il rapporto incrementale in zero è

$$\mathcal{R}(f, 0, h) = \sin \frac{1}{h}.$$

Poiché il limite

$$\lim_{h \rightarrow 0} \sin \frac{1}{h}$$

è indeterminato, la f non è derivabile in zero.

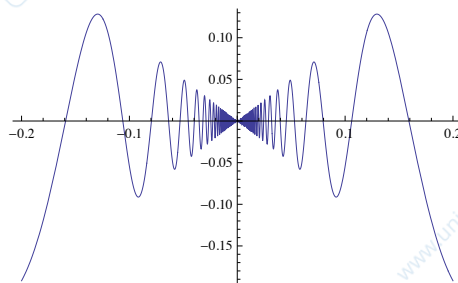


fig. 7 Grafico di $x \sin \frac{1}{x}$

Si noti che, pur essendo la funzione continua in $x = 0$, non esiste la tangente al grafico nell'origine. Al contrario degli esempi precedenti, non esistono neppure tangente destra e sinistra, dal momento che anche i limiti da destra e da sinistra

$$\lim_{h \rightarrow 0^+} \sin \frac{1}{h} \quad \text{e} \quad \lim_{h \rightarrow 0^-} \sin \frac{1}{h}$$

sono indeterminati.

In sintesi. Data una funzione $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ e un punto $x_0 \in (a, b)$, il quadro è il seguente:

$$\begin{array}{ll} f \text{ derivabile in } x_0 & \Rightarrow f \text{ continua in } x_0 \\ f \text{ continua in } x_0 & \not\Rightarrow f \text{ derivabile in } x_0 \end{array}$$

► I punti in cui f è continua ma non derivabile possono essere:

- ◊ punti angolosi (esempio 14);
- ◊ punti di tangente verticale (esempio 15);
- ◊ punti di cuspidi (esempio 16);
- ◊ punti dove non esiste, né vale $\pm\infty$, una o entrambe tra derivata destra e sinistra (esempio 17).

Osservazione 18. Nella tipologia di punto angoloso, includiamo anche quei punti dove esistano derivata destra e sinistra della funzione, di cui una finita e l'altra infinita:

$$f'_+(x_0) = \pm\infty \quad \text{e} \quad f'_-(x_0) = L \in \mathbb{R},$$

oppure

$$f'_-(x_0) = \pm\infty \quad \text{e} \quad f'_+(x_0) = L \in \mathbb{R}.$$

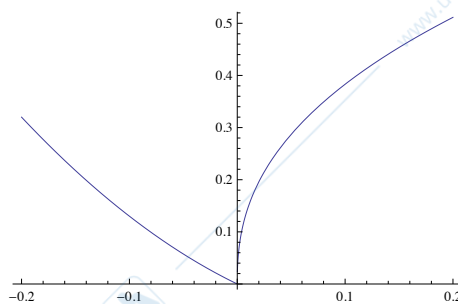


fig.8 Punto angoloso con tangente destra verticale

6. Calcolo di derivate

Nel caso in cui la funzione sia somma, prodotto, quoziente o composta di funzioni elementari, esistono regole che permettono di calcolarne la derivata senza dover svolgere direttamente il limite del rapporto incrementale.

Teorema 19 (Operazioni con le derivate). *Siano f e g derivabili in x_0 . Allora valgono i seguenti fatti.*

(i) *La somma $f + g$ è derivabile in x_0 e*

$$(f + g)'(x_0) = f'(x_0) + g'(x_0).$$

(ii) *Il prodotto fg è derivabile in x_0 e*

$$(fg)'(x_0) = f'(x_0)g(x_0) + f(x_0)g'(x_0).$$

(iii) *Se $g(x_0) \neq 0$, il quoziente f/g è derivabile in x_0 e*

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x_0) = \frac{f'(x_0)g(x_0) - f(x_0)g'(x_0)}{[g(x_0)]^2}.$$

Dimostrazione. La (i) segue direttamente dal fatto che il rapporto incrementale della somma è la somma dei rapporti incrementali. Per quanto riguarda la (ii), scriviamo

$$\begin{aligned} \mathcal{R}(fg, x_0, h) &= \frac{f(x_0 + h)g(x_0 + h) - f(x_0)g(x_0)}{h} \\ &= \frac{f(x_0 + h)g(x_0 + h) - f(x_0)g(x_0 + h) + f(x_0)g(x_0 + h) - f(x_0)g(x_0)}{h} \\ &= \mathcal{R}(f, x_0, h)g(x_0 + h) + f(x_0)\mathcal{R}(g, x_0, h). \end{aligned}$$

Facendo il limite per $h \rightarrow 0$, e ricordando che g è continua in x_0 in quanto derivabile, otteniamo la formula desiderata. Venendo alla (iii), con conti analoghi si ottiene

$$\mathcal{R}(f/g, x_0, h) = \frac{\mathcal{R}(f, x_0, h)g(x_0) - f(x_0)\mathcal{R}(g, x_0, h)}{g(x_0 + h)g(x_0)}.$$

Come prima, il risultato segue dal limite per $h \rightarrow 0$, sfruttando il fatto che g è continua in x_0 . \square

$$\begin{aligned} & \frac{\frac{f(x_0+h)}{g(x_0+h)} - \frac{f(x_0)}{g(x_0)}}{h} = \frac{g(x_0) \frac{f(x_0+h)}{g(x_0+h)} - f(x_0) \frac{g(x_0)}{g(x_0+h)}}{h g(x_0+h) g(x_0)} \\ & = \frac{g(x_0) \frac{f(x_0+h)g(x_0) - f(x_0)g(x_0+h)}{g(x_0+h)} - f(x_0)g(x_0)}{h g(x_0+h) g(x_0)} \end{aligned}$$

Come casi particolari di (ii) e (iii), ponendo una volta $f = c$ (costante) e l'altra $f = 1$, otteniamo le formule

$$(cg)'(x_0) = cg'(x_0) \quad \text{e} \quad \left(\frac{1}{g}\right)'(x_0) = \frac{-g'(x_0)}{[g(x_0)]^2}.$$

Teorema 20 (Derivata della composta). *Sia f derivabile in x_0 , e sia g derivabile in $y_0 = f(x_0)$ (implicitamente stiamo dicendo che f e g sono definite in un intorno dei punti x_0 e y_0 rispettivamente). Allora la funzione composta $\eta = g \circ f$ è derivabile in x_0 e vale la formula*

$$\eta'(x_0) = g'(y_0)f'(x_0).$$

Dimostrazione. Utilizzando la nozione di differenziabilità per la f e per la g , con incrementi h e k rispettivamente, abbiamo che

$$\begin{aligned} f(x_0 + h) &= f(x_0) + f'(x_0)h + h\omega_f(h), \\ g(y_0 + k) &= g(y_0) + g'(y_0)k + k\omega_g(k), \end{aligned}$$

con ω_f, ω_g tendenti a zero quando i rispettivi argomenti tendono a zero. Pertanto,

$$\eta(x_0 + h) = g(y_0 + f'(x_0)h + h\omega_f(h)) = \eta(x_0) + g'(y_0)f'(x_0)h + h\omega(h),$$

con

$$\omega(h) = g'(y_0)\omega_f(h) + (f'(x_0) + \omega_f(h))\omega_g(f'(x_0)h + h\omega_f(h)).$$

La tesi segue notando che $\omega(h) \rightarrow 0$ quando $h \rightarrow 0$. \square

Teorema 21 (Derivata della funzione inversa). *Sia $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione continua e strettamente monotona. Se f è derivabile in $x_0 \in (a, b)$ e $f'(x_0) \neq 0$, allora la sua inversa f^{-1} è derivabile nel punto $y_0 = f(x_0)$ e vale la formula*

$$(f^{-1})'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)}.$$

Dimostrazione. Il rapporto incrementale di f^{-1} in y_0 di incremento k vale

$$\mathcal{R}(f^{-1}, y_0, k) = \frac{f^{-1}(y_0 + k) - f^{-1}(y_0)}{k}.$$

Chiamando

$$h = f^{-1}(y_0 + k) - f^{-1}(y_0),$$

otteniamo

$$f^{-1}(y_0 + k) = x_0 + h \quad \Rightarrow \quad k = f(x_0 + h) - f(x_0).$$

Pertanto

$$\mathcal{R}(f^{-1}, y_0, k) = \frac{1}{\mathcal{R}(f, x_0, h)}.$$

A questo punto basta notare che quando $k \rightarrow 0$ anche $h \rightarrow 0$, questo perché f^{-1} è continua in y_0 (ricordiamo che l'inversa di una continua monotona è continua). \square

Concludiamo con la tabella delle derivate delle funzioni elementari più note (qui $\alpha \in \mathbb{R}$).

