



Corso di Analisi Matematica I (Prof. Vittorino Pata)

# L'INTEGRALE

<i>1. Il problema del calcolo delle aree</i>	<i>2</i>
<i>2. Notazione</i>	<i>4</i>
<i>3. Definizione formale</i>	<i>5</i>
<i>4. Una definizione equivalente</i>	<i>7</i>
<i>5. Classi di funzioni integrabili</i>	<i>8</i>
<i>6. Proprietà dell'integrale</i>	<i>10</i>
<i>7. Integrale definito</i>	<i>12</i>
<i>8. Teorema fondamentale del calcolo</i>	<i>12</i>
<i>9. Funzione integrale</i>	<i>14</i>
<i>10. Cambio di variabili</i>	<i>15</i>
<i>11. Integrale indefinito</i>	<i>16</i>
<i>12. Applicazioni alle serie numeriche</i>	<i>17</i>
<i>13. Integrabilità impropria</i>	<i>19</i>
<i>14. Proprietà dell'integrale improprio</i>	<i>21</i>
<i>15. Criterio del confronto asintotico</i>	<i>22</i>

## 1. Il problema del calcolo delle aree

Data una funzione  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ , limitata e non negativa, consideriamo il seguente problema: determinare l'area  $\mathbf{a}(F)$  della figura

$$F = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : a \leq x \leq b, 0 \leq y \leq f(x)\},$$

descrivente la porzione del piano cartesiano compresa tra l'asse delle ascisse e il grafico della funzione.

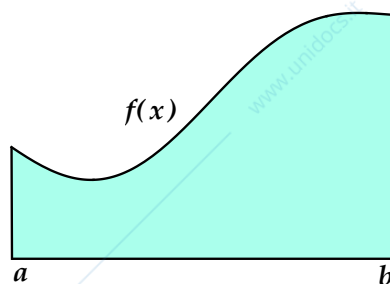
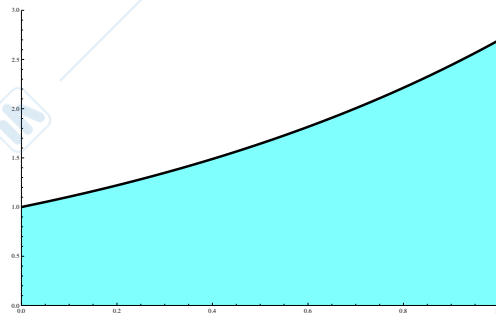


fig.1 Visualizzazione di  $F$

A prima vista, il concetto di una tale area potrebbe sembrare così ovvio da non dover essere neppure definito. Ciò dipende dal fatto di immaginare il grafico come una linea piuttosto regolare, che quindi genera una  $F$  con un perimetro facilmente riconoscibile. Esistono invece funzioni (addirittura infinitamente derivabili) con un andamento talmente irregolare da rendere assolutamente incomprensibile la corrispondente figura  $F$ . Ma le difficoltà possono insorgere anche in presenza di grafici estremamente regolari, dove è intuitivamente evidente come ottenere una stima approssimativa di  $\mathbf{a}(F)$ , ma calcolarne l'*esatto* valore potrebbe non essere altrettanto evidente. Il che non sorprende, non essendo ragionevolmente possibile stabilire il valore esatto di un'entità indefinita.

Per quanto osservato, è necessario riformulare il problema correttamente: data una  $f$ , vogliamo innanzitutto *definire* e in seguito *calcolare* l'area della corrispondente figura  $F$ . Illustriamo la strategia che intendiamo adottare con un esempio concreto, considerando la funzione esponenziale  $f(x) = e^x$  nell'intervallo  $[0, 1]$ .

fig. 2 La  $F$  relativa alla funzione  $e^x$  nell'intervallo  $[0, 1]$ 

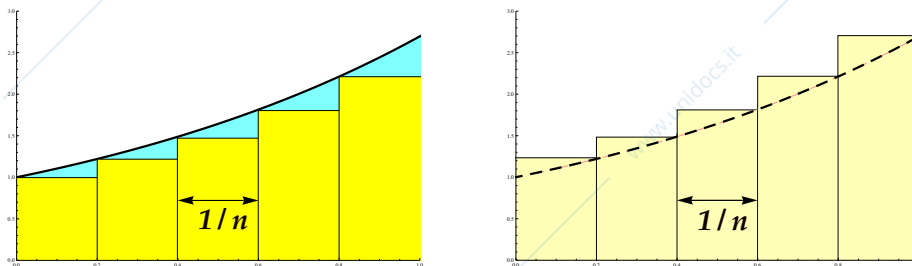
Comunque si intenda definire  $\alpha(F)$ , per due qualsiasi figure piane  $r$  e  $R$  deve ovviamente sussistere l'implicazione

$$r \subset F \subset R \Rightarrow \alpha(r) \leq \alpha(F) \leq \alpha(R).$$

Suddividiamo allora  $[0, 1]$  in  $n$  intervalli chiusi equispaziati  $\mathcal{I}_1, \dots, \mathcal{I}_n$  di lunghezza  $1/n$ , e su questi costruiamo i *plurirettangoli*  $r_n$  e  $R_n$  aventi nel  $k$ -esimo intervallo rispettive altezze

$$h_k = e^{(k-1)/n} \quad \text{e} \quad H_k = e^{k/n},$$

uguali cioè al minimo e al massimo assunti dalla funzione nell'intervallo stesso. In particolare, deduciamo le inclusioni  $r_n \subset F \subset R_n$ .

fig. 3 I plurirettangoli  $r_n$  e  $R_n$ 

Le aree dei plurirettangoli si ricavano facilmente ponendo  $q = e^{1/n}$  nella nota formula

$$\sum_{k=0}^{n-1} q^k = \frac{q^n - 1}{q - 1}.$$

La quantità  $\mathbf{a}(\mathbf{F})$ , ancorché non definita, è pertanto soggetta ai vincoli

$$\mathbf{a}(\mathbf{r}_n) = \frac{e-1}{n(e^{1/n}-1)} \leq \mathbf{a}(\mathbf{F}) \leq \frac{e-1}{n(1-e^{-1/n})} = \mathbf{a}(\mathbf{R}_n).$$

Ma poiché le successioni  $\mathbf{a}(\mathbf{r}_n)$  e  $\mathbf{a}(\mathbf{R}_n)$  convergono al medesimo limite  $e-1$ , il teorema del confronto impone l'uguaglianza  $\mathbf{a}(\mathbf{F}) = e-1$ .

Abbiamo dunque conseguito il duplice obiettivo di definire e contestualmente calcolare  $\mathbf{a}(\mathbf{F})$ , sopperendo con una nozione di natura *analitica* alla mancanza di una nozione *geometrica* di area. Lo strumento che ci consente di estendere e formalizzare il discorso per una funzione generica è l'*integrale*.

## 2. Notazione

Sia  $f : \mathcal{D} \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , e sia  $A$  un sottoinsieme del dominio  $\mathcal{D}$ . La *funzione caratteristica* di  $A$  è definita come

$$\chi_A(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \in A \\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

**Definizione 1.** Se  $A$  è limitato, chiamiamo *lunghezza* di  $A$  il numero

$$\ell(A) = \sup_A - \inf_A.$$

**Definizione 2.** Se  $f$  è limitata in  $A$ , ovvero l'immagine  $f(A)$  è un insieme limitato, denotiamo con

$$\Delta_A f = \sup_A f - \inf_A f$$

la differenza tra l'estremo superiore e l'estremo inferiore della  $f$  in  $A$ . Si noti l'uguaglianza  $\Delta_A f = \ell(f(A))$ .

