Equazioni differenziali a variabili separabili

Consideriamo un'equazione del tipo

$$y'(x) = g(x)f(y(x))\,. \tag{0.1}$$

Procediamo formalmente scrivendo $y' = dy/dx$ e "separando le variabili". Si ottiene

$$\frac{dy}{f(y)} = g(x)dx \qquad \Rightarrow \qquad \int \frac{dy}{f(y)}\,dy = \int g(x)\,dx\,,$$

e calcolando le primitive si risolve il problema. Per esempio, per l'equazione

$$\frac{dy}{dx} = xy^2\,, \tag{0.2}$$

per $y \neq 0$, separando le variabili si ottiene

$$\frac{dy}{y^2} = xdx\,,$$

da cui

$$-\frac{1}{y} = \frac{1}{2}x^2 + c\,,$$

con $c \in \mathbb{R}$ costante arbitraria. Quindi, l'equazione (0.2), oltre alla soluzione identicamente nulla, ammette anche tutte quelle della forma

$$y(x) = -\frac{1}{c + x^2/2}\,.$$

Teorema 0.1 *Siano f e g funzioni continue e si consideri l'equazione (0.1). Se $f(y_0) = 0$, allora $y(x) = y_0$ è una soluzione. Se $f(y) \neq 0$ per ogni $y \in \mathcal{J} \subseteq \mathbb{R}$ intervallo, allora siano F una primitiva di $1/f$ e G una primitiva di g. Allora ogni funzione derivabile $x \longmapsto y(x)$ tale che*

$$F(y(x)) = G(x) + c\,, \qquad c = \text{costante}\,, \tag{0.3}$$

è soluzione dell'equazione differenziale (0.1). Siano inoltre $x_0, y_0 \in \mathbb{R}$. Se f è di classe $\mathcal{C}^1$ in un intorno di y_0, oppure se $f(y_0) \neq 0$, allora l'equazione (0.1) ha una ed una sola soluzione tale che $y(x_0) = y_0$. Tale soluzione è definita in un intorno di x_0.

Dim. Da (0.3), derivando si ottiene

$$F'(y(x))y'(x) = G'(x) \qquad \Rightarrow \qquad \frac{y'(x)}{f(y(x))} = g(x)\,,$$

come si voleva. Non dimostriamo l'unicità. □

Dunque, per determinare la soluzione di un'equazione differenziale "a variabili separabili", cioè con il metodo descritto dal precedente teorema, si devono calcolare due primitive e poi applicare la formula (0.3). Si osservi che tale formula dà una famiglia di soluzioni (che dipendono dal parametro arbitrario c) *in forma implicita*: la funzione $y(x)$ deve essere ancora ricavata. Vediamo nel prossimo esempio come può essere talvolta calcolata imponendo la condizione iniziale $y(x_0) = y_0$.

Esempio 0.1 Risolvere il problema di Cauchy

$$\begin{cases} yy' = 1 \\ y(0) = -2\,. \end{cases}$$

Si ottiene

$$\frac{1}{2}y^2 = x + c, \qquad c \in \mathbb{R}.$$

Dal teorema di unicità sappiamo che il nostro problema di Cauchy ha una ed una sola soluzione. Per determinarla calcoliamo innanzitutto c: dalla condizione $y(0) = 2$ risulta $c = (-2)^2/2 = 2$, per cui la soluzione $y(x)$ deve essere ricavata dall'equazione

$$\frac{1}{2}y^2 = x + 2,$$

che dà

$$y(x) = -\sqrt{2(x+2)}$$

Esempio 0.2 Consideriamo l'equazione $y' = \sqrt{y}$. Applicando il metodo della separazione delle variabili, risulta $2\sqrt{y} = x + c$, $c \in \mathbb{R}$, cioè $y(x) = (x+c)^2/4$. Dunque ci sono almeno due soluzioni $y(x)$ tali che $y(0) = 0$. Sono $y(x) \equiv 0$ e $y(x) = x^2/4$ (in realtà ce ne sono infinite). Osserviamo che $f(y) = \sqrt{y}$ non è derivabile in $y = 0$.