$f(x)$	$f'(x)$
x^α	$\alpha x^{\alpha-1}$
e^x	e^x
$\log x$	$\frac{1}{x}$
$\sin x$	$\cos x$
$\cos x$	$-\sin x$
$\tan x$	$\frac{1}{\cos^2 x}$
$\cot x$	$-\frac{1}{\sin^2 x}$
$\arctan x$	$\frac{1}{1+x^2}$
$\arcsin x$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$\arccos x$	$-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$\sinh x$	$\cosh x$
$\cosh x$	$\sinh x$
$\tanh x$	$\frac{1}{\cosh^2 x}$

Le derivate di cui sopra, valide per tutti i valori di x per i quali $f'(x)$ sia definita, si ottengono direttamente facendo il limite del rapporto incrementale, oppure applicando il teorema 19 (ad esempio per la derivata di $\tan x$), o il teorema 21 (ad esempio per la derivata di $\arctan x$).

Utilizzando la derivata del logaritmo e il teorema 20, ricaviamo infine la formula

$$D[f(x)^{g(x)}] = D[e^{g(x) \log f(x)}] = f(x)^{g(x)} \left(g'(x) \log f(x) + \frac{g(x) f'(x)}{f(x)} \right).$$

7. Punti di flesso

Sia f derivabile in x_0 , e sia r_0 la tangente in $P_0 = (x_0, f(x_0))$ data dalla (2).

Definizione 22. Il punto x_0 è detto *punto di flesso* se esiste $\varepsilon > 0$ per cui la differenza tra la funzione e la retta tangente

$$f(x) - r_0(x)$$

è rispettivamente non negativa e non positiva (o viceversa) nei due intervalli

$$(x_0 - \varepsilon, x_0) \quad \text{e} \quad (x_0, x_0 + \varepsilon).$$

Il punto P_0 è detto a sua volta *flesso*. In tal caso, la retta r_0 viene chiamata *tangente di flesso*.

Informalmente, si usa dire che un flesso è un punto dove la funzione “buca” la tangente. Per estensione, la tangente verticale può essere vista anch’essa come tangente di flesso.

Esempio 23. La funzione $f(x) = \frac{x}{1+x^2}$ possiede tre punti di flesso: $x = 0$ e $x = \pm\sqrt{3}$.

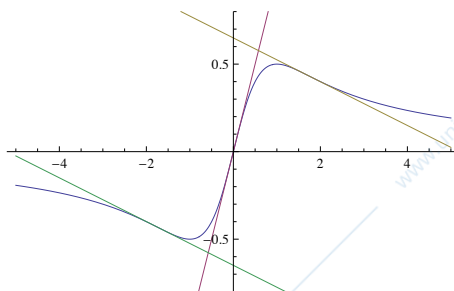


fig. 9 Le tre tangenti di flesso di $\frac{x}{1+x^2}$

Nell’esempio, la f esibisce un cambio di concavità in corrispondenza di ogni flesso (si veda la successiva osservazione 50).

Possono però esistere funzioni che attraversano la tangente di flesso con un andamento altamente oscillante, come ci mostra il grafico in fig. 10.

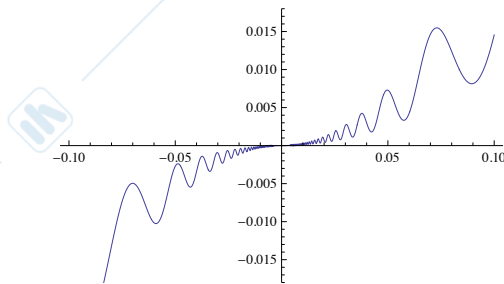


fig. 10 Infinite oscillazioni attorno a un punto di flesso a tangente orizzontale

Interessante è infine il caso di una funzione monotona, anche in senso stretto, che cambia concavità infinite volte in prossimità di un punto di flesso a tangente orizzontale. ^[N5]

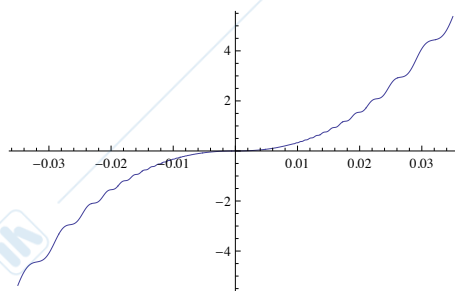


fig. 11 Funzione crescente con flesso orizzontale a infiniti cambi di concavità

8. Estremi locali

Sia f una funzione a valori reali di dominio $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}$.

Definizione 24. Un punto $x_0 \in \mathcal{D}$ è un *punto di massimo locale* se esiste un intervallo aperto $\mathcal{U} \ni x_0$, detto *intorno* di x_0 , per cui

$$f(x) \leq f(x_0), \quad \forall x \in \mathcal{U} \cap \mathcal{D}. \quad (4)$$

Il corrispondente valore $f(x_0)$ viene chiamato *massimo locale*. Se invece

$$f(x) \geq f(x_0), \quad \forall x \in \mathcal{U} \cap \mathcal{D}, \quad (5)$$

allora x_0 è un *punto di minimo locale* e $f(x_0)$ un *minimo locale*.

Se nella (4) e nella (5) vale la disuguaglianza stretta per $x \neq x_0$, parliamo di *massimo forte* e *minimo forte*. Per *estremo locale* di una funzione si intende un massimo o un minimo locale della funzione stessa; i punti di massimo e minimo locale vengono talvolta chiamati *estremanti locali*.

Esempio 25. La funzione $f(x) = x^3 - 3x$ possiede un massimo locale in corrispondenza del punto $x = -1$ e un minimo locale in $x = 1$.

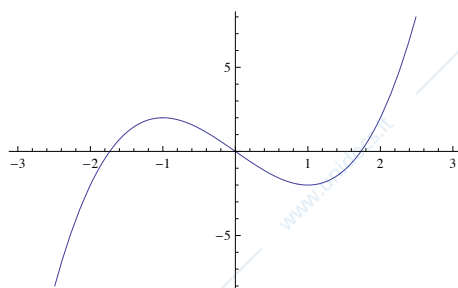


fig. 12 Grafico di $x^3 - 3x$

Non si pensi tuttavia che, in prossimità di un estremante locale, una data funzione (anche derivabile) abbia sempre un comportamento semplice. Ad esempio, non necessariamente una funzione decresce a sinistra di un punto di minimo per poi crescere alla sua destra. Vi possono essere situazioni molto più complicate, come mostra la figura seguente.

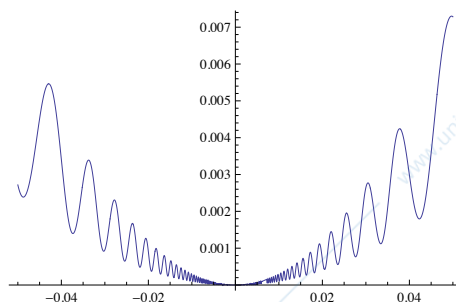


fig. 13 Minimo locale in $x = 0$

Quando una funzione è derivabile in corrispondenza di un estremante locale (e pertanto definita in un suo intorno), l'intuizione geometrica suggerisce che la relativa retta tangente sia orizzontale. Questo è in effetti ciò che afferma il *teorema di Fermat*.

Teorema 26 (Fermat). Sia $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$, e sia $x_0 \in (a, b)$ un estremo locale. Se f è derivabile in x_0 , allora $f'(x_0) = 0$.