**Definizione 3.** La  $f$  è detta *costante a tratti* se esistono  $N$  numeri reali  $\lambda_1, \dots, \lambda_N$  e  $N$  intervalli reali (di qualsiasi tipo)  $\mathcal{J}_1, \dots, \mathcal{J}_N$  tali che

$$f(x) = \sum_{i=1}^N \lambda_i \chi_{\mathcal{J}_i}(x).$$

Richiamiamo infine il *teorema di Heine-Cantor*, che sancisce l'equivalenza tra continuità e continuità uniforme su intervalli chiusi e limitati.

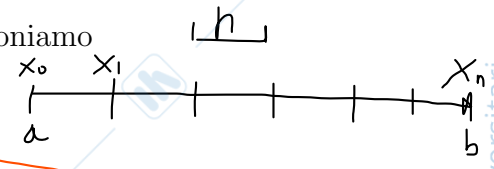
**Teorema 4 (Heine-Cantor).** *Sia  $f$  continua su  $\mathcal{D} = [a, b]$ . Fissato  $\varepsilon > 0$  esiste  $\delta > 0$  per cui vale l'implicazione*

$$\ell(A) < \delta \quad \Rightarrow \quad \Delta_A f < \varepsilon.$$

### 3. Definizione formale

Sia  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  una funzione limitata. Fissato  $n \in \mathbb{N}$ , poniamo

$$x_k = a + \frac{k(b-a)}{n} \quad (k = 0, 1, \dots, n),$$



e suddividiamo  $[a, b]$  negli  $n$  intervalli chiusi di uguale lunghezza  $(b-a)/n$

$$\mathcal{I}_1 = [x_0, x_1], \quad \mathcal{I}_2 = [x_1, x_2], \quad \dots, \quad \mathcal{I}_n = [x_{n-1}, x_n].$$

Chiamiamo rispettivamente *somma inferiore* e *somma superiore* di ordine  $n$  i due numeri reali<sup>1</sup>

$$s_n(f) = \frac{b-a}{n} \sum_{k=1}^n \inf_{\mathcal{I}_k} f, \quad S_n(f) = \frac{b-a}{n} \sum_{k=1}^n \sup_{\mathcal{I}_k} f,$$

e consideriamo la differenza

$$\omega_n(f) = S_n(f) - s_n(f) = \frac{b-a}{n} \sum_{k=1}^n \Delta_{\mathcal{I}_k} f.$$

Al variare di  $n \in \mathbb{N}$ , le successioni numeriche  $\{s_n(f)\}$  e  $\{S_n(f)\}$  non sono necessariamente monotone. Tuttavia, denotando

$$s(f) = \sup_n s_n(f), \quad S(f) = \inf_n S_n(f),$$

sono evidenti le disuguaglianze

$$s_n(f) \leq s(f) \leq S(f) \leq S_n(f), \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

**Definizione 5.** La  $f$  è *integrabile (secondo Riemann)* in  $[a, b]$  se<sup>2</sup>

$$\lim_{n \rightarrow \infty} s_n(f) = s(f) = S(f) = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n(f),$$

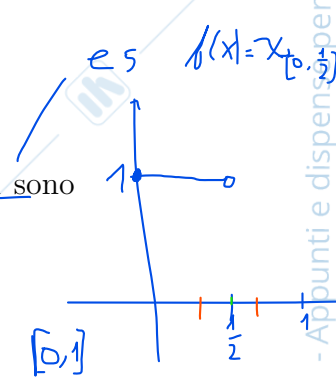
o equivalentemente se

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \omega_n(f) = 0.$$

L'insieme delle funzioni integrabili in  $[a, b]$  viene indicato con  $R(a, b)$ .

<sup>1</sup>Il fatto che  $s_n(f)$  e  $S_n(f)$  siano finiti si deve alla limitatezza di  $f$ .

<sup>2</sup>La nozione è stata introdotta da *Bernhard Riemann (1826-1866)*.



- $s_n(f)$   
|  
succ somma
- $S_1(f) = \frac{1}{2}(1+0) = \frac{1}{2}$
  - $S_2(f) = \frac{1}{3}(1+1+0) = \frac{2}{3}$
  - $S_3(f) = \frac{1}{4}(1+1+1+0) = \frac{3}{4}$

L'equivalenza dei limiti si evince dal teorema del confronto per le successioni applicato alla catena di disuguaglianze

$f_n - s_n(f)$

$$0 \leq s(f) - s_n(f) \leq S(f) - s_n(f) \leq \omega_n(f).$$

Vale la pena ribadire che la definizione di integrabilità è imprescindibile dalla limitatezza della funzione. Scrivendo  $f \in R(a, b)$  asseriamo implicitamente che  $f$  sia limitata.

**Definizione 6.** Se  $f \in R(a, b)$ , il numero  $s(f) = S(f)$  è detto **integrale** (di Riemann) della  $f$  in  $[a, b]$ , espresso dal simbolo<sup>3</sup>

$$\int_a^b f(x) dx.$$

Come per l'indice di sommazione delle serie, la  $x$  che compare nell'integrale è muta, e può essere rimpiazzata con qualsiasi altra variabile.

**Osservazione 7.** Geometricamente, l'integrale della  $f$  in  $[a, b]$  si interpreta come *area* della figura piana

$$F = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : a \leq x \leq b, \min\{f(x), 0\} \leq y \leq \max\{f(x), 0\}\},$$

convenendo di assegnare valore negativo all'area della porzione di  $F$  giacente sotto l'asse delle ascisse.

Le due successive proposizioni sono una conseguenza immediata del fatto che  $N$  punti di  $[a, b]$  non possono appartenere a più di  $2N$  intervalli distinti  $\mathcal{J}_k$ .

**Proposizione 8.** Se  $f$  è costante a tratti in  $[a, b]$ , vale a dire soddisfa la definizione 3 con  $\mathcal{J}_i \subset [a, b]$ , allora  $f \in R(a, b)$  con<sup>4</sup>

$$\int_a^b f(x) dx = \sum_{i=1}^N \lambda_i \ell(\mathcal{J}_i).$$

$\lambda_i = f(\xi_i), \xi_i \in \mathcal{J}_i$

<sup>3</sup>Il simbolo  $\int$  di integrale nasce originariamente come  $S$  di somma, affusolatasi poi nel tempo, volendo proprio rendere l'idea di sommare le aree di infiniti rettangoli di altezza  $f(x)$  e base di lunghezza infinitesima  $dx$ .

<sup>4</sup>L'integrale è chiaramente indipendente dalla particolare rappresentazione di  $f$  come combinazione lineare di funzioni caratteristiche di intervalli.

**Proposizione 9.** Sia  $f \in R(a, b)$ . Se  $g = f$  tranne al più in un numero finito di punti, allora  $g \in R(a, b)$  e i rispettivi integrali sono uguali.

La proposizione 9 ci consente di estendere in modo naturale la definizione di integrale per funzioni definite su intervalli **non necessariamente chiusi**.

**Definizione 10.** Sia  $g$  una funzione definita in un intervallo di estremi  $a, b$ . Diciamo che  $g \in R(a, b)$  se  $f \in R(a, b)$ , dove  $f$  è una qualsiasi **estensione di  $g$  su  $[a, b]$** , e poniamo

$$\int_a^b g(x) dx \stackrel{\text{def}}{=} \int_a^b f(x) dx.$$

Mostriamo infine un esempio di funzione non integrabile.

**Esempio 11.** Sia  $\chi_{\mathbb{Q}}$  la funzione caratteristica dei razionali, detta *funzione di Dirichlet*, nell'intervallo  $[0, 1]$ . Si verifica che  $\omega_n(\chi_{\mathbb{Q}}) = 1$  per ogni  $n$ , e di conseguenza  $\chi_{\mathbb{Q}} \notin R(0, 1)$ .

