

Cognome:	Nome:	Matricola:
----------	-------	------------

Prescritto	Teoria	Es.1	Es.2	Es.3	Es.4	Totale
------------	--------	------	------	------	------	--------

LE RISPOSTE VANNO MOTIVATE.

1. Disegnare il grafico della funzione $f(x) = \int_0^x |t| dt$ sull'intervallo $[-1, 1]$.

2. Al variare di $\alpha > 0$, calcolare il limite $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{e^x - 1 - x}{x^\alpha}$.

3. Determinare l'inversa della matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

4. Risolvere in \mathbf{C} : $z^4 + 2z^2 + 1 = 0$.

5. Stabilire se è derivabile in $x = 0$ la funzione $f(x) = \sqrt[3]{x+1}$.

6. Scrivere le equazioni parametriche della retta passante per il punto $A(1, 2, 1)$ e ortogonale al piano d'equazione $x + y - 2z = \pi$.

7. Stabilire se i tre vettori $u = (1, 1, 1)$, $v = (1, -1, 1)$, $w = (1, 1, -1)$ formano una base di \mathbb{R}^3 .

8. Determinare il nucleo dell'applicazione lineare $\mathcal{L} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^4$, definita da $\mathcal{L}(x, y) = (x + y, 2x + 2y, 3x + 3y, 4x + 4y)$.

9. Stabilire se il grafico della funzione $f(x) = x^{51} + 1$ attraversa la sua retta tangente nel punto $x = 0$.

10. Determinare il polinomio di McLaurin di quinto grado della funzione $f(x) = \sin x - x$.

Cognome:	Nome:	Matricola:
-----------------	--------------	-------------------

Teoria. (3 punti) Dare la definizione di limite: spiegare cosa si intende con $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \ell$ con ℓ finito.

www.unidocs.it - Appunti e dispense per superare i tuoi esami universitari

www.unidocs.it - Appunti e dispense per superare i tuoi esami universitari

Esercizio 1. (8 punti) Studiare la seguente funzione

$$f(x) = x + \frac{1}{\log x}$$

e disegnarne un grafico qualitativo. In particolare, si richiede lo studio della convessità e di dimostrare che la derivata prima f' si annulla in un unico punto.

SOLUZIONE. Campo di esistenza: $(0, 1) \cup (1 + \infty)$. Limiti:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 0, \quad \lim_{x \rightarrow 1^\pm} f(x) = \pm\infty, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty.$$

Pertanto, $x = 1$ è asintoto verticale. Poiché $f(x) = x + o(1)$ per $x \rightarrow \infty$ la retta $y = x$ è asintoto obliquo.

Risulta

$$f'(x) = 1 - \frac{1}{x \log^2 x}.$$

La funzione $x \mapsto x \log^2 x$ è positiva su $(0, \infty)$, ha un massimo assoluto in $x = e^{-2}$ nell'intervallo $(0, 1)$ dove vale $4e^{-2} < 1$, un minimo assoluto in $x = 1$ e poi cresce monotonamente verso ∞ : pertanto, esiste un'unica $\bar{x} \in (1, \infty)$ dove essa vale 1 e, di conseguenza, dove $f'(\bar{x}) = 1$. Il segno della derivata prima è dunque:

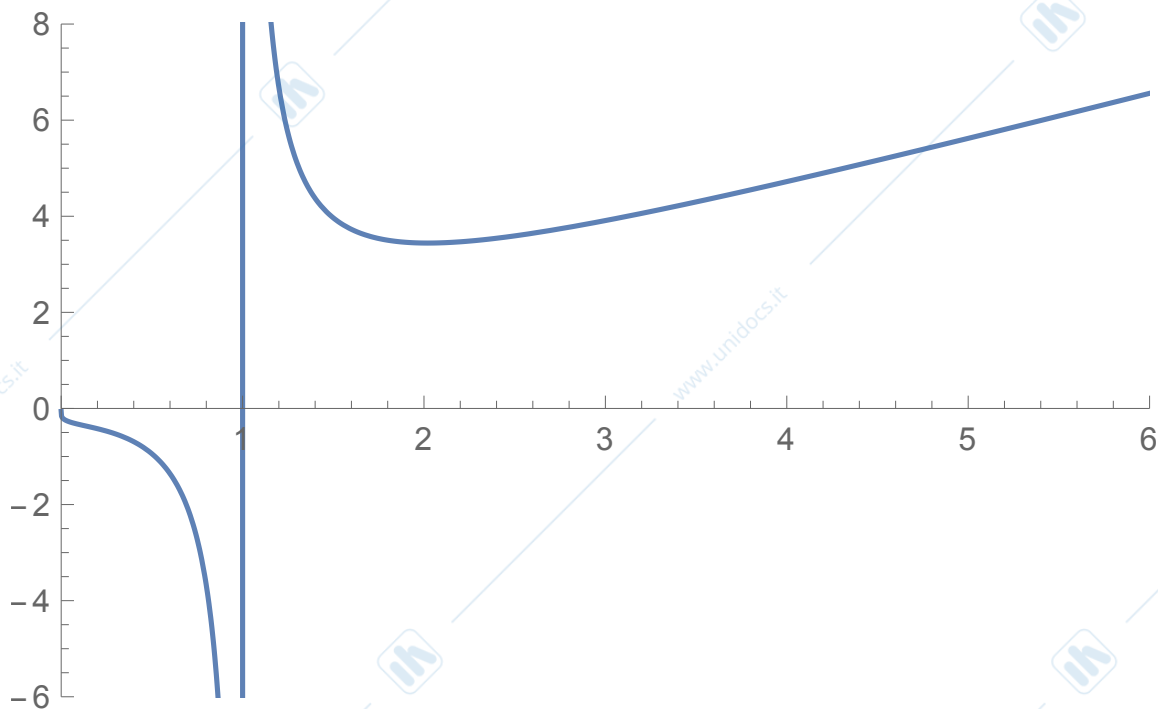
$$f'(x) < 0 \quad \forall x \in (0, 1) \cup (1, \bar{x}), \quad f'(x) > 0 \quad \forall x > \bar{x}.$$

Osserviamo che $f(x) > 0 \quad \forall x > 1$ (somma di due termini positivi) e quindi f ha un minimo in \bar{x} con $f(\bar{x}) > 0$. Inoltre, $f'(x) \rightarrow -\infty$ per $x \rightarrow 0^-$ e quindi il grafico ha una semi-tangente verticale nell'origine.

Derivata seconda:

$$f''(x) = \frac{2 + \log x}{x^2 \log^3 x}$$

che si annulla per $x = e^{-2}$ dove c'è un flesso. La funzione f è convessa in $(0, e^{-2}) \cup (1, \infty)$ e concava in $(e^{-2}, 1)$. Il grafico è il seguente:



Esercizio 2. (4 punti) Calcolare i due integrali seguenti:

$$\int_1^e \frac{\sqrt{\log x}}{x} dx \quad \int_0^{\pi^2} x \cos(\sqrt{x}) dx .$$

SOLUZIONE. Integrale immediato:

$$\int_1^e \frac{\sqrt{\log x}}{x} dx = \frac{2}{3} \left[\log^{3/2} x \right]_1^e = \frac{2}{3} .$$

Per sostituzione $x = t^2$ e per parti:

$$\int_0^{\pi^2} x \cos(\sqrt{x}) dx = 2 \int_0^{\pi} t^3 \cos(t) dt = 2 \left[(t^3 - 6t) \sin t + (3t^2 - 6) \cos t \right]_0^{\pi} = 6(4 - \pi^2) .$$

Esercizio 3. (6 punti) Determinare, al variare del parametro $\alpha \in \mathbb{R}$, l'insieme delle soluzioni del sistema lineare:

$$\begin{cases} 2x + (4 + 2\alpha)y + (4 + 2\alpha)z = -14 \\ (2 + \alpha)y + 4z = -8 \\ 2y + (4 - \alpha)z = -4. \end{cases}$$

SOLUZIONE. Si potrebbe calcolare il determinante della matrice dei coefficienti, ma sembra più semplice studiare il sistema composto dalle ultime due equazioni, dato che non compare la x :

$$(2 + \alpha)y + 4z = -8, \quad 2y + (4 - \alpha)z = -4.$$

Questo sistema ammette un'unica soluzione sse il suo determinante è non nullo:

$$(2 + \alpha)(4 - \alpha) - 8 \neq 0 \implies \alpha(\alpha - 2) \neq 0.$$

In tal caso, la soluzione è data da

$$(y, z) = \left(-\frac{8}{\alpha}, \frac{4}{\alpha} \right)$$

che, sostituita nella prima equazione, fornisce l'unica soluzione del sistema di partenza

$$(x, y, z) = \left(\frac{8}{\alpha} - 3, -\frac{8}{\alpha}, \frac{4}{\alpha} \right).$$

Se $\alpha = 0$, il sistema in (y, z