Dimostrazione. Se x_0 è un punto di massimo locale, usando la (4) si ha che

$$\begin{cases} \mathcal{R}(f, x_0, h) \leq 0 & \text{se } h > 0 \\ \mathcal{R}(f, x_0, h) \geq 0 & \text{se } h < 0. \end{cases}$$

$f(x) \leq f(x_0)$
 \Downarrow
 $\frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}$
 perché questa vale $\forall \epsilon > 0 \exists \delta > 0$
 $(x_0 - \delta, x_0) \cup (x_0, x_0 + \delta) = h$

Dal teorema della permanenza del segno seguono le due disuguaglianze

$$0 \leq \lim_{h \rightarrow 0^-} \mathcal{R}(f, x_0, h) = f'(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0^+} \mathcal{R}(f, x_0, h) \leq 0.$$

La dimostrazione è del tutto analoga per un punto di minimo locale. \square

Definizione 27. Un valore x_0 che annulla la derivata viene chiamato *punto stazionario*.

Il teorema di Fermat stabilisce che, dove f è derivabile, gli eventuali estremanti locali vanno ricercati tra i punti stazionari. Operativamente, significa trovare le soluzioni dell'equazione

$$f'(x) = 0.$$

Viceversa, non sempre i punti stazionari sono estremanti locali. Ad esempio, potrebbero essere punti di flesso a tangente orizzontale, come nel caso della funzione $f(x) = x^3$ in $x = 0$.

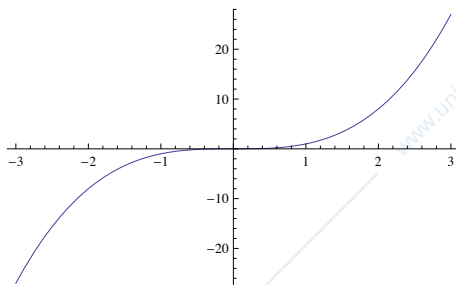


fig. 14 Grafico di x^3

Osservazione 28. È bene sottolineare che possono esistere punti stazionari che non sono estremanti locali e neppure punti di flesso a tangente orizzontale, come si evince piuttosto chiaramente dal grafico in fig. 1.

9. La funzione derivata

Sia $f : \mathcal{I} \rightarrow \mathbb{R}$, dove \mathcal{I} è un intervallo reale eventualmente non limitato. Qualora f sia derivabile in almeno un punto di \mathcal{I} , possiamo costruire la *funzione derivata* f' di dominio

$$\mathcal{D}' = \{x \in \mathcal{I} : f \text{ è derivabile in } x\},$$

che associa ad ogni $x \in \mathcal{D}'$ il valore $f'(x)$, ovvero

$$x \in \mathcal{D}' \mapsto f'(x).$$

Osservazione 29. Se \mathcal{I} è un intervallo chiuso (oppure chiuso a destra o chiuso a sinistra), per derivabilità negli estremi si intende derivabilità destra nell'estremo inferiore e derivabilità sinistra nell'estremo superiore.

È possibile che l'insieme \mathcal{D}' sia vuoto e che pertanto la f' non sia definita, anche se la f è continua.^[N6] Ci vogliamo invece soffermare sulla situazione opposta, quando il dominio \mathcal{D}' di f' coincide con l'intero intervallo \mathcal{I} .

Definizione 30. La f è detta *di classe* \mathcal{C}^1 su \mathcal{I} se la sua derivata f' è una funzione continua su \mathcal{I} .

L'insieme delle funzioni di classe \mathcal{C}^1 su \mathcal{I} viene indicato con $\mathcal{C}^1(\mathcal{I})$, mentre $\mathcal{C}(\mathcal{I})$ è l'insieme delle funzioni continue su \mathcal{I} . Si noti che entrambi sono spazi lineari. Dal teorema 13 e successivi esempi si deduce l'inclusione insiemistica stretta

$$\mathcal{C}^1(\mathcal{I}) \subsetneq \mathcal{C}(\mathcal{I}).$$

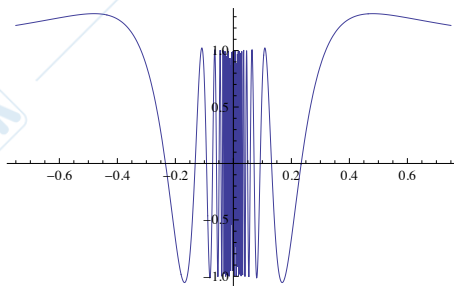
L'uguaglianza $\mathcal{D}' = \mathcal{I}$ non implica che $f \in \mathcal{C}^1(\mathcal{I})$. La funzione derivata può infatti avere punti di discontinuità.

Esempio 31. La derivata

$$\varphi'(x) = \begin{cases} 2x \sin \frac{1}{x} - \cos \frac{1}{x} & \text{se } x \neq 0 \\ 0 & \text{se } x = 0 \end{cases}$$

della funzione φ nell'esempio 3, benché definita su tutto \mathbb{R} , presenta in zero una discontinuità di seconda specie, essendo indeterminato il limite

$$\lim_{x \rightarrow 0} [2x \sin \frac{1}{x} - \cos \frac{1}{x}].$$

fig. 15 Grafico di $2x \sin \frac{1}{x} - \cos \frac{1}{x}$

Tuttavia, alla maniera delle funzioni continue, una funzione derivata soddisfa la *proprietà di Darboux*, altresì detta *dei valori intermedi*.

Teorema 32. Sia $\mathfrak{D}' = \mathfrak{I}$. Per ogni coppia di punti $a < b$ dell'intervallo \mathfrak{I} , la funzione f' assume nell'intervallo aperto (a, b) tutti i valori strettamente compresi tra $f'(a)$ e $f'(b)$.

Dimostrazione. Se $f'(a) = f'(b)$ non c'è nulla da dimostrare. Sia dunque $f'(a) < f'(b)$ (viceversa, si consideri $-f'$). Preso un qualsiasi valore λ tale che

$$f'(a) < \lambda < f'(b),$$

definiamo sull'intervallo $[a, b]$ la funzione

$$g(x) = f(x) - \lambda x,$$

la cui derivata vale

$$g'(x) = f'(x) - \lambda, \quad \forall x \in [a, b].$$

In particolare, g è continua su $[a, b]$, e in virtù del teorema di Weierstrass ammette minimo assoluto. D'altro canto, essendo

$$g'(a) = f'(a) - \lambda < 0 \quad \text{e} \quad g'(b) = f'(b) - \lambda > 0,$$

il minimo è necessariamente assunto in un punto c interno all'intervallo (a, b) . Per tale c , il teorema di Fermat ci assicura che

$$g'(c) = f'(c) - \lambda = 0.$$

Abbiamo quindi trovato $c \in (a, b)$ che soddisfa l'equazione $f'(c) = \lambda$. \square

Corollario 33. Se $\mathcal{D}' = \mathcal{I}$, la funzione f' può avere solo discontinuità di seconda specie.

Dimostrazione. Sia i salti che le discontinuità eliminabili sono incompatibili con la proprietà di Darboux. \square

È allora naturale chiedersi quanto possa essere discontinua una funzione derivata ovunque definita. Ad esempio: può una tale f' essere discontinua in ogni punto? La risposta è contenuta nel seguente teorema.

Teorema 34. Se $\mathcal{D}' = \mathcal{I}$, la f' è continua su un insieme di cardinalità non numerabile denso in \mathcal{I} .

Il teorema 34, non dimostrabile con tecniche elementari, discende da un noto risultato dell'Analisi Funzionale: il *teorema di Baire delle categorie*.

10. Il teorema di Lagrange

Il risultato forse più importante (e senz'altro il più noto) in tema di derivate è il *teorema di Lagrange*, che permette di stabilire una relazione tra il segno della derivata e la crescita o la decrescenza di una funzione.

Nel seguito, consideriamo una funzione f a valori reali definita in ogni punto di un intervallo chiuso $[a, b]$.

Teorema 35 (Lagrange). Sia f continua su $[a, b]$ e derivabile in (a, b) . Allora esiste un punto $x_0 \in (a, b)$ tale che

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(x_0). \quad (6)$$

Premettiamo alla dimostrazione alcune considerazioni.

► Indebolendo le ipotesi, la tesi potrebbe risultare falsa. Due esempi sono dati dalle funzioni

$$f_1(x) = \begin{cases} 1 + x & \text{se } x < 1 \\ 0 & \text{se } x = 1 \end{cases} \quad \text{e} \quad f_2(x) = |x|$$

definite sull'intervallo chiuso $[-1, 1]$. La f_1 ha un salto in $x = 1$, mentre la f_2 non è derivabile in $x = 0$, dove presenta un punto angoloso. In entrambi i casi la (6) non è verificata.