#### 4. Una definizione equivalente

L'integrale può essere definito mediante differenti procedure, utilizzando ad esempio somme inferiori e somme superiori relative a suddivisioni qualsiasi del dominio di integrazione  $[a, b]$ . Ogni costruzione ottenuta a partire da suddivisioni del dominio conduce tuttavia allo stesso risultato, come di fatto stabilisce la proposizione seguente.

quindi vale anche per suddivisioni non equidistanti

**Proposizione 12.** Data  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ , sono equivalenti le affermazioni

- (i)  $f \in R(a, b)$ ;
- (ii) per ogni  $\varepsilon > 0$  esistono due funzioni  $h^-$  e  $h^+$  costanti a tratti in  $[a, b]$  tali che  $h^- \leq f \leq h^+$ , la cui differenza  $h = h^+ - h^-$  soddisfa

$S_n(h^+) \geq S_n(f)$   
 $s_n(h^-) \leq s_n(f)$   
 e per definizione  
 $\omega_n = S_n(h^+) - s_n(h^-)$

$$\int_a^b h(x) dx < \varepsilon.$$

*Dimostrazione.* Se  $f \in R(a, b)$  le funzioni  $h^\pm$  si evincono in modo naturale dalla definizione di somma inferiore e superiore, scegliendo  $n$  sufficientemente grande. Se viceversa vale la (ii), essendo  $h^\pm$  integrabili, si ha

poi che  $\omega_n(f) \leq S_n(h^+) - s_n(h^-) \rightarrow \int_a^b h(x) dx < \varepsilon,$

e dunque  $\omega_n(f) < \varepsilon$  per  $n$  abbastanza grande. □

**Osservazione 13.** Si può pertanto decidere di utilizzare la proposizione 8 come definizione dell'integrale di una funzione costante a tratti, definendo poi l'integrabilità di una funzione generica attraverso la (ii).

Dalla proposizione 12 deduciamo due corollari. Il primo segue dall'identità

$$\int_a^b h(x)dx = \int_a^c h(x)dx + \int_c^b h(x)dx, \quad \forall c \in (a, b),$$

banalmente verificata da ogni funzione costante a tratti.

**Corollario 14.** Per  $c \in (a, b)$  arbitrariamente fissato,  $f \in R(a, b)$  se e solo se  $f \in R(a, c)$  e  $f \in R(c, b)$ .

**Corollario 15.** Sia  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  una **funzione limitata**. Se  $f \in R(c, d)$  per ogni  $a < c < d < b$ , allora  $f \in R(a, b)$ .

*Dimostrazione.* Dati  $c < d$ , siano  $h^- \leq f \leq h^+$  due qualsiasi funzioni costanti a tratti definite in ogni punto  $x \in [a, c] \cup (d, b]$  come

$$h^-(x) = \inf_{[a, b]} f, \quad h^+(x) = \sup_{[a, b]} f.$$

Detta  $h = h^+ - h^-$ , vale l'uguaglianza

$$\int_a^b h(x)dx = \int_c^d h(x)dx + (c - a + b - d) \cdot \Delta_{[a, b]} f.$$

Il terzo termine può essere reso arbitrariamente piccolo mediante una scelta opportuna di  $c$  e  $d$ . Dopodiché la proprietà  $f \in R(c, d)$  consente di definire  $h^\pm$  su  $[c, d]$  in modo da rendere il secondo termine piccolo a piacere.  $\square$

## 5. Classi di funzioni integrabili

**Teorema 16.** Se  $f$  è continua su  $[a, b]$ , allora  $f \in R(a, b)$ .

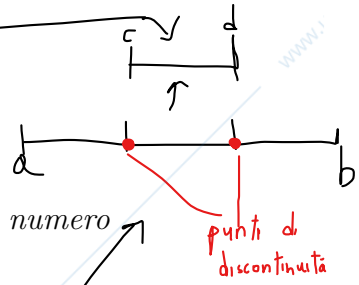
*Dimostrazione.* Sia  $\varepsilon > 0$  fissato. Per  $n$  abbastanza grande, dal teorema di Heine-Cantor si ha che  $\Delta_{\mathcal{J}_k} f < \varepsilon$ , da cui  $\omega_n(f) < (b - a)\varepsilon$ .  $\square$

Il risultato si estende alle funzioni limitate<sup>5</sup> continue a tratti.

<sup>5</sup>L'ipotesi di limitatezza è invece superflua nel teorema 16 in quanto garantita dal teorema di Weierstrass.

$(c, d)$   
 $\downarrow$   
 $f \in R(c, d)$   
 $\downarrow$   
 estendendo in  $[c, d]$

basta dimostrare che  $f$  è integrabile in un intervallo  $[a, b]$



$\downarrow f$  10

**Teorema 17.** Sia  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  una funzione limitata. Se  $f$  ha un numero finito di punti di discontinuità, allora  $f \in R(a, b)$ .

*Dimostrazione.* Rappresentiamo  $[a, b]$  come unione finita di intervalli chiusi consecutivi, localizzando nei relativi estremi tutti i punti di discontinuità. Per il corollario 14, la tesi segue dall'integrabilità in ciascun intervallo, sicché possiamo limitarci al caso di  $f$  continua su  $(a, b)$ . Sapendo dal teorema 16 che  $f \in R(c, d)$  per ogni  $a < c < d < b$ , deduciamo la proprietà  $f \in R(a, b)$  dal corollario 15.

**Teorema 18.** Se  $f$  è monotona su  $[a, b]$ , allora  $f \in R(a, b)$ .

*Dimostrazione.* Sia  $f$  crescente. Poiché  $\Delta_{\mathcal{J}_k} f = f(x_k) - f(x_{k-1})$ , si ottiene la convergenza

$$\omega_n(f) = \sum_{k=1}^n s_n = \frac{b-a}{n} [f(x_k) - f(x_0)] \rightarrow 0$$

$\sum_{k=1}^n s_n = \frac{b-a}{n} (f(x_0) + \dots + f(x_{k-1}))$   
 $\sum_{k=1}^n s_n = \frac{b-a}{n} (f(x_0) + \dots + f(x_k))$

Se  $f$  è decrescente la dimostrazione è analoga. □

**Teorema 19.** Sia  $f \in R(a, b)$  e sia  $\varphi$  continua su un intervallo chiuso  $[c, d]$  contenente l'immagine  $f([a, b])$ . Allora la composta  $\varphi \circ f \in R(a, b)$ .

*Dimostrazione.* Sia  $\varepsilon > 0$  arbitrario. Per ogni  $n \in \mathbb{N}$ , ripartiamo gli indici  $k \in \{1, \dots, n\}$  nei due insiemi disgiunti  $A_n$  e  $B_n$  definiti dal seguente criterio:

$$k \in A_n \text{ se } \Delta_{f(\mathcal{J}_k)} \varphi < \varepsilon, \quad k \in B_n \text{ se } \Delta_{f(\mathcal{J}_k)} \varphi \geq \varepsilon.$$

Sia inoltre  $\nu_n$  il numero di elementi di  $B_n$ . Valendo per ogni  $k$  la relazione

$$\Delta_{\mathcal{J}_k} (\varphi \circ f) = \Delta_{f(\mathcal{J}_k)} \varphi \leq \Delta_{[c, d]} \varphi,$$

si ha la disuguaglianza

$$\omega_n(\varphi \circ f) = \frac{b-a}{n} \sum_{k \in A_n \cup B_n} \Delta_{f(\mathcal{J}_k)} \varphi < (b-a)\varepsilon + (b-a) \cdot \Delta_{[c, d]} \varphi \frac{\nu_n}{n}.$$

Otterremo la tesi dimostrando la convergenza  $\nu_n/n \rightarrow 0$ . Dal teorema di Heine-Cantor applicato alla  $\varphi$ , esiste  $\delta > 0$  tale che

$$\Delta_{\mathcal{J}_k} f = \ell(f(\mathcal{J}_k)) < \delta \Rightarrow \Delta_{f(\mathcal{J}_k)} \varphi < \varepsilon \Rightarrow k \in A_n.$$

Riscrivendo l'implicazione nella forma equivalente

$$k \in B_n \Rightarrow \delta \leq \Delta_{\mathcal{J}_k} f,$$

si evince

$$\frac{\nu_n}{n} = \frac{1}{\delta n} \sum_{k \in B_n} \delta \leq \frac{1}{\delta n} \sum_{k \in B_n} \Delta_{J_k} f \leq \frac{1}{(b-a)\delta} \omega_n(f).$$

Il limite desiderato segue dalla convergenza  $\omega_n(f) \rightarrow 0$ . □

**Osservazione 20.** Il teorema 19 implica in particolare l'integrabilità del modulo e del quadrato di una funzione integrabile.