Esempio 0.3 Sia data l'equazione

$$y' = 2x\sqrt{1-y^2}\,, \qquad -1 \le y \le 1\,.$$

Le rette $y = 1$ e $y = -1$ sono soluzioni. Le altre soluzioni si ricavano per separazione di variabili:

$$\arcsin y = x^2 + c\,.$$

Quindi, fissata c, si trova una soluzione definita per

$$-\frac{\pi}{2} \le x^2 + c \le \frac{\pi}{2}\,.$$

e data da

$$y(x) = \sin(x^2 + c)\,.$$

Per esempio, dovendo risolvere

$$\begin{cases} y' = 2x\sqrt{1-y^2}\,, \\ y(\sqrt{\pi}) = \dfrac{1}{2} \end{cases}$$

si impone la condizione iniziale

$$\frac{1}{2} = \sin(\pi + c)\,,$$

cercando c in modo che $-\pi/2 \le \pi + c \le \pi/2$. Si trova $c = -5\pi/6$, da cui

$$y(x) = \sin\left(x^2 - \frac{5\pi}{6}\right)\,, \qquad -\frac{\pi}{2} \le x^2 - \frac{5\pi}{6} \le \frac{\pi}{2}\,.$$

Esempio 0.4 L'equazione cosiddetta logistica (di Verhulst, 1845),

$$y' = ry(1 - \frac{y}{K})$$

con r e K costanti reali positive, modella alcuni fenomeni biologici. La soluzione corrispondente alla condizione iniziale $y(0) = y_0 > 0$ è data da

$$y(x) = \frac{Ky_0e^{rx}}{K - y_0 + y_0e^{rx}}.$$

È facile vedere che qualunque sia la condizione iniziale y_0, si ha che

$$\lim_{x\to+\infty} y(x) = K.$$

K si chiama la *capacità portante (carrying capacity)*, o capacità dell'ambiente.

Esercizi per casa

1. Calcolare la soluzione del problema di Cauchy

$$\begin{cases} yy' = x(4 - y^2) \\ y(0) = \sqrt{3} \end{cases}$$

(soluzione: il metodo della separazione delle variabili dà $|4 - y^2(x)| = ke^{-x^2/2}$, $k \in \mathbb{R}$; imponendo la condizione iniziale risulta $y^2(x) < 4$ per x in un intorno di $x = 0$, per cui si toglie il modulo e la soluzione è $y(x) = \sqrt{4 - e^{-x^2/2}}$).

2. Determinare le soluzioni dell'equazione differenziale
$$y' = \frac{2xy}{x^2-1}$$
con le condizioni iniziali
$$y(0) = 0,\ y(0) = 2,\ y(1/2) = 1$$
(soluzioni: $y(x) \equiv 0$, $y(x) = 2(x^2-1)$, $y(x) = -\frac{4}{3}(x^2-1)$).

3. Calcolare la soluzione del problema di Cauchy
$$\begin{cases} y' = (1+y^2)\log x \\ y(1) = 0 \end{cases}$$
(soluzione: $y(x) = \tan(x \log x - x + 1)$).

4. Calcolare la soluzione del problema di Cauchy
$$\begin{cases} y' = xy^2 \\ y(0) = 5\,. \end{cases}$$

5. Calcolare la soluzione del problema di Cauchy
$$\begin{cases} y' = e^y \log x \\ y(1) = 0\,. \end{cases}$$

6. Calcolare la soluzione del problema di Cauchy
$$\begin{cases} y' = 1 + y^2 \\ y(0) = 0\,. \end{cases}$$

7. Calcolare la soluzione del problema di Cauchy
$$\begin{cases} y' = \frac{x}{y} \\ y(0) = 1\,. \end{cases}$$

8. Calcolare le soluzioni del problema di Cauchy
$$y' + 3x^2y^4 = 0$$
con le condizioni iniziali $y(1) = 0$ e $y(1) = 1$.

9. Calcolare la soluzione del problema di Cauchy

$$\begin{cases} xy' = \tan y \\ y(1) = \pi/4 \end{cases}$$

(soluzione: $y(x) = \arcsin(x/\sqrt{2})$; NB: per $|x| \leq \sqrt{2}$).

10. Calcolare la soluzione del problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = \frac{y^2-1}{x^2-1} \\ y(0) = 0\,. \end{cases}$$