► Il teorema ha una chiara interpretazione geometrica: esiste un punto x_0 interno all'intervallo per cui la tangente in $(x_0, f(x_0))$ è parallela alla retta passante per i punti $(a, f(a))$ e $(b, f(b))$.

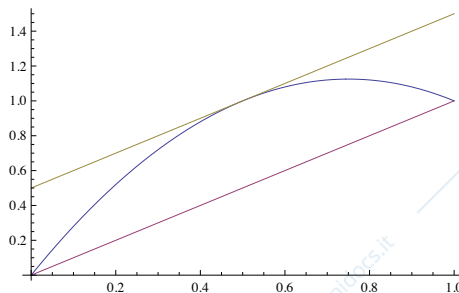


fig. 16 Visualizzazione grafica della formula (6)

► Nell'ipotesi aggiuntiva

$$f(a) = f(b),$$

il risultato è noto come *teorema di Rolle*. Assumendo vero quest'ultimo, il teorema di Lagrange si dimostra in modo pressoché immediato: la funzione ausiliaria

$$g(x) = f(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a)$$

soddisfa infatti le ipotesi del teorema di Rolle nell'intervallo $[a, b]$, e pertanto esiste $x_0 \in (a, b)$ tale che

$$f'(x_0) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a} = g'(x_0) = 0.$$

Dimostrazione del teorema 35. Per quanto detto sopra, possiamo supporre $f(a) = f(b)$. La tesi si ottiene mostrando l'esistenza di un estremante locale $x_0 \in (a, b)$. In tal caso, il teorema di Fermat ci assicura che

$$f'(x_0) = 0.$$

Invero, dal teorema di Weierstrass, la funzione continua f ha massimo e minimo assoluto in $[a, b]$. Se f è costante, ogni punto di (a, b) è estremante locale. Se non è costante, almeno uno dei suoi estremanti locali non può giacere agli estremi dell'intervallo, e deve quindi appartenere ad (a, b) . \square

Il teorema di Lagrange fornisce una condizione sufficiente per la derivabilità di una funzione in un punto.

Proposizione 36. Sia $x_0 \in (a, b)$, e sia f derivabile in $(a, b) \setminus \{x_0\}$ e continua in x_0 . Se esiste finito il limite

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f'(x) = L,$$

allora f è derivabile anche nel punto x_0 e $f'(x_0) = L$ (da cui segue che f' è continua in x_0).

Dimostrazione. Per $h > 0$ sufficientemente piccolo, il teorema di Lagrange nell'intervallo $[x_0, x_0 + h]$ implica la relazione

$$\mathcal{R}(f, x_0, h) = \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = f'(x_h),$$

per un certo $x_h \in (x_0, x_0 + h)$. Poiché x_h tende a x_0 al tendere di h a zero,

$$f'_+(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0^+} \mathcal{R}(f, x_0, h) = \lim_{h \rightarrow 0^+} f'(x_h) = L.$$

Allo stesso modo, si ottiene l'uguaglianza $f'_-(x_0) = L$. \square

Che la condizione espressa dalla proposizione sia solo sufficiente è evidente, dato che una funzione derivabile in un punto non ha necessariamente derivata continua nel punto stesso (esempio 31). Inoltre, la tesi può essere falsa se si omette nelle ipotesi la continuità in x_0 . La cosiddetta *funzione di Heaviside*

$$H(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x < 0 \\ 1 & \text{se } x \geq 0 \end{cases}$$

ne è un esempio per $x_0 = 0$.

11. Derivabilità e monotonia

Come accennato, la crescita o la decrescita di una funzione derivabile è determinata dal segno della derivata.

Teorema 37. Sia f continua su $[a, b]$ e derivabile in (a, b) . Allora

$$f \text{ è crescente in } [a, b] \iff f'(x) \geq 0, \forall x \in (a, b).$$

Dimostrazione. Verifichiamo separatamente le due implicazioni.

[\Rightarrow] Se f è crescente, il rapporto incrementale in ogni punto è non negativo, e quindi in ogni punto la derivata è non negativa, grazie al teorema della permanenza del segno.

[\Leftarrow] Sia $f' \geq 0$ in (a, b) . Presa una qualsiasi coppia di punti

$$a \leq c < d \leq b,$$

applichiamo il teorema di Lagrange nell'intervallo $[c, d]$. Esiste allora un valore $x_0 \in (c, d)$ tale che

$$f(d) - f(c) = f'(x_0)(d - c).$$

Ma $f'(x_0) \geq 0$, da cui $f(c) \leq f(d)$. \square

Osservazione 38. Siccome f è decrescente se e solo se $-f$ è crescente, una formulazione equivalente della tesi è

$$f \text{ è decrescente in } [a, b] \Leftrightarrow f'(x) \leq 0, \forall x \in (a, b).$$

Dal fatto ovvio che una funzione contemporaneamente crescente e decrescente è costante, segue un corollario immediato.

Corollario 39. *Sia f continua su $[a, b]$ e derivabile in (a, b) . Allora*

$$f \text{ è costante in } [a, b] \Leftrightarrow f'(x) = 0, \forall x \in (a, b).$$

Osservazione 40. In particolare, due funzioni con derivata uguale in un intervallo differiscono di una costante nell'intervallo stesso.

Nel caso in cui f' sia strettamente positiva, ripercorrendo la dimostrazione del teorema 35 deduciamo un risultato più forte.

Corollario 41. *Sia f continua su $[a, b]$ e derivabile in (a, b) . Se $f'(x) > 0$ per ogni $x \in (a, b)$, allora f è strettamente crescente in $[a, b]$. Analogamente, f è strettamente decrescente se $f'(x) < 0$.*

L'implicazione opposta è falsa: esistono funzioni derivabili e strettamente monotone con derivata nulla in uno o più punti, come $f(x) = x^3$, la cui derivata $f'(x) = 3x^2$ si annulla in zero (fig. 14).

Osservazione 42. Il teorema 37 si rivela uno strumento molto efficace nell'analisi dell'andamento di una funzione reale, qualora questa non esibisca un comportamento troppo irregolare. Supponiamo infatti che, dallo studio della disequazione

$$f'(x) \geq 0,$$

si deducano due informazioni.

- ▶ Esiste un punto stazionario x_0 .
- ▶ Esiste un intorno \mathcal{U} di x_0 dove si verifica uno tra i seguenti casi:

- (i) $f'(x) \geq 0, \quad \forall x \in \mathcal{U};$
- (ii) $f'(x) \leq 0, \quad \forall x \in \mathcal{U};$
- (iii) $f'(x)(x - x_0) \geq 0, \quad \forall x \in \mathcal{U};$
- (iv) $f'(x)(x - x_0) \leq 0, \quad \forall x \in \mathcal{U}.$

In (i) e in (ii) la funzione è monotona attorno a x_0 , una volta crescente e l'altra decrescente. Si ha dunque un flesso a tangente orizzontale. In (iii) la funzione decresce a sinistra di x_0 per poi crescere alla sua destra: siamo in presenza di un minimo locale. Discorso opposto in (iv), dove si ha un massimo locale.

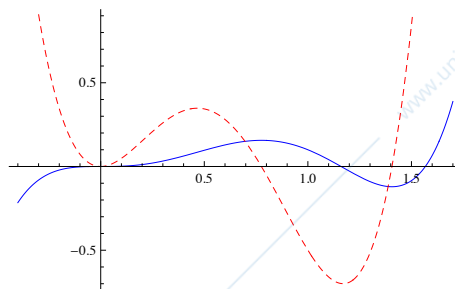


fig. 17 Grafico di una funzione: la corrispondente derivata è tratteggiata

Tuttavia, vi possono essere estremanti locali (come in fig. 13) o punti di flesso a tangente orizzontale (come in fig. 10) che non rientrano in questa casistica.

12. Derivate successive

Sia f definita in un intervallo \mathcal{I} . Se la corrispondente f' esiste ed è a sua volta derivabile, la derivata di f' nel punto $x_0 \in \mathcal{I}$ è detta *derivata seconda* di f in x_0 , indicata indifferentemente con i simboli

$$f''(x_0), \quad \frac{d^2f}{dx^2}(x_0), \quad D^2f(x_0).$$

Iterando il ragionamento n -volte, si ottengono le funzioni

$$f, f', f'', f''', f^{(4)}, \dots, f^{(n)}$$

ciascuna delle quali derivata della funzione precedente.

