Politecnico di Milano
Scuola di Ingegneria Industriale e dell'Informazione

Analisi Matematica I [Prof. V.Pata]
I Prova in Itinere - 7 Novembre 2018

0. Esercizi Preliminari

Scrivere *VERO* o *FALSO* accanto a ciascuna affermazione:

- Ogni numero razionale ammette una rappresentazione decimale con un numero finito di cifre decimali dopo la virgola. ..F.......
- Se $a_n \to 0$ allora la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge. ....F....
- La serie $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n\sqrt{\log n}}$ converge. ..F......

Politecnico di Milano
Scuola di Ingegneria Industriale e dell'Informazione

Analisi Matematica I [Prof. V.Pata]
I Prova in Itinere - 7 Novembre 2018

0. Esercizi Preliminari

Scrivere *VERO* o *FALSO* accanto a ciascuna affermazione:

- La serie $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(\log n)^2}$ converge. ....V.....
- Ogni insieme $A \subset \mathbb{R}$ superiormente limitato ammette massimo. ....F.....
- Condizione necessaria per la convergenza della serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ è che $a_n \to 0$. ....V....

POLITECNICO DI MILANO
SCUOLA DI INGEGNERIA INDUSTRIALE E DELL'INFORMAZIONE

Analisi Matematica I [Prof. V.Pata]
I Prova in Itinere - 7 Novembre 2018

I. TEORIA

1.1. Dare la definizione di successione a_n convergente ad un limite $\ell \in \mathbb{R}$. Fornire inoltre un'interpretazione grafica della definizione. [1 punto]

1.2. Sia $a_n > 0$. Dimostrare che se $a_n \to 0$ allora $\dfrac{\sin a_n}{a_n} \to 1$. [1 punto]

2.1. Enunciare il criterio del rapporto per le serie, ed applicarlo per dimostrare la convergenza della serie fattoriale $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}$. [1 punto]

2.2. Detta $s_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}$ la successione delle somme parziali della serie fattoriale, e sapendo che $s_n \to \mathrm{e}$ (dal basso), dimostrare la disuguaglianza [1 punto]

$$\mathrm{e} - s_n < \frac{1}{n!n}, \quad \forall n \geq 1$$

3.1. Dimostrare che se a_n è convergente allora a_n è limitata. [2 punti]

3.2. Cosa si può dire dell'implicazione opposta? (non sono richieste le dimostrazioni di eventuali teoremi citati). [1 punto]

****

[Fac.] Dimostrare che ogni successione contiene una sottosuccessione monotòna.

$2 \cancel{\sin a} \cos a \sin 2 \left(\frac{a_n - a}{2}\right) \Rightarrow 2 \sin\left(\frac{a_n - a}{2}\right) \cos\left(\frac{a_n - a}{2}\right)$

$\sim a_n - a \qquad \to 1$

$2 \cancel{\sin a} \cos a \, (\cancel{a_n - a})$

Politecnico di Milano
Scuola di Ingegneria Industriale e dell'Informazione

Analisi Matematica I [Prof. V.Pata]
I Prova in Itinere - 7 Novembre 2018

$\to 0$

3 $\frac{a_n + a - a + a}{2} \Rightarrow \cos a$

2 $2 \cos\left(\frac{a_n + a}{2}\right) \underbrace{\sin\left(\frac{a_n - a}{2}\right)}_{\sim \frac{a_n - a}{2}}$

II. Esercizi

1. Sia $a \in (0, \pi)$ un numero fissato, e sia a_n una successione tale che $a_n \to a$ con $a_n \neq a$ definitivamente.

1.1 Mostrare che [2 punti]

$$\sin^2 a_n - \sin^2 a \sim (a_n - a) \sin 2a$$

3 $\frac{\sin^2 a_n - \sin^2 a}{(a_n - a) \sin 2a}$ = FORMULE PROSTAFERESI

$(\sin a_n + \sin a)(\sin a_n - \sin a)$

1 $2 \sin\left(\frac{a_n + a}{2}\right) \cos\left(\frac{a_n - a}{2}\right)$ 2

1.2 Utilizzando il punto 1.1, calcolare quindi il limite [1 punto]

$\sim 2\sin(a_n - a) \sim 2(a_n - a)$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\log\left[1 + 2\sin(a_n - a)\right] \cos(a + e^{-n})}{\underbrace{\sin^2 a_n - \sin^2 a}_{\sim (a_n - a)\sin 2a}}$$

$* \to \cos a$

$\frac{\cancel{2}(\cancel{a_n - a}) \cancel{\cos a}}{(\cancel{a_n - a}) \sin 2 a \cancel{\cos a}} \Leftarrow = \frac{1}{\sin a} = \csc a$

2. Trovare tutte le soluzioni nel campo complesso dell'equazione [2 punti]

$$z^3 = \bar{z}$$

$(x+iy)^3 = x^3 + 3x^2 i y - 3xy^2 - i y^3$

$x^3 + 3x^2 i y - 3xy^2 - i y^3 = x - iy$

$\begin{cases} x^3 - 3xy^2 - x = 0 \\ 3x^2 y - y^3 + y = 0 \end{cases}$

$\begin{cases} x(x^2 - 3y^2 - 1) = 0 \\ y(3x^2 - y^2 + 1) = 0 \end{cases}$ $x = 0$, $x = \sqrt{3y^2 + 1}$; $y = 0$, $y = \sqrt{3x^2 + 1}$

$z_1 = 0$

$z_2: \begin{cases} x = 0 \\ y = 1 \end{cases} = i$

$z_3 = \begin{cases} x = 1 \\ y = 0 \end{cases} = 1$

$z_4: \begin{cases} x = \sqrt{3y^2 + 1} \\ y = \sqrt{9y^2 + 4} \end{cases}$ $y^2 = 9y^2 + 4 \to 8y^2 = -4$, $y = i\sqrt{\frac{1}{2}}$

$\begin{cases} x = \sqrt{-\frac{3}{2} + 1} \\ y = i\sqrt{\frac{1}{2}} \end{cases}$ $x = i\sqrt{\frac{1}{2}}$

$z_4 = -\sqrt{\frac{1}{2}} + i\sqrt{\frac{1}{2}}$

3. Determinare, al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$, il carattere della serie [2 punti]

$\sim \sin\left(\frac{n+1}{n^2+2}\right) \log n \sim \frac{1}{n} \log n$

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\left[1 + \sin\left(\frac{n+1}{n^2+2}\right)\right]^{\log n} - 1}{\left[\log n^2\right]^{\alpha}} \Rightarrow \frac{\log n}{n[\underbrace{\log(n^2)}]^{\alpha}}$$

$\log n + \log n = 2 \log n$

$\frac{1}{n[2 \log n]^{\alpha - 1}}$

Converge per $\alpha > 2$