

Analisi 1

1. Integrali Multipli e Cambiamento di Variabili

- **Integrali doppi:** Estensione del concetto di integrale definito per funzioni di due variabili. $\iint_D f(x, y) \, dA$ dove D è la regione di integrazione nel piano xy .
- **Cambiare l'ordine di integrazione:** Utilizzato per semplificare il calcolo degli integrali, soprattutto per regioni complicate.
- **Cambiamento di variabili:** Tramite una trasformazione (ad esempio, da coordinate cartesiane a polari) è possibile semplificare l'integrale. Ad esempio, in coordinate polari: $\iint_D f(x, y) \, dx \, dy = \iint_D f(r \cos \theta, r \sin \theta) r \, dr \, d\theta$
- **Applicazioni:** Calcolo di aree e volumi, problemi di fisica e ingegneria.

2. Studio delle Serie di Fourier

- **Introduzione alle Serie di Fourier:** Espansione di una funzione periodica come somma di sinusoidi (seni e coseni).

$$f(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos\left(\frac{2\pi n x}{L}\right) + b_n \sin\left(\frac{2\pi n x}{L}\right))$$
- **Coefficienti di Fourier:** Calcolo dei coefficienti a_n e b_n attraverso integrali definiti.
- **Convergenza della serie:** La serie di Fourier converge alla funzione in tutti i punti di continuità, mentre nei punti di discontinuità converge al valore medio.
- **Applicazioni delle serie di Fourier:** Risoluzione di equazioni differenziali, analisi di segnali e onde, compressione dati (come JPEG).

3. Equazioni Differenziali Ordinarie (ODE) di Primo e Secondo Ordine

- **Definizione di Equazione Differenziale:** Relazione che coinvolge una funzione e le sue derivate.
- **Equazioni di primo ordine:**
 - **Equazioni lineari:** Della forma $y' + p(x)y = q(x)$.
 Risolvibili con il metodo del fattore integrante.
 - **Equazioni a variabili separabili:** Della forma $y' = g(x)h(y)$, che possono essere risolte separando x e y .
- **Equazioni di secondo ordine:**

- **Equazioni omogenee a coefficienti costanti:** Del tipo $y''+ay'+by=0$ $y'' + ay' + by = 0$, che ammettono soluzioni del tipo $y=e^{\lambda x}$ $y = e^{\lambda x}$.
- **Equazioni non omogenee:** Dove si usa il metodo della particolare soluzione o il metodo di variazione delle costanti.
- **Applicazioni delle ODE:** Modellazione di fenomeni fisici come il moto armonico (es. molle, pendoli), circuiti elettrici e modelli di crescita popolazioneale.

4. Serie Numeriche e di Funzioni

- **Convergenza puntuale e uniforme:** Una serie di funzioni converge puntualmente se converge in ogni punto; converge uniformemente se la velocità di convergenza è la stessa su tutto l'intervallo.
- **Test di convergenza per serie di funzioni:** Test del rapporto, radice, integrale e confronto.
- **Funzioni continue e derivabili per serie:** Se una serie di funzioni converge uniformemente e ogni funzione è continua, anche il limite è continuo.
- **Approssimazione uniforme:** Usato per approssimare funzioni tramite polinomi o serie, con applicazioni pratiche in analisi numerica e fisica.

5. Applicazioni Avanzate delle Derivate: Ottimizzazione e Convessità

- **Problemi di ottimizzazione:** Trovare il massimo e minimo di funzioni soggette a vincoli.
 - **Lagrange:** Per problemi con vincoli, si utilizzano i moltiplicatori di Lagrange per trovare punti di massimo o minimo.
- **Convessità e Concavità:**
 - Una funzione è convessa se il segmento che unisce due punti qualsiasi del grafico della funzione si trova sopra il grafico stesso.
 - **Condizioni per la convessità:** Se la derivata seconda è positiva su un intervallo, la funzione è convessa in quell'intervallo.
- **Ottimizzazione convessa:** Fondamentale in vari campi (economia, machine learning), poiché garantisce l'unicità dei punti di massimo o minimo locale (che coincidono con il massimo o minimo globale in una funzione convessa).