Osservazione 43. Affinché $f^{(n)}(x_0)$ possa esistere, la funzione $f^{(n-1)}$ deve essere definita in un intorno \mathcal{U} di x_0 (o $\mathcal{U} \cap \mathcal{I}$ qualora x_0 sia un estremo dell'intervallo), da cui $f^{(n-2)} \in \mathcal{C}(\mathcal{U})$, in accordo col teorema 13.

Estendendo la definizione 30 per un generico $n \in \mathbb{N}$, introduciamo gli spazi lineari

$$\mathcal{C}^n(\mathcal{I}) = \{f : f^{(n)} \in \mathcal{C}(\mathcal{I})\},$$

così ordinati rispetto alla relazione di inclusione:

$$\mathcal{C}^n(\mathcal{I}) \subsetneq \mathcal{C}^{n-1}(\mathcal{I}) \subsetneq \dots \subsetneq \mathcal{C}^1(\mathcal{I}) \subsetneq \mathcal{C}(\mathcal{I}).$$

Definiamo inoltre lo spazio $\mathcal{C}^\infty(\mathcal{I})$ delle funzioni infinitamente derivabili in \mathcal{I} , appartenenti cioè a $\mathcal{C}^n(\mathcal{I})$ per ogni $n \in \mathbb{N}$.

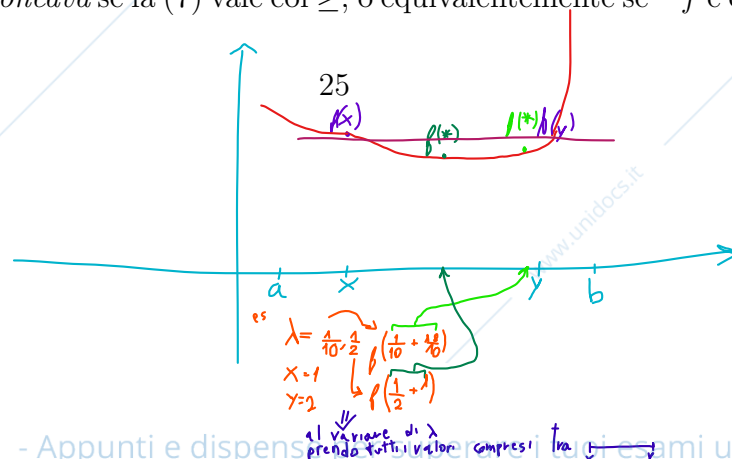
13. Derivata seconda e convessità

Come il segno della derivata determina la crescita o la decrescenza, in maniera analoga il segno della derivata seconda determina la convessità o la concavità di una funzione. Richiamiamo innanzitutto la definizione.

Definizione 44. Una funzione $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ è detta *convessa* se per ogni $x, y \in [a, b]$ e per ogni $0 < \lambda < 1$ vale la disuguaglianza

$$f(\lambda x + (1 - \lambda)y) \leq \lambda f(x) + (1 - \lambda)f(y). \quad (7)$$

La f è detta *concava* se la (7) vale col \geq , o equivalentemente se $-f$ è convessa.



Osservazione 45. Il significato geometrico della definizione è il seguente: f è convessa se per ogni intervallo chiuso $[c, d]$ contenuto in $[a, b]$ si ha

$$f(x) \leq r_{c,d}(x), \quad \forall x \in [c, d],$$

dove $r_{c,d}$ è la retta passante per i punti $(c, f(c))$ e $(d, f(d))$.

Osservazione 46. Dalla definizione, è possibile dedurre che una funzione convessa [concava] in $[a, b]$ è continua in (a, b) . Potrebbe tuttavia non essere continua negli estremi dell'intervallo, come ad esempio la funzione

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{se } x \neq 0 \\ 2 & \text{se } x = 0 \end{cases}$$

che è chiaramente convessa nell'intervallo $[0, 1]$ ma non continua in zero.

Definizione 47. Una funzione f definita su un generico intervallo \mathcal{I} è detta convessa se lo è in ogni intervallo chiuso $[a, b] \subset \mathcal{I}$.

Teorema 48. Sia f convessa in $[a, b]$. Se f è derivabile in $x_0 \in [a, b]$, allora f giace sopra la tangente in x_0 , vale a dire

$$f(x) \geq f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) \quad (8)$$

per ogni $x \in [a, b]$. Al solito, se $x_0 = a$ [o $x_0 = b$] per derivabilità/tangente in x_0 si intende derivabilità/tangente destra [o sinistra].

Dimostrazione. Supponiamo $x_0 \in [a, b)$, e mostriamo che la (8) vale per ogni $x > x_0$ (l'altro caso è analogo). Per ogni $h > 0$ sufficientemente piccolo, consideriamo i tre punti $x_0 < x_0 + h < x$. Scegliendo opportunamente $\lambda \in (0, 1)$, possiamo scrivere

$$x_0 + h = \lambda x_0 + (1 - \lambda)x.$$

Ciò è vero prendendo

$$\lambda = \frac{x - x_0 - h}{x - x_0}.$$

Applicando allora la (7), perveniamo alla disuguaglianza

$$f(x_0 + h) \leq \lambda f(x_0) + (1 - \lambda)f(x),$$

da cui

$$f(x_0 + h) - f(x_0) \leq (1 - \lambda)(f(x) - f(x_0)).$$

Sostituendo il valore di λ , otteniamo

$$\mathcal{R}(f, x_0, h) \leq \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.$$

Facendo il limite per $h \rightarrow 0^+$, e invocando il teorema della permanenza del segno, concludiamo che

$$f'(x_0) \leq \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0},$$

che è ciò che si voleva provare. \square

Definizione 49. Chiamiamo $x_0 \in (a, b)$ un *punto di cambio di concavità* se f è convessa [concava] in $[a, x_0]$ e concava [convessa] in $[x_0, b]$.

Osservazione 50. Dal teorema 48 deduciamo immediatamente che un punto di cambio di concavità in cui la funzione sia derivabile risulta essere un (particolare) punto di flesso.

Se la funzione è derivabile in ogni punto di $[a, b]$, vale anche l'implicazione opposta del teorema 48.

Teorema 51. *Sia f derivabile in $[a, b]$. Se per ogni $x_0 \in [a, b]$ la f giace sopra la tangente in x_0 , allora f è convessa.*

Dimostrazione. Siano $x, y \in [a, b]$, e sia $\lambda \in (0, 1)$. Ponendo

$$x_0 = \lambda x + (1 - \lambda)y,$$

e notando che x_0 è compreso tra x e y e dunque appartiene ad $[a, b]$, abbiamo le due disuguaglianze

$$f(x) \geq f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0),$$

$$f(y) \geq f(x_0) + f'(x_0)(y - x_0).$$

Moltiplicando la prima per λ e la seconda per $(1 - \lambda)$, e sommando le due espressioni, otteniamo

$$\lambda f(x) + (1 - \lambda)f(y) \geq f(x_0) = f(\lambda x + (1 - \lambda)y),$$

che altro non è che la (7). \square

Osservazione 52. Alla luce dei teoremi 48 e 51, quando f è derivabile in $[a, b]$ possiamo dunque assumere come *definizione* di convessità la seguente: f è detta convessa in $[a, b]$ se giace sopra la retta tangente nel punto x_0 per ogni $x_0 \in [a, b]$.

Veniamo ora alla relazione tra la convessità e la crescita della derivata.

Teorema 53. *Sia f derivabile in $[a, b]$. Allora*

$$f \text{ è convessa in } [a, b] \Leftrightarrow f' \text{ è crescente in } [a, b].$$

Dimostrazione. Verifichiamo le due implicazioni.

[\Rightarrow] Sia $x < y$. Dalla (8), poiché $x < y$, abbiamo che

$$\begin{aligned} f'(x)(y-x) &\leq f(y) - f(x) &\Rightarrow f'(x) &\leq \frac{f(y) - f(x)}{y-x}, \\ f'(y)(x-y) &\leq f(x) - f(y) &\Rightarrow f'(y) &\geq \frac{f(y) - f(x)}{y-x}, \end{aligned}$$

da cui segue immediatamente che $f'(x) \leq f'(y)$.

