

Analisi Matematica 1 e Geometria - 3 settembre 2014

Ing. Chimica - Prof. F. Gazzola

Teoria (3 punti) Enunciare il Teorema di Rouché-Capelli per la risoluzione di sistemi lineari.

1) (7 punti) Studiare e rappresentare la funzione

$$f(x) = \log |1 - 4x + 3x^2| .$$

È richiesto anche lo studio della derivata seconda.

2) (6 punti) Per ogni $k \in \mathbf{R}$ si consideri l'applicazione lineare $L_k : \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}^3$ definita dalla matrice

$$A_k = \begin{pmatrix} 2 & -1 - k \\ 1 & -1 \\ -1 & k \end{pmatrix} .$$

- (a) Stabilire per quali valori di k l'applicazione L_k risulta iniettiva e/o suriettiva.
 (b) Per ogni $k \in \mathbf{R}$ determinare il nucleo e l'immagine di L_k .

3) (5 punti) Si determinino le eventuali soluzioni del sistema

$$\begin{cases} x - y + z + t = 0 \\ x - z - t = 0 \\ x - 2y + 3z + 3t = 0 \\ 4x - y - 2z - 2t = 0 \end{cases}$$

che risultano ortogonali al vettore $u = (-1, 0, 1, 1)$.

4) (6 punti) Determinare il polinomio di McLaurin di quinto grado della funzione

$$f(x) = e^x - e^{x^3/3} - \sin x - \frac{x^2}{2} .$$

Calcolare poi i limiti

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x)}{x^3} , \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x)}{x^4} , \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x)}{x^5} .$$

Analisi Matematica 1 e Geometria - 16 luglio 2014

Ing. Chimica - Prof. F. Gazzola

Teoria (3 punti) Enunciare e dimostrare il Teorema del valor medio di Lagrange.

1) (8 punti) Studiare e rappresentare la funzione

$$f(x) = x + (1 - x) \arctan \frac{1}{x} + \frac{\pi}{2}.$$

È richiesto anche lo studio della derivata seconda. L'equazione $f'(x) = 0$ non è risolvibile elementarmente; per lo studio del segno e la localizzazione degli eventuali zeri di f' si consiglia di sfruttare lo studio di f'' .

2) (5 punti) Calcolare gli integrali

$$\int_{1/\sqrt{3}}^1 \frac{dx}{(1+x^2) \arctan x}, \quad \int_1^5 \frac{x+3}{x^2-6x} dx.$$

3) (6 punti) Calcolare autovalori, autovettori, e diagonalizzare la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 6 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

4) (5 punti) Siano dati i tre punti $A(2, 1, 1)$, $B(1, 4, 0)$, $C(-1, 8k, -k)$, dove $k \in \mathbf{R}$.

- Stabilire se esistono valori di k per i quali i tre punti sono allineati.
- Per $k = 1$ determinare l'equazione del piano contenente A , B , C .
- Per $k = 1$ calcolare l'area del triangolo ABC .

Analisi Matematica 1 e Geometria - 20 febbraio 2014

Ing. Chimica - Prof. F. Gazzola

Teoria (3 punti) Enunciare e dimostrare il Teorema fondamentale del calcolo integrale.

1) (8 punti) Studiare e rappresentare la funzione

$$f(x) = \frac{5-x}{\sqrt{5+x^2}}.$$

È richiesto anche lo studio della derivata seconda.

2) (5 punti) Calcolare gli integrali

$$\int_0^1 \frac{x}{x^2+4x+5} dx, \quad \int_0^{\pi/4} \frac{\tan x}{1+\sin^2 x} dx.$$

3) (6 punti) Al variare di $k \in \mathbf{R}$, trovare tutte le soluzioni (se esistono) del sistema

$$\begin{cases} x + y + z = 1 \\ x + ky + z = 2 \\ 2x - y + kz = -1. \end{cases}$$

4) (5 punti) Per ogni $\lambda \in \mathbf{R}$ scrivere la matrice A_λ che rappresenta l'applicazione lineare $f_\lambda : \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}^2$ che trasforma i vettori della base canonica \mathbf{i} e \mathbf{j} rispettivamente nei vettori

$$\mathbf{u} = \begin{pmatrix} -1 \\ -\lambda \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad \mathbf{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Stabilire per quali valori di λ l'applicazione f_λ è invertibile. Trovare poi le rette che vengono trasformate in se stesse dalla applicazione f_λ .

Analisi Matematica 1 e Geometria - 3 febbraio 2014

Ing. Chimica - Prof. F. Gazzola

Teoria (3 punti) Enunciare il Teorema di Rouché-Capelli e spiegare come si utilizza per risolvere i sistemi di equazioni lineari.

1) (6 punti) Calcolare autovalori, autovettori, e diagonalizzare la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 6 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

2) (6 punti) Rappresentare nel piano di Gauss gli insiemi

$$A = \{z \in \mathbf{C} : z^3 = (1 + \sqrt{3}i)^3\}, \quad B = \{w \in \mathbf{C} : w = z + 1 - 2i, \quad z \in A\},$$
$$C = \{v \in \mathbf{C} : v = \frac{1}{z}, z \in A\}, \quad D = \{s \in \mathbf{C} : s = (\sqrt{3} - i)z, \quad z \in A\}.$$

3) (6 punti) Data la retta di equazioni parametriche

$$r : \begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 2 - t \\ z = 3 + 2t \end{cases}$$

trovare il punto simmetrico dell'origine rispetto a tale retta.

4) (6 punti) Sia L la trasformazione lineare associata alla matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & k & 1 \\ 0 & 1 & 0 & k \\ 0 & 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Stabilire per quali valori di $k \in \mathbf{R}$:

(i) L è iniettiva; (ii) L è suriettiva; (iii) L è biunivoca; (iv) risulta $u \in \text{Im}(L)$ con $u = (1, 1, 1)$.