### 6. Proprietà dell'integrale

**Teorema 21** (Linearità). Per  $f, g \in R(a, b)$  e  $\lambda \in \mathbb{R}$ , la funzione  $f + \lambda g$  appartiene a  $R(a, b)$  (di conseguenza spazio lineare). Inoltre,

$$\int_a^b [f(x) + \lambda g(x)] dx = \int_a^b f(x) dx + \lambda \int_a^b g(x) dx.$$

*Dimostrazione.* Per  $f \equiv 0$  la dimostrazione è immediata. Possiamo quindi supporre  $\lambda = 1$ . In tal caso, valgono le relazioni

$$s_n(f) + s_n(g) \leq s_n(f + g) \leq S_n(f + g) \leq S_n(f) + S_n(g),$$

e la tesi si ottiene dal teorema del confronto per le successioni. □

**Teorema 22** (Prodotto). Se  $f, g \in R(a, b)$ , allora  $fg \in R(a, b)$ .

*Dimostrazione.* Segue dall'identità  $fg = \frac{1}{2}(f + g)^2 - \frac{1}{2}(f^2 + g^2)$ . □

**Teorema 23** (Confronto). Siano  $f, g \in R(a, b)$  tali che  $f \geq g$ . Allora

$$\int_a^b f(x) dx \geq \int_a^b g(x) dx.$$

In particolare, se  $f \geq 0$  lo stesso vale per il suo integrale.

*Dimostrazione.* È sufficiente notare che  $s_n(f) \geq s_n(g)$ . □

**Corollario 24** (Disuguaglianza del modulo). Sia  $f \in R(a, b)$ . Allora

$$\left| \int_a^b f(x) dx \right| \leq \int_a^b |f(x)| dx.$$

*Dimostrazione.* Si applichi il teorema del confronto a  $-|f| \leq f \leq |f|$ . □

**Teorema 25** (Additività). Se  $f \in R(a, b)$  e  $c \in (a, b)$  vale l'uguaglianza

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx.$$

*Dimostrazione.* Chiamiamo  $I_1$  e  $I_2$  i due membri dell'uguaglianza. Fissato  $\varepsilon > 0$ , scegliamo  $h^\pm$  come nella proposizione 12. Avendo precedentemente osservato che la tesi è vera per le costanti a tratti, poniamo

$$H^\pm \stackrel{\text{def}}{=} \int_a^b h^\pm(x) dx = \int_a^c h^\pm(x) dx + \int_c^b h^\pm(x) dx.$$

Il teorema del confronto implica allora la catena di disuguaglianze

$$\underline{I_1} - \varepsilon \leq H^+ - \varepsilon \leq H^- \leq \underline{I_2} \leq H^+ \leq H^- + \varepsilon \leq \underline{I_1} + \varepsilon.$$

Dall'arbitrarietà di  $\varepsilon$  concludiamo che  $I_1 = I_2$ .  $\square$

**Corollario 26.** Sia  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  una funzione limitata. Se  $f \in R(c, d)$  per ogni  $a < c < d < b$ , vale il limite doppio

$$\lim_{c \rightarrow a, d \rightarrow b} \int_c^d f(x) dx = \int_a^b f(x) dx.$$

*Dimostrazione.* Scrivendo

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^d f(x) dx + \int_d^b f(x) dx,$$

e sfruttando la disuguaglianza

$$\left| \int_a^c f(x) dx + \int_d^b f(x) dx \right| \leq (c - a + b - d) \cdot \sup_{[a, b]} |f|,$$

si ottiene la tesi.  $\square$

**Osservazione 27.** Sia  $a > 0$ . Data  $f \in R(-a, a)$ , si verifica direttamente dalla definizione che

$$I \stackrel{\text{def}}{=} \int_{-a}^0 f(-x) dx = \int_0^a f(x) dx.$$

Il teorema 25 fornisce dunque l'uguaglianza

$$\int_{-a}^a f(x) dx = \begin{cases} 2I & \text{se } f \text{ è simmetrica pari} \\ 0 & \text{se } f \text{ è simmetrica dispari.} \end{cases}$$

## 7. Integrale definito

**Definizione 28.** Data  $f \in R(a, b)$  e  $y, z \in [a, b]$ , l'integrale definito di  $f$  tra  $y$  e  $z$ , indicato ancora con

$$\int_y^z f(x)dx,$$

coincide con l'integrale ordinario se  $y \leq z$ , e soddisfa l'uguaglianza (da cui si evince la definizione per  $y > z$ )

$$\int_y^z f(x)dx = - \int_z^y f(x)dx.$$

L'introduzione di tale nozione è motivata principalmente dal teorema 25, che si traduce qui nella comoda relazione

$$\int_y^z f(x)dx = \int_y^c f(x)dx + \int_c^z f(x)dx, \quad \forall y, z, c \in [a, b].$$

Per l'integrale definito il teorema 21 continua a valere. Maggiore cautela è richiesta per il teorema 23, valendo la disuguaglianza opposta quando  $y > z$ .

## 8. Teorema fondamentale del calcolo

**Definizione 29.** Sia  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ . Una funzione derivabile  $F : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  è una *primitiva* di  $f$  se

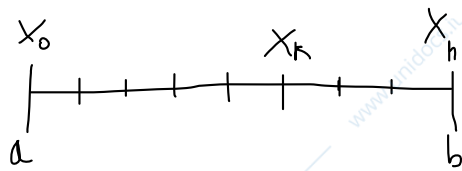
$$F'(x) = f(x), \quad \forall x \in [a, b].$$

Diciamo subito che non tutte le funzioni ammettono primitiva. Avere una primitiva significa infatti essere una derivata, e dunque **soddisfare la proprietà di Darboux dei valori intermedi**. Il che esclude ogni funzione che abbia salti o discontinuità eliminabili. Tuttavia, se esiste una primitiva di  $f$ , allora ne esistono infinite e sono tutte uguali a meno di una costante, giacché per definizione hanno tutte uguale derivata  $f$ .

L'insieme  $R_p(a, b)$  delle funzioni di  $R(a, b)$  dotate di primitiva gioca un ruolo particolarmente rilevante.