[\Leftarrow] Mostriamo che vale la (8). Sia $x_0 \in [a, b]$, e sia $x > x_0$. Applicando il teorema di Lagrange nell'intervallo $[x_0, x]$, otteniamo

$$f(x) - f(x_0) = f'(y)(x - x_0)$$

per un certo $y \in (x_0, x)$. Ma poiché f' è crescente, e $y > x_0$, ne segue che

$$f(x) - f(x_0) \geq f'(x_0)(x - x_0),$$

che altro non è che la (8) per $x > x_0$. Se $x_0 \in (a, b]$ e $x < x_0$ la dimostrazione è analoga. \square

Corollario 54. *Sia f due volte derivabile in x_0 , punto di cambio di concavità. Allora*

$$f''(x_0) = 0.$$

Dimostrazione. In virtù del teorema 53, la f' (definita in un intorno di x_0) ha un estremo locale in x_0 . La tesi segue dal teorema di Fermat. \square

Unendo i teoremi 37 e 53, perveniamo al preannunciato legame tra derivata seconda e convessità.

Teorema 55. Sia f derivabile in $[a, b]$ e due volte derivabile in (a, b) . Allora

$$f \text{ è convessa in } [a, b] \Leftrightarrow f''(x) \geq 0, \forall x \in (a, b).$$

Osservazione 56. Per applicare il teorema 37 alla f' dovremmo in realtà richiedere f' continua in $[a, b]$. Tuttavia, la continuità in (a, b) discende dalla derivabilità di f' in (a, b) . Inoltre, valendo il teorema 55 in qualsiasi intervallo $[c, d]$ con $a < c < d < b$, deduciamo immediatamente che la f' è crescente in (a, b) . Dunque ammette limite negli estremi a e b . La continuità in tali punti è allora garantita dal fatto che la f' soddisfa la proprietà di Darboux in $[a, b]$ (e dunque non può avere salti, che sono le uniche discontinuità possibili per le funzioni monotone).

► Se f è due volte derivabile in un intervallo (a, b) , gli eventuali punti di cambio di concavità vanno dunque ricercati tra le soluzioni dell'equazione

$$f''(x) = 0.$$

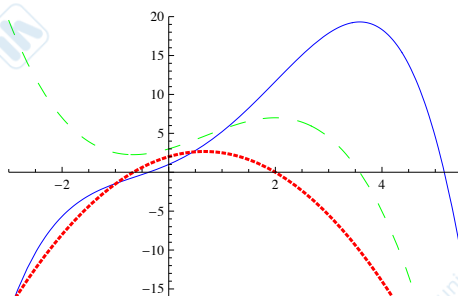


fig. 19 f [linea continua], f' [tratteggiata], f'' [a punti]

Si noti che i due zeri della f'' in fig. 19 corrispondono ai due estremanti locali della f' , nonché punti di cambio di concavità della f .

Osservazione 57. Ma non tutte le soluzioni dell'equazione $f''(x) = 0$ sono necessariamente punti di cambio di concavità.

Esempio 58. La funzione convessa $f(x) = x^4$ possiede la derivata seconda $f''(x) = 12x^2$, che si annulla solo nel punto di minimo locale $x = 0$.

14. Approssimazione polinomiale

Introduciamo l'argomento con un esempio paradigmatico.

Esempio 59. Supponiamo di dover calcolare il limite

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin x}{x^3}.$$

Sapendo che la funzione

$$\beta(x) = x - \sin x$$

soddisfa $\beta(0) = \beta'(0) = 0$, dalla formula (3) deduciamo l'uguaglianza

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin x}{x^3} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\omega(x)}{x^2}.$$

Informazione che, da sola, non ci consente tuttavia di rimuovere la forma indeterminata nel limite.

La situazione descritta ci mostra come non sempre l'approssimazione lineare si riveli uno strumento sufficientemente potente per risolvere un determinato problema, e sia invece talvolta necessario approssimare le funzioni in gioco con un maggior grado di accuratezza. L'idea è allora quella di approssimare una funzione f nei pressi di un punto x_0 non con una retta, ma più in generale con un polinomio. Allo scopo, qualora f sia derivabile n -volte in x_0 , è ragionevole individuare il candidato naturale nel polinomio p_n di grado (al più) n , i cui coefficienti sono univocamente determinati dal sistema di $n + 1$ equazioni

$$p_n^{(k)}(x_0) = f^{(k)}(x_0), \quad k = 0, 1, \dots, n,$$

dove, convenzionalmente, la derivata di ordine zero è la funzione stessa. Si verifica subito che

$$p_n(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k.$$

Definizione 60. Sia f derivabile n -volte in x_0 . Il polinomio p_n di cui sopra è detto *polinomio di Taylor di ordine n* relativo alla f centrato nel punto x_0 .

Osservazione 61. La derivata p_n' di p_n risulta essere il polinomio di Taylor di ordine $n - 1$ relativo alla f' centrato nel punto x_0 .

Il successivo *teorema di Taylor-Peano* dà una stima quantitativa dell'errore commesso quando si approssima una funzione nei pressi di un punto x_0 con il polinomio di Taylor.

Teorema 62 (Taylor-Peano). *Sia f derivabile n -volte in x_0 . Allora*

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - p_n(x)}{(x - x_0)^n} = 0. \quad (9)$$

Premettiamo alla dimostrazione alcune osservazioni.

► Il caso $n = 1$, corrispondente all'approssimazione lineare, ci restituisce la definizione di differenziabilità. Il polinomio p_1 coincide infatti con la retta tangente r_0 di equazione (2).

► Ponendo $x = x_0 + h$, la tesi si può riscrivere nel seguente modo:

$$f(x_0 + h) = f(x_0) + f'(x_0)h + \frac{1}{2}f''(x_0)h^2 + \cdots + \frac{1}{n!}f^{(n)}(x_0)h^n + h^n\omega(h).$$

Il termine $h^n\omega(h)$ è detto *resto di Peano di ordine n* .

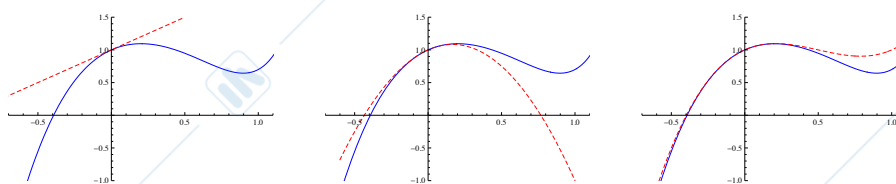


fig. 20 Approssimazione di una funzione in $x_0 = 0$ con p_1 , p_2 e p_3 (tratteggiati)

► Qualora

$$f'(x_0) = \cdots = f^{(n-1)}(x_0) = 0 \quad \text{e} \quad f^{(n)}(x_0) = \alpha \neq 0,$$

si ricava la relazione

$$f(x_0 + h) - f(x_0) = \left[\frac{1}{n!}\alpha + \omega(h) \right] h^n.$$

Come diretta conseguenza si hanno le implicazioni:

- n dispari $\Rightarrow x_0$ punto di flesso a tangente orizzontale;
- n pari con $\alpha > 0$ $\Rightarrow x_0$ punto di minimo locale;
- n pari con $\alpha < 0$ $\Rightarrow x_0$ punto di massimo locale.

► Siamo ora in grado di risolvere il limite dell'esempio (59). Osservando che

$$\beta(0) = \beta'(0) = \beta''(0) = 0 \quad \text{e} \quad \beta'''(0) = 1,$$

il teorema di Taylor-Peano ci dà

$$x - \sin x = \frac{1}{6}x^3 + x^3\omega(x).$$

Pertanto,

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin x}{x^3} = \lim_{x \rightarrow 0} \left[\frac{1}{6} + \omega(x) \right] = \frac{1}{6}.$$

► Il polinomio p_n è univocamente determinato dalla formula (9). Invero, supponiamo esista un polinomio p di grado minore o uguale a n per cui valga

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - p(x)}{(x - x_0)^n} = 0.$$

Sottraendo la (9), concludiamo che

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{p_n(x) - p(x)}{(x - x_0)^n} = 0.$$

Ma l'uguaglianza è possibile solo se il polinomio $p_n - p$ (di grado minore o uguale a n) è identicamente nullo.

