

## Analisi 1

### 1. Limiti

- **Definizione di Limite:**  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$  significa che  $f(x)$  si avvicina a  $L$  quando  $x$  si avvicina ad  $a$ .
- **Calcolo dei Limiti:** Usa regole di sostituzione, razionalizzazione e scomposizione per semplificare l'espressione.
- **Limiti notevoli:**  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1$ ,  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos(x)}{x^2} = \frac{1}{2}$ .
- **Forme indeterminate:**  $\frac{0}{0}$ ,  $\frac{\infty}{\infty}$ ,  $0 \cdot \infty$ , risolte spesso con L'Hôpital o trasformazioni.

### 2. Continuità

- **Definizione di Continuità:** Una funzione  $f(x)$  è continua in  $x = a$  se  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$ .
- **Punti di Discontinuità:** Discontinuità eliminabili, di salto, essenziali.
- **Teorema di Bolzano:** Se  $f$  è continua su  $[a, b]$  e cambia segno in  $a$  e  $b$ , allora c'è almeno un punto  $c \in (a, b)$  tale che  $f(c) = 0$ .

### 3. Derivate

- **Definizione di Derivata:** La derivata di  $f$  in  $x = a$  è il limite  $f'(a) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$ .
- **Regole di Derivazione:**
  - Somma:  $(f+g)' = f' + g'$
  - Prodotto:  $(fg)' = f'g + fg'$
  - Quoziente:  $\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2}$
  - Catena:  $(f \circ g)' = f'(g(x)) \cdot g'(x)$
- **Derivate di funzioni elementari:**  $(\sin x)' = \cos x$ ,  $(\cos x)' = -\sin x$ ,  $(e^x)' = e^x$ ,  $(\ln x)' = \frac{1}{x}$ .

### 4. Studio di Funzione

- **Domini:** Determina i valori di  $x$  per cui  $f(x)$  è definita.

- **Intersezioni con gli assi:** Trova  $f(0)$  e i valori di  $x$  per cui  $f(x)=0$ .
- **Segno della funzione:** Analizza dove  $f(x) \geq 0$  o  $f(x) \leq 0$ .
- **Derivate:**
  - **Prima derivata:** Calcola  $f'(x)$  per trovare intervalli di crescita e decrescita e identificare i punti critici.
  - **Seconda derivata:** Calcola  $f''(x)$  per capire la concavità e trovare i punti di flesso.
- **Asintoti:** Calcola gli asintoti verticali, orizzontali e obliqui analizzando i limiti per  $x \rightarrow \infty$  e  $x \rightarrow a$  (dove  $f(x)$  non è definita).

## 5. Integrali

- **Integrale indefinito:**  $\int f(x) dx$  rappresenta una famiglia di funzioni con derivate uguali a  $f(x)$ .
- **Integrale definito:**  $\int_a^b f(x) dx$  rappresenta l'area sotto il grafico di  $f$  da  $x=a$  a  $x=b$ .
- **Proprietà:**
  - Lineare:  $\int (af(x) + bg(x)) dx = a \int f(x) dx + b \int g(x) dx$
  - Cambio di variabile: Se  $u = g(x)$ , allora  $\int f(g(x))g'(x) dx = \int f(u) du$
- **Teorema fondamentale del calcolo:**  $\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a)$  dove  $F$  è una primitiva di  $f$ .

## 6. Serie numeriche

- **Serie:** Somma infinita  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ .
- **Criteri di convergenza:**
  - Criterio del confronto: Se  $0 \leq a_n \leq b_n$  e  $\sum b_n$  converge, allora anche  $\sum a_n$  converge.
  - Criterio della radice e del rapporto per verificare la convergenza assoluta.