**Teorema 30** (Teorema fondamentale del calcolo). *Data  $f \in R_p(a, b)$  e una sua primitiva  $F$ , vale la cosiddetta formula del calcolo*

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a).$$



Lagrange su  $I_k[x_{k-1}, x_k]$

$$\frac{F(x_k) - F(x_{k-1})}{x_k - x_{k-1}} = F'(y_k) = f(y_k)$$

$$F(x_k) - F(x_{k-1}) = \frac{b-a}{n} f(y_k)$$

*Dimostrazione.* Per  $n$  fissato, applichiamo il teorema di Lagrange alla  $F$  in ciascuno degli  $n$  intervalli  $I_k = [x_{k-1}, x_k]$  di lunghezza  $(b-a)/n$ . Per ogni  $k = 1, \dots, n$ , esiste allora un punto  $y_k$  interno a  $I_k$  tale che

$$F(x_k) - F(x_{k-1}) = \frac{b-a}{n} F'(y_k) = \frac{b-a}{n} f(y_k),$$

e conseguentemente

$$\inf_{I_k} f \leq f(y_k) \leq \sup_{I_k} f$$

$$\frac{b-a}{n} \inf_{I_k} f \leq F(x_k) - F(x_{k-1}) \leq \frac{b-a}{n} \sup_{I_k} f.$$

**Sommando** le  $n$  disuguaglianze perveniamo alla relazione

$$s_n(f) \leq F(b) - F(a) \leq S_n(f),$$

che nel limite  $n \rightarrow \infty$  ci dà la tesi.  $\square$

**Osservazione 31.** La formula del calcolo continua a valere per l'integrale definito, rimpiazzando  $a, b$  con qualsiasi  $y, z \in [a, b]$ .

Il teorema 30 produce due corollari immediati.

**Corollario 32 (Media integrale).** Se  $f \in R_p(a, b)$  esiste  $c \in (a, b)$  tale che

$$\frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx = f(c).$$

$$\frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx = \frac{F(b) - F(a)}{b-a} = F'(c) = f(c)$$

*Dimostrazione.* Si applichi il teorema di Lagrange a una primitiva di  $f$ .  $\square$

**Corollario 33 (Integrazione per parti).** Se  $f, g \in R_p(a, b)$ , date due rispettive primitive  $F, G$  vale la formula

$$\int_a^b f(x)G(x)dx = F(b)G(b) - F(a)G(a) - \int_a^b F(x)g(x)dx.$$

*Dimostrazione.* La funzione  $fG + Fg$  è integrabile con primitiva  $FG$ .  $\square$

2 FORMULA

$$(FG)' = fG + Fg$$

$$\int_a^b (fG + Fg) dx = FG|_a^b =$$

$$= \int_a^b fG dx + \int_a^b Fg dx = FG|_a^b =$$

$$\int_a^b fG dx - \int_a^b Fg dx \quad \checkmark$$

### 9. Funzione integrale

Data  $f \in R(a, b)$ , definiamo la corrispondente *funzione integrale*

$$I(x) = \int_a^x f(t)dt, \quad x \in [a, b].$$

**Teorema 34.** La funzione integrale soddisfa le seguenti proprietà.

- (i) Se  $f \in R_p(a, b)$ , allora  $I$  è una sua primitiva.
- (ii)  $I$  è (Lipschitz) continua. Contin di tipo Lipschitz. Quando una funzione è in  $[a, b]$  se  $\exists L > 0$  t.c.  $\forall x, y \in [a, b]$   $|f(x) - f(y)| \leq L|x - y|$ . È come scrivere il rapporto come  $|f(x, y)| = \left| \frac{f(x) - f(y)}{x - y} \right| \leq L$
- (iii) Se  $f$  è continua in  $x$ , allora  $I$  è derivabile in  $x$  con  $I'(x) = f(x)$ .

*Dimostrazione.* Scelta una primitiva  $F$  di  $f$ , la formula del calcolo ci dà

$$I(x) = F(x) - \underbrace{F(a)}_{\text{costante}}, \quad \forall x \in [a, b],$$

da cui  $I' = F' = f$ , ovvero la (i). La (ii) si evince dalla disuguaglianza

$$|I(x) - I(y)| = \left| \int_y^x f(t)dt \right| \leq \left\{ \sup_{[a, b]} |f| \right\} \cdot |x - y|,$$

valida per ogni  $x, y \in [a, b]$ . Per la (iii), fissato  $\varepsilon > 0$  esiste  $\delta > 0$  tale che

$$|t - x| < \delta \Rightarrow |f(t) - f(x)| < \varepsilon.$$

Pertanto, se  $|h| < \delta$ ,

$$\left| \frac{I(x+h) - I(x)}{h} - f(x) \right| = \left| \frac{1}{h} \int_x^{x+h} [f(t) - f(x)] dt \right| < \varepsilon.$$

Il limite del rapporto incrementale della  $I$  in  $x$  vale dunque  $f(x)$ .

**Corollario 35.** Se  $f$  è continua su  $[a, b]$ , allora  $f \in R_p(a, b)$ .

Esistono viceversa funzioni di  $R_p(a, b)$  non continue.

**Esempio 36.** Definiamo le funzioni

$$f(x) = 2x \sin \frac{1}{x} - \cos \frac{1}{x}, \quad F(x) = x^2 \sin \frac{1}{x},$$

con  $f(0) = F(0) = 0$ . La  $f$ , di cui  $F$  è una primitiva, è ovunque integrabile in quanto limitata e continua tranne che in  $x = 0$ , dove ha una discontinuità di seconda specie. Conseguentemente  $f \in R_p(-a, a)$  per ogni  $a > 0$ .

vo qd. amo mostrare che  $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{I(x+h) - I(x)}{h} = f(x)$   
 biso pnc dim per  $h \rightarrow 0^+$  e  $h \rightarrow 0^-$   
 $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{I(x+h) - I(x)}{h} - f(x) = 0$   
 per ho consideramo  $\left| \frac{I(x+h) - I(x)}{h} - f(x) \right| = \left| \frac{1}{h} \int_x^{x+h} [f(t) - f(x)] dt - f(x) \right| = \left| \frac{1}{h} \int_x^{x+h} [f(t) - f(x)] dt - \int_x^{x+h} f(x) dt \right| = \left| \frac{1}{h} \int_x^{x+h} [f(t) - f(x)] dt \right| \leq \frac{1}{h} \int_x^{x+h} |f(t) - f(x)| dt$   
 Ut ilizzo l'ipo che  $f$  è cont  
 Voglio far vedere che per  $h \rightarrow 0$   $\varphi(h) \rightarrow 0$   
 significa mostrare che  $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0$   
 $|h| < \delta \Rightarrow \varphi(h) < \varepsilon$   
 poiché  $f$  è cont in  $x$  allora  $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0$  t.c. se  $|t - x| < \delta \Rightarrow |f(t) - f(x)| < \varepsilon$   
 Fissato  $\varepsilon$ , sia dunque  $h < \delta$   
 poiché  $t \in [x, x+h]$   
 $|t - x| \leq h < \delta \Rightarrow |f(t) - f(x)| < \varepsilon$   
 $\varphi(h) \leq \frac{1}{h} \int_x^{x+h} \varepsilon dt = \varepsilon$  ✓

È naturalmente possibile considerare funzioni integrali di forma più generale: per  $f \in R_p(a, b)$  e  $g, h : [\alpha, \beta] \rightarrow [a, b]$  derivabili, la funzione

$$J(x) = \int_{g(x)}^{h(x)} f(t) dt$$

è ben definita nell'intervallo  $[\alpha, \beta]$ , dove soddisfa l'uguaglianza

$$J(x) = F(h(x)) - F(g(x)),$$

per ogni primitiva  $F$  di  $f$ . Da ciò segue che  $J$  è derivabile in  $[\alpha, \beta]$  con

$$J'(x) = f(h(x))h'(x) - f(g(x))g'(x).$$

Ponendo  $g(x) = a$  e  $h(x) = x$  si ritrova il teorema 34 (i).