► Per $n = 0$, l'esistenza di un polinomio p_0 che soddisfa la (9) è equivalente al fatto che f ammetta limite per $x \rightarrow x_0$. Dunque, a patto di ridefinirla eventualmente nel punto x_0 , la f risulta continua in x_0 . Per $n = 1$ (sempre ridefinendo la f in x_0 per continuità) l'esistenza di un polinomio p_1 che soddisfa la (9) è del tutto equivalente all'esistenza della derivata $f'(x_0)$. Le cose vanno diversamente per $n > 1$. Si consideri ad esempio la funzione

$$f(x) = \begin{cases} x^3 \sin \frac{1}{x} & \text{se } x \neq 0 \\ 0 & \text{se } x = 0 \end{cases}$$

per cui vale banalmente la relazione

$$f(x) = x^2\omega(x).$$

Sebbene il polinomio $p_2(x) = 0$ verifichi la formula (9) per $n = 2$, si ha che $f(0) = f'(0) = 0$ ma non esiste $f''(0)$.

Dimostrazione del teorema 62. Operando un cambio di variabile, possiamo assumere $x_0 = 0$ senza perdita di generalità. La differenza

caso
 $n=2$

$$g(x) = f(x) - p_n(x)$$

soddisfa quindi

$$g(0) = g'(0) = \dots = g^{(n)}(0) = 0.$$

Si fissi x in un intorno di 0 dove tutte le $g^{(k)}$ siano definite per $k < n$. In virtù del teorema di Lagrange, esiste $\tau_1 \in (0, 1)$ tale che

$$g(x) = g'(x\tau_1)x.$$

Da un'ulteriore applicazione del teorema alla g' , esiste $\tau_2 \in (0, \tau_1)$ tale che

$$g(x) = g'(x\tau_1)x = g''(x\tau_2)x^2\tau_1.$$

Iterando il ragionamento, esistono

$$0 < \tau_{n-1} < \dots < \tau_1 < 1$$

tali che

$$g(x) = g^{(n-1)}(x\tau_{n-1})x^{n-1}\tau_1 \dots \tau_{n-2}.$$

Non sapendo se la $g^{(n-1)}$ soddisfi o meno le ipotesi del teorema di Lagrange, utilizziamo infine la definizione di differenziabilità, dalla quale otteniamo

$$g^{(n-1)}(x\tau_{n-1}) = x\tau_{n-1}\omega(x\tau_{n-1}).$$

per una certa funzione ω infinitesima in zero. Sostituendo,

$$g(x) = x^n \tau \omega(x\tau_{n-1}),$$

dove $\tau = \tau_1 \dots \tau_{n-1}$. La tesi segue dal limite

$$\lim_{x \rightarrow 0} \tau \omega(x\tau_{n-1}) = 0.$$

□

15. Il resto di Lagrange

Il teorema di Taylor-Peano descrive il comportamento *locale* di una funzione. Diversamente, le conclusioni del *teorema di Taylor-Lagrange* sono di carattere *globale*. Permettono infatti di approssimare una funzione sufficientemente regolare con il corrispondente polinomio di Taylor in un intervallo fissato.

Dati dunque due punti x_0 e x , assumiamo di avere una funzione f derivabile $(n+1)$ -volte nell'intervallo chiuso di estremi x_0 e x . Considerando il polinomio di Taylor p_n relativo alla f centrato in x_0 , vale il seguente risultato.

Teorema 63 (Taylor-Lagrange). *Esiste un punto z strettamente compreso tra x_0 e x tale che*

$$f(x) = p_n(x) + R_n(x),$$

dove

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(z)}{(n+1)!} (x - x_0)^{n+1}.$$

Il termine $R_n(x)$ viene chiamato *resto di Lagrange di ordine n* .

Dimostrazione. Con un cambio di variabile, e sostituendo eventualmente $f(x)$ con $f(-x)$, possiamo supporre $x > x_0 = 0$. Definendo

$$M = \frac{f(x) - p_n(x)}{x^{n+1}},$$

la tesi consiste nel trovare un punto $z \in (0, x)$ per cui

$$f^{(n+1)}(z) = (n+1)! M.$$

Allo scopo, osserviamo che la funzione della variabile $\xi \in [0, x]$

$$g(\xi) = f(\xi) - p_n(\xi) - M\xi^{n+1}$$

soddisfa la doppia implicazione

$$g^{(n+1)}(\xi) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad f^{(n+1)}(\xi) = (n+1)! M.$$

Inoltre,

$$g(x) = g(0) = g'(0) = \dots = g^{(n)}(0) = 0.$$

Per il teorema di Rolle esiste $z_1 \in (0, x)$ tale che

$$g'(z_1) = 0.$$

Possiamo pertanto riapplicare il teorema alla g' nell'intervallo $[0, z_1]$, trovando $z_2 \in (0, z_1)$ tale che

$$g''(z_2) = 0.$$

Iterando l'argomento, esistono $0 < z_{n+1} < \dots < z_1 < x$ tali che

$$g^{(n+1)}(z_{n+1}) = \dots = g'(z_1) = 0.$$

Scegliendo $z = z_{n+1}$, la dimostrazione è conclusa. \square

Osservazione 64. Il teorema 63 è particolarmente utile in presenza di una stima di limitatezza della derivata n -esima della funzione. Supponendo infatti l'esistenza di $K \geq 0$ tale che

$$|f^{(n+1)}(z)| \leq K,$$

per ogni z compreso tra x_0 e x , si ottiene immediatamente la disuguaglianza

$$|f(x) - p_n(x)| \leq K \frac{|x - x_0|^{n+1}}{(n+1)!}. \quad (10)$$

Terminiamo il paragrafo con un'applicazione della (10).

Teorema 65. Per ogni $x \in \mathbb{R}$ vale l'uguaglianza

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}.$$

Dimostrazione. Il polinomio di Taylor relativo a $f(x) = e^x$ centrato in zero è dato da

$$p_n(x) = \sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!},$$

e coincide quindi con la ridotta n -esima s_n della serie in esame. È altresì chiaro che, per tutti i valori z compresi tra 0 e x ,

$$|f^{(n+1)}(z)| = e^z \leq \max\{1, e^x\}.$$

Usando la (10), troviamo la stima

$$|e^x - s_n| \leq \max\{1, e^x\} \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!}.$$

Ricordando il limite notevole

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{q^{n+1}}{(n+1)!} = 0, \quad \forall q > 0,$$

dal teorema del confronto deduciamo che la serie converge al valore e^x . \square

Osservazione 66. Di fatto, per un qualunque $q > 0$ fissato, la convergenza della serie è uniforme al variare di x nell'intervallo $[-q, q]$.

Osservazione 67. Ponendo $x = 1$, si ottiene la nota identità tra il *numero di Nepero* e la *serie fattoriale*:

$$e = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}.$$

Abbiamo qui tacitamente assunto come definizione

$$e = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n.$$

Viceversa, si può scegliere di definire il numero di Nepero mediante la serie fattoriale, dimostrando il limite in un successivo teorema.

16. Il teorema di de l'Hôpital

Il teorema di de l'Hôpital (dovuto in realtà al grande matematico svizzero Johann Bernoulli) permette di calcolare il limite del rapporto di due funzioni in un punto, conoscendo il limite del rapporto delle rispettive derivate. Premettiamo al teorema una notazione. Per $x_0 \in [-\infty, +\infty]$, indichiamo con $\mathcal{O}(x_0)$ un generico insieme della forma

$$\mathcal{O}(x_0) = \begin{cases} (x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon) \setminus \{x_0\} & \text{se } x_0 \in \mathbb{R} \\ (M, +\infty) & \text{se } x_0 = +\infty \\ (-\infty, M) & \text{se } x_0 = -\infty \end{cases}$$

dove $\varepsilon > 0$ e $M \in \mathbb{R}$.

Teorema 68. Sia $x_0 \in [-\infty, +\infty]$ e siano f, g due funzioni derivabili in $\mathcal{O}(x_0)$ con $g' \neq 0$ in $\mathcal{O}(x_0)$. Supponiamo inoltre che

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = 0, \quad (11)$$

oppure

$$\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = \pm\infty. \quad (12)$$

Allora se esiste il limite

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \ell,$$

con $\ell \in [-\infty, +\infty]$, ne consegue che

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \ell.$$

Dimostreremo il teorema solo nell'ipotesi (11). Premettiamo tuttavia alla dimostrazione due considerazioni.

► Il teorema vale anche per limiti destri o sinistri, cioè sostituendo dappertutto $x \rightarrow x_0$ con $x \rightarrow x_0^+$ o $x \rightarrow x_0^-$. In tal caso, se $x_0 \in \mathbb{R}$, l'insieme $\mathcal{O}(x_0)$ si può rimpiazzare con $(x_0, x_0 + \varepsilon)$ o $(x_0 - \varepsilon, x_0)$, a seconda che si faccia il limite destro o sinistro.

► Il teorema esprime una condizione solo sufficiente. Ad esempio, ponendo $f(x) = \sin x + \log x$ e $g(x) = x$, si ha che

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = 0,$$

ma il limite

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \cos x + \frac{1}{x}$$

non esiste.

La dimostrazione del teorema 68 fa uso della seguente generalizzazione del teorema di Lagrange, nota come teorema della media di Cauchy.

Teorema 69 (Cauchy). *Siano f, g due funzioni continue su un intervallo $[a, b]$ e derivabili in (a, b) , con $g' \neq 0$ in (a, b) . Allora esiste $x_0 \in (a, b)$ tale che*

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(x_0)}{g'(x_0)}.$$

Dimostrazione. Si noti preliminarmente che $g(b) \neq g(a)$. Se così non fosse, per il teorema di Rolle esisterebbe un punto $x \in (a, b)$ tale che $g'(x) = 0$, contro l'ipotesi $g' \neq 0$ in (a, b) . La funzione ausiliaria

$$\xi(x) = f(x) - \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}(g(x) - g(a))$$

soddisfa le ipotesi del teorema di Rolle. Dunque esiste $x_0 \in (a, b)$ tale che $\xi'(x_0) = 0$, la qual cosa implica immediatamente la tesi. \square

Dimostrazione del teorema 68 nell'ipotesi (11). Cominciamo considerando il caso $x_0 \in \mathbb{R}$. Sfruttando la (11), possiamo estendere per continuità f e g in x_0 , ponendo $f(x_0) = g(x_0) = 0$. Applicando allora il teorema di Cauchy nell'intervallo $[x_0, x_0 + h]$ (oppure $[x_0 + h, x_0]$ se $h < 0$), per ogni h sufficientemente piccolo esiste x_h compreso tra x_0 e $x_0 + h$ tale che

$$\frac{f(x_0 + h)}{g(x_0 + h)} = \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{g(x_0 + h) - g(x_0)} = \frac{f'(x_h)}{g'(x_h)}.$$

Poiché $x_h \rightarrow x_0$ quando $h \rightarrow 0$, se esiste il limite

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \ell$$

ne segue che

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f'(x_h)}{g'(x_h)} = \ell \quad \Rightarrow \quad \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h)}{g(x_0 + h)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \ell.$$

Sia invece $x_0 = +\infty$. Consideriamo le funzioni

$$F(x) = f(1/x) \quad \text{e} \quad G(x) = g(1/x),$$

definite in $(0, \varepsilon)$ per $\varepsilon > 0$ sufficientemente piccolo. In tale insieme,

$$F'(x) = -\frac{f'(1/x)}{x^2} \quad \text{e} \quad G'(x) = -\frac{g'(1/x)}{x^2}.$$

In particolare, poiché $g' \neq 0$ in $\mathcal{O}(+\infty)$ risulta $G' \neq 0$ in $(0, \varepsilon)$. Sfruttando l'uguaglianza

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{F'(x)}{G'(x)} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f'(1/x)}{g'(1/x)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)},$$

e sapendo che

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \ell,$$

dal punto precedente con $x_0 = 0$ (facendo solo il limite destro) raggiungiamo la conclusione desiderata

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{F(x)}{G(x)} = \ell.$$

Il caso $x_0 = -\infty$ è del tutto analogo. \square

La dimostrazione del teorema 68 nell'ipotesi (12) è leggermente più complicata, ed è qui omessa.

Osservazione 70. Si potrebbe essere tentati di applicare il teorema 68 per calcolare, ad esempio, il limite

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x}.$$

Ma sarebbe un ragionamento circolare, in quanto per calcolare la derivata di $\sin x$ è necessario conoscere il valore di tale limite.

*** **

Note

- [N1] Una funzione reale ψ di dominio $\mathfrak{D} \subset \mathbb{R}$ è detta *Lipschitz continua* se esiste una costante $\ell \geq 0$ per cui vale la relazione

$$|\psi(x) - \psi(y)| \leq \ell|x - y|, \quad \forall x, y \in \mathfrak{D}.$$

Si noti che la continuità secondo Lipschitz implica banalmente la continuità in ogni punto del dominio, nonché la disuguaglianza (cfr. §3)

$$|\mathcal{R}(\psi, x, h)| \leq \ell.$$

Nel caso ψ sia derivabile in un punto x , dal teorema della permanenza del segno concludiamo che

$$|\psi'(x)| \leq \ell.$$

Ci sono pertanto funzioni continue ma non Lipschitz continue. Un esempio è dato da $f(x) = \sqrt{x}$, la cui derivata $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$ è definita sull'intervallo $(0, +\infty)$ ma non è limitata.

- [N2] È effettivamente plausibile che l'intento originario fosse davvero quello di tradurre matematicamente l'idea di tracciare una funzione senza dover staccare la penna dal foglio. Ma, come talvolta capita in Matematica, la celebre definizione di continuità ha manifestato una potenza espressiva superiore, aprendo orizzonti inimmaginabili per i matematici dell'epoca. Solo in tempi relativamente recenti si è giunti a una comprensione soddisfacente dell'universo delle funzioni continue, le quali possono esibire comportamenti di straordinaria complessità. Simili circostanze danno quasi la sensazione che non sia l'uomo a creare la Matematica, ma che sia la Matematica stessa a rivelarsi all'uomo. Non è un caso che la questione "*Matematica: invenzione o scoperta?*" sia forse il tema centrale dell'Epistemologia moderna.
- [N3] Una postilla sulla discussione introduttiva, per ribattere preventivamente ad una possibile critica di eccessiva pedanteria. Dall'esperienza comune, moltissimi (tra coloro che hanno affrontato il problema) vivono nella convinzione che la derivata sia solo un utile strumento per calcolare il coefficiente angolare della retta tangente, oggetto evidente di per sé, che non necessita quindi di alcuna definizione particolare. Questa è una situazione piuttosto ricorrente in Matematica: adattare acriticamente intuizioni semplici a contesti complessi può condurre a errori sostanziali.
- [N4] Derivabilità e differenziabilità, sebbene risultino equivalenti per funzioni di una sola variabile, sono concetti di natura diversa: la derivabilità indaga il comportamento della funzione lungo una direzione fissata, mentre la differenziabilità dà informazioni sul comportamento nelle vicinanze di un punto. Chiaramente, sulla retta reale vi è una sola direzione possibile, da cui l'equivalenza delle due nozioni. Non così è per funzioni di due o più variabili reali.
- [N5] In un certo senso, l'esempio conferma la bontà della definizione di flesso adottata, non solo da noi, ma da gran parte della letteratura. Al contrario, vi sono testi che definiscono il flesso come un punto dove esiste la tangente e la funzione presenta

un cambio di concavità. Salvo poi, taluni dei testi medesimi, riferirsi a un “flesso orizzontale” qualora una funzione monotona abbia derivata nulla in un punto. La qual cosa confligge con la logica elementare, poiché un “flesso orizzontale” potrebbe *non essere* un flesso (a tangente orizzontale) secondo la loro stessa definizione, essendo contemplate situazioni come quella dipinta in fig. 11.

- [N6] C'è in letteratura il famoso esempio della *funzione di Weierstrass*, mai derivabile benché continua in ogni punto. D'altro canto, una funzione può avere un andamento estremamente complicato anche se è derivabile. Raffinando l'esempio 1, è infatti possibile costruire una $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ priva di intervalli di monotonia ma ovunque derivabile (e dunque dotata di tangente ovunque), con l'ulteriore proprietà che

$$|f'(x)| \leq 1, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Dal teorema di Lagrange (cfr. §9), si evince che tale f è Lipschitz continua con relativa costante $\ell \leq 1$.