## 10. Cambio di variabili

**Teorema 37.** Sia  $f$  continua su  $[a, b]$  e sia  $\psi : [\alpha, \beta] \rightarrow [a, b]$  suriettiva e derivabile con  $\psi' \in R(\alpha, \beta)$ . Allora

$$\int_a^b f(x) dx = \int_{\eta}^{\xi} f(\psi(t)) \psi'(t) dt,$$

per tutti i punti  $\eta$  e  $\xi$  tali che  $\psi(\eta) = a$  e  $\psi(\xi) = b$ .

*Dimostrazione.* Si osservi che  $(f \circ \psi)\psi' \in R_p(\alpha, \beta)$  con primitiva  $F \circ \psi$ , dove  $F$  è una qualsiasi primitiva di  $f$ . Applicando la formula del calcolo ai due membri dell'uguaglianza

$$F(b) - F(a) = F(\psi(\xi)) - F(\psi(\eta)),$$

la tesi è dimostrata. □

Nel caso  $\psi$  sia anche iniettiva e dunque invertibile, nonché strettamente monotona in quanto continua, il risultato è noto come *teorema del cambio di variabili*, dove  $\eta = \alpha$ ,  $\xi = \beta$  (se  $\psi$  è crescente) oppure  $\eta = \beta$ ,  $\xi = \alpha$  (se  $\psi$  è decrescente), e la tesi si ottiene formalmente ponendo  $x = \psi(t)$  nel primo integrale, rileggendo  $dx$  attraverso la formula

$$dx = d(\psi(t)) = \psi'(t) dt.$$

~~**Osservazione 38.** Per  $\psi$  invertibile il teorema vale nell'ipotesi più generale  $f \in R_p(a, b)$ , che risulta sufficiente a garantire l'integrabilità di  $(f \circ \psi)\psi'$ . Oltre che per l'esistenza di  $F$ , è infatti questo il solo punto della dimostrazione precedente in cui interviene la continuità di  $f$ .~~

## 11. Integrale indefinito

In ragione del punto (i) del teorema 34, l'insieme di tutte le primitive di una funzione  $f \in R_p(a, b)$ , calcolate nel generico punto  $x \in [a, b]$ , è solitamente detto *integrale indefinito* di  $f$ , indicato con

$$\int f(x)dx.$$

Fissata una qualsiasi primitiva  $F$ , sussiste la relazione

$$\int f(x)dx = F(x) + C,$$

dove il secondo membro è inteso come unione insiemistica al variare della costante arbitraria  $C \in \mathbb{R}$ . Ulteriori proprietà dell'integrale indefinito, già implicitamente dimostrate nei precedenti paragrafi, sono di seguito enunciate.

**Proposizione 39** (Linearità). *Siano  $f, g \in R_p(a, b)$  e  $\lambda \in \mathbb{R}$ . Allora<sup>6</sup>*

$$\int [f(x) + \lambda g(x)] dx = \int f(x)dx + \lambda \int g(x)dx.$$

**Proposizione 40** (Integrazione per parti). *Per le funzioni  $f, g, F, G$  del corollario 33 vale la formula*

$$\int f(x)G(x)dx = F(x)G(x) - \int F(x)g(x)dx.$$

**Proposizione 41** (Cambio di variabili). *Per  $f, \psi, F$  come nel teorema 37,*

$$\int f(\psi(t))\psi'(t)dt = F(\psi(t)) + C.$$

*In particolare, se  $\psi$  è invertibile si può scrivere*

$$\int f(x)dx = \int f(\psi(t))\psi'(t)dt \Big|_{t=\psi^{-1}(x)}.$$

Le proposizioni forniscono tre metodi pratici per il calcolo di primitive, detti rispettivamente *di scomposizione*, *di integrazione per parti* e *di sostituzione*.

<sup>6</sup>Segnaliamo qui un piccolo inghippo di natura puramente formale, dovuto al fatto che l'integrale indefinito non è una funzione ma un insieme di funzioni: ponendo  $f \equiv 0$  ci si aspetterebbe la relazione  $\int \lambda g(x)dx = \lambda \int g(x)dx$ , che invece vale solo se  $\lambda \neq 0$ .

## 12. Applicazioni alle serie numeriche

L'integrale si rivela uno strumento di straordinaria potenza e versatilità, con molteplici applicazioni in svariati ambiti. Illustriamo qui alcuni esempi di un suo possibile utilizzo nell'analisi delle serie. Iniziamo con il calcolo della somma della *serie armonica alternata*, per poi passare alla convergenza della *serie armonica generalizzata*.

**Proposizione 42.** *Vale l'uguaglianza*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} = -\log 2.$$

*Dimostrazione.* Sfruttando la relazione

$$\frac{(-1)^k}{k} = - \int_0^1 (-x)^{k-1} dx,$$

riscriviamo la ridotta  $n$ -esima  $\sigma_n = \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^k}{k}$  come

$$\sigma_n = - \int_0^1 \sum_{k=1}^n (-x)^{k-1} dx = \int_0^1 \frac{-1 + (-x)^n}{1+x} dx = -\log 2 + \int_0^1 \frac{(-x)^n}{1+x} dx.$$

La disuguaglianza

$$\left| \int_0^1 \frac{(-x)^n}{1+x} dx \right| \leq \int_0^1 \frac{x^n}{1+x} dx \leq \int_0^1 x^n dx = \frac{1}{n+1}$$

implica la convergenza  $\sigma_n \rightarrow -\log 2$ .  $\square$

**Proposizione 43.** *Per ogni  $\alpha > 1$  esiste  $\zeta(\alpha) < \alpha/(\alpha-1)$  tale che*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha} = \zeta(\alpha).$$

*Dimostrazione.* La serie di termine generale

$$a_1 = 1, \quad a_n = \int_{n-1}^n \frac{1}{x^\alpha} dx \quad (n > 1)$$

ha somma  $\alpha/(\alpha-1)$ . Per  $n > 1$  la sua ridotta  $n$ -esima è infatti

$$\sum_{k=1}^n a_k = 1 + \int_1^n \frac{1}{x^\alpha} dx = \frac{\alpha - n^{1-\alpha}}{\alpha - 1}.$$

Poiché  $n^{-\alpha} < a_n$  (per  $n > 1$ ), la tesi discende dal criterio del confronto.  $\square$

**Osservazione 44.** Il valore esatto di  $\zeta(\alpha)$ , detta *funzione zeta di Riemann*, è noto solo in pochi casi particolari. Per  $\alpha = 2$  si ha la famosa *uguaglianza di Eulero*  $\zeta(2) = \pi^2/6$ .

Similmente, si ottiene la divergenza della serie per  $\alpha \leq 1$ . Il caso limite  $\alpha = 1$  corrisponde alla serie armonica propriamente detta, la cui divergenza logaritmica è dimostrata nella proposizione seguente.

**Proposizione 45** (Formula di Eulero-Mascheroni). *La successione*

$$\gamma_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \log n$$

converge a un limite  $\gamma \in (\frac{1}{2}, 1)$ .

*Dimostrazione.* Scrivendo  $\gamma_n$  nella forma

$$\gamma_n = \frac{1}{n} + \sum_{k=1}^{n-1} \tau_k \quad \text{con} \quad \tau_k = \frac{1}{k} - \int_k^{k+1} \frac{1}{x} dx,$$

basta mostrare che la serie dei  $\tau_k$  ha somma  $\gamma \in (\frac{1}{2}, 1)$ . A tal fine, si noti che

$$\frac{1}{2k(k+1)} < \tau_k < \frac{1}{k(k+1)}.$$

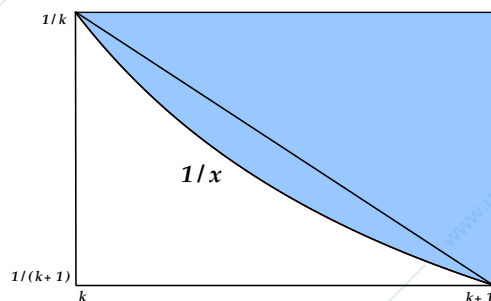


fig. 4 Il rettangolo di area  $\frac{1}{k(k+1)}$  con evidenziato il triangoloide di area  $\tau_k$

Dal criterio del confronto e dalla convergenza  $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k+1)} = 1$  della *serie di Mengoli* si ha l'asserto.  $\square$

**Osservazione 46.** Il valore della *costante di Eulero-Mascheroni*  $\gamma$  è pari a 0.5772, approssimato al quarto decimale. È una questione tuttora aperta se  $\gamma$  sia o no un numero razionale.

### 13. Integrabilità impropria

Dato un intervallo aperto  $(a, b)$ , con  $-\infty \leq a < b \leq \infty$ , sia  $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$  una funzione *localmente integrabile* in  $(a, b)$ , cioè tale che

$$f \in R(c, d), \quad \forall a < c < d < b.$$

La definizione 10 di integrabilità non è applicabile alla  $f$  in tutto  $(a, b)$  nelle circostanze seguenti:

(i)  $f$  non è limitata in  $(a, b)$ ;

(ii) l'intervallo non è limitato in quanto  $a = -\infty$  oppure  $b = \infty$ .

È tuttavia possibile aggirare l'ostacolo con una procedura di **limite**.

**Definizione 47.** La funzione  $f$  è *integrabile impropriamente* in  $(a, b)$  se esiste finito il limite doppio

$$\lim_{c \rightarrow a, d \rightarrow b} \int_c^d f(x) dx,$$

detto *integrale improprio* (o *generalizzato*) di  $f$  in  $(a, b)$ , sempre indicato con

$$\int_a^b f(x) dx.$$

Chiamiamo  $I(a, b)$  l'insieme delle funzioni integrabili impropriamente in  $(a, b)$ .

**Osservazione 48.** Se  $f$  è limitata, rispettivamente nell'intorno di  $a > -\infty$  oppure nell'intorno di  $b < \infty$ , dal corollario 26 deduciamo l'uguaglianza tra il limite doppio e i rispettivi limiti

$$\lim_{d \rightarrow b} \int_a^d f(x) dx \quad \text{oppure} \quad \lim_{c \rightarrow a} \int_c^b f(x) dx.$$

Se si presentano entrambe le situazioni, ovvero  $f$  è limitata in  $(a, b)$  intervallo limitato, allora  $f \in R(a, b)$  e l'integrale coincide con l'integrale improprio.

Per l'additività dell'integrale, il limite doppio si può riscrivere come

$$\lim_{c \rightarrow a, d \rightarrow b} \int_c^d f(x) dx = \lim_{c \rightarrow a} \int_c^y f(x) dx + \lim_{d \rightarrow b} \int_y^d f(x) dx,$$

con  $y \in (a, b)$  arbitrariamente fissato. L'esistenza del limite doppio equivale pertanto a quella dei due limiti singoli, e l'uguaglianza stabilisce l'additività dell'integrale improprio.

**Esempio 49.** Si verifica facilmente che

$$\frac{x}{1-x^2} \notin I(-1, 1) \quad \text{ma} \quad \lim_{d \rightarrow 1} \int_{-d}^d \frac{x}{1-x^2} dx = 0.$$

Da ciò si comprende l'importanza di interpretare correttamente il limite doppio come due limiti indipendenti.

Scelti  $N + 1$  punti a piacere

$$a = w_0 < w_1 < \dots < w_{N-1} < w_N = b,$$

la definizione 47 si può estendere al caso di  $f$  localmente integrabile in ogni intervallo  $(w_{i-1}, w_i)$ , eventualmente non definita negli estremi  $w_i$ . Con abuso di notazione, seguiamo a chiamare siffatta  $f$  localmente integrabile in  $(a, b)$ .

**Definizione 50.** Diciamo che  $f \in I(a, b)$  qualora sia integrabile nel senso della definizione 47 in ogni intervallo  $(w_{i-1}, w_i)$ , ponendo

$$\int_a^b f(x) dx \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{i=1}^N \int_{w_{i-1}}^{w_i} f(x) dx.$$

La relazione tra integrale improprio e integrale ordinario è del tutto simile a quella intercorrente tra serie e somma finita. E in effetti la serie non è che il caso particolare dell'integrale improprio di una funzione costante su ogni intervallo di estremi interi consecutivi. Ragon per cui si è soliti adottare la terminologia in uso nelle serie numeriche, dicendo che l'integrale improprio di  $f$  è **convergente, divergente o indeterminato** a seconda che tale sia il corrispondente limite doppio, e che *converge assolutamente* se converge l'integrale improprio di  $|f|$ . Si noti che l'integrale improprio di una funzione non negativa può solo convergere o divergere a  $\infty$ .

**Esempio 51.** Si consideri la funzione  $\mathcal{F}_\alpha(x) = x^{-\alpha}$  con  $\alpha \in \mathbb{R}$ . Per  $\alpha > 1$  sussiste il limite

$$\lim_{d \rightarrow \infty} \int_1^d \mathcal{F}_\alpha(x) dx = \frac{1}{\alpha - 1}.$$

Lo stesso limite è invece infinito per  $\alpha \leq 1$ . In analogia con la serie armonica generalizzata,  $\mathcal{F}_\alpha \in I(1, \infty)$  se e solo se  $\alpha > 1$ . Con un conto simile si dimostra che  $\mathcal{F}_\alpha \in I(0, 1)$  se e solo se  $\alpha < 1$ . Poiché le due disequazioni non ammettono soluzioni comuni, concludiamo che  $\mathcal{F}_\alpha \notin I(0, \infty)$  per ogni  $\alpha$ .

Handwritten notes for Example 51:

- Left side:  $\mathcal{F}_\alpha = \frac{1}{x^\alpha}$
- Top row:  $\mathcal{F}_\alpha \in I(1, +\infty)$ 
  - Integral:  $\lim_{N \rightarrow +\infty} \int_1^N \frac{1}{x^\alpha} dx = F(N) - F(1)$
  - Case  $\alpha = 1$ :  $\otimes = \lim_{N \rightarrow +\infty} \ln N = +\infty \rightarrow$  Non è un limite finito  $\Rightarrow$  Non è un integrale improprio
  - Case  $\alpha \neq 1$ :  $\ominus = \lim_{N \rightarrow +\infty} \frac{N^{1-\alpha}}{1-\alpha} - \frac{1}{1-\alpha}$ 
    - $\alpha > 1$ :  $\frac{1}{1-\alpha}$  (green box)
    - $\alpha < 1$ :  $+\infty$  (green box)
- Bottom row:  $\mathcal{F}_\alpha \in I(0, 1)$ 
  - Integral:  $\lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \int_\epsilon^1 \frac{1}{x^\alpha} dx = F(1) - F(\epsilon)$
  - Case  $\alpha = 1$ :  $\oplus = \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} -\ln \epsilon = +\infty \rightarrow \frac{1}{x} \notin I(0, 1)$
  - Case  $\alpha \neq 1$ :  $\oplus = \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \frac{1}{1-\alpha} - \frac{\epsilon^{1-\alpha}}{1-\alpha}$ 
    - $\alpha > 1$ :  $+\infty$  (green box)
    - $\alpha < 1$ :  $\frac{1}{1-\alpha}$  (green box)

**NB**  $\int_0^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha} dx \Rightarrow$  NON ESISTE PER NESSUN VALORE DI  $\alpha$

#### 14. Proprietà dell'integrale improprio

Date  $f$  e  $g$  localmente integrabili in  $(a, b)$ , i seguenti fatti discendono dalle proprietà dei limiti e dai risultati già visti per l'integrale ordinario.

**Proposizione 52** (Linearità). *Il teorema 21 continua a valere per  $I(a, b)$ .*

**Proposizione 53** (Confronto). *Se  $f \geq g \geq 0$ , la stessa disuguaglianza si ha per i rispettivi integrali impropri. Ne conseguono le implicazioni*

$$(i) f \in I(a, b) \Rightarrow g \in I(a, b);$$

$$(ii) g \notin I(a, b) \Rightarrow f \notin I(a, b).$$

**Proposizione 54** (Convergenza assoluta). *Come per le serie numeriche, se  $|f| \in I(a, b)$  allora  $f \in I(a, b)$  e il modulo dell'integrale improprio di  $f$  è minore o uguale dell'integrale improprio di  $|f|$ .*

Contrariamente a quanto accade in  $R(a, b)$  (cfr. teorema 22 e corollario 24),  $f, g \in I(a, b)$  non implica che  $fg \in I(a, b)$ , e neppure che  $|f| \in I(a, b)$ .

**Esempio 55.** Dall'esempio 51,  $\mathcal{F}_{1/2} \in I(0, 1)$  ma  $\mathcal{F}_{1/2} \mathcal{F}_{1/2} = \mathcal{F}_1 \notin I(0, 1)$ .

**Esempio 56.** Si consideri la funzione

$$f(x) = \frac{\sin x}{x}, \quad x \in (\pi, \infty).$$

•  $f \in I(\pi, \infty)$ : in virtù dell'esempio 51 e delle proposizioni 53 e 54,

$$\left| \frac{\cos x}{x^2} \right| \leq \frac{1}{x^2} \in I(\pi, \infty) \Rightarrow \frac{\cos x}{x^2} \in I(\pi, \infty).$$

Integrando per parti e passando al limite  $d \rightarrow \infty$ , si ha quindi

$$\int_{\pi}^d f(x) dx = -\frac{1}{\pi} - \frac{\cos d}{d} - \int_{\pi}^d \frac{\cos x}{x^2} dx \rightarrow -\frac{1}{\pi} - \int_{\pi}^{\infty} \frac{\cos x}{x^2} dx.$$

•  $|f| \notin I(\pi, \infty)$ : per ogni intero  $n \geq 2$  vale la disuguaglianza

$$\int_{\pi}^{n\pi} |f(x)| dx \geq \sum_{k=2}^n \frac{1}{k\pi} \int_{(k-1)\pi}^{k\pi} |\sin x| dx = \frac{2}{\pi} \sum_{k=2}^n \frac{1}{k}.$$

L'asserto segue dalla divergenza della serie armonica.

## 15. Criterio del confronto asintotico

L'integrabilità impropria di una  $f$  localmente integrabile in  $(a, b)$ , nel senso più generale della definizione 50, è chiaramente implicata dall'integrabilità impropria nell'intorno di ogni **punto critico**, intendendo per critico un punto  $a \leq w \leq b$  nei cui pressi la  $f$  non sia limitata, nonché gli estremi  $a$  e  $b$  dell'intervallo se infiniti. Conformemente alla definizione, gli eventuali punti critici appartengono necessariamente all'insieme  $\{w_0, \dots, w_N\}$ . Al fine di poterli trattare separatamente, conveniamo di chiamare *intorni* di  $w_i$ , indicati genericamente con  $\mathfrak{A}(w_i)$ , soltanto gli intervalli aperti  $(c, d)$  tali che

$$\begin{aligned} a = c < d < w_1 & \quad \text{se } i = 0, \\ w_{N-1} < c < d = b & \quad \text{se } i = N, \\ w_{i-1} < c < w_i < d < w_{i+1} & \quad \text{altrimenti.} \end{aligned}$$

Il problema si riconduce dunque alla verifica della proprietà  $f \in I(\mathfrak{A}(w_i))$  in corrispondenza di ogni  $w_i$  critico. Qualora  $f$  abbia segno costante in  $\mathfrak{A}(w_i)$ , la proposizione 53 fornisce un risultato utile allo scopo.

**Proposizione 57.** *Sia  $g$  localmente integrabile e non negativa in  $\mathfrak{A}(w_i)$ . Se esistono due costanti  $M \geq m > 0$  tali che*

$$mg(x) \leq f(x) \leq Mg(x),$$

per ogni  $x \in \mathfrak{A}(w_i)$  escluso al più  $w_i$  stesso, vale la doppia implicazione

$$f \in I(\mathfrak{A}(w_i)) \quad \Leftrightarrow \quad g \in I(\mathfrak{A}(w_i)).$$

**Osservazione 58.** La proposizione si può enunciare anche per soli intorni destri  $\mathfrak{A}^+(w_i) = \mathfrak{A}(w_i) \cap [w_i, b)$  o intorni sinistri  $\mathfrak{A}^-(w_i) = \mathfrak{A}(w_i) \cap (a, w_i]$ . Il che ci permette di trattare una  $f$  di segno opposto in  $\mathfrak{A}^\pm(w_i)$ , deducendo l'integrabilità impropria in  $\mathfrak{A}(w_i)$  da quella in ciascun  $\mathfrak{A}^\pm(w_i)$ .

L'esistenza di  $M \geq m > 0$  è garantita se  $g$  è *asintotica* a  $f$  in  $w_i$ , ovvero

$$\lim_{x \rightarrow w_i} \frac{f(x)}{g(x)} = 1.$$

Nel qual caso scriviamo  $f \sim g$  in  $w_i$  (relazione di equivalenza) riferendoci alla proposizione 57 come **criterio del confronto asintotico**. Tale criterio si utilizza

al meglio disponendo di funzioni campione di integrabilità nota, come la  $\mathcal{F}_\alpha$  dell'esempio 51. Introduciamo allora la **funzione**

$$\mathcal{F}_{\alpha,\beta}(x) = \frac{1}{x^\alpha |\log x|^\beta},$$

analizzandone l'integrabilità impropria in  $\mathfrak{A}(0)$ ,  $\mathfrak{A}(\infty)$  e  $\mathfrak{A}(1)$  al variare dei parametri reali  $\alpha$  e  $\beta$ . La  $\mathcal{F}_{\alpha,\beta}$  risulta integrabile impropriamente:

$$\begin{array}{ll} \text{in } \mathfrak{A}(0) & \Leftrightarrow \alpha < 1 \quad (\forall \beta), \quad \text{oppure } \alpha = 1 \text{ con } \beta > 1; \\ \text{in } \mathfrak{A}(\infty) & \Leftrightarrow \alpha > 1 \quad (\forall \beta), \quad \text{oppure } \alpha = 1 \text{ con } \beta > 1; \\ \text{in } \mathfrak{A}(1) & \Leftrightarrow \beta < 1 \quad (\forall \alpha). \end{array}$$

**Esempio 59.** Studiamo la convergenza dell'integrale improprio

$$\int_0^\infty \frac{(1+2x^2) \arctan x^3}{x^\lambda [\log(1+x)]^{\lambda-2}} dx,$$

in dipendenza dal parametro  $\lambda \in \mathbb{R}$ . Nei possibili punti critici<sup>7</sup> la funzione integranda  $f$  soddisfa  $f \sim \mathcal{F}_{2\lambda-5,0}$  in 0 e  $f \sim \pi \mathcal{F}_{\lambda-2,\lambda-2}$  in  $\infty$ , da cui

$$f \in I(\mathfrak{A}(0)) \Leftrightarrow \lambda < 3, \quad f \in I(\mathfrak{A}(\infty)) \Leftrightarrow \lambda > 3.$$

Per nessun valore di  $\lambda$  vi è dunque convergenza.

<sup>7</sup>Al contrario di  $\infty$ , punto critico per definizione, lo 0 non è critico per  $\lambda \leq 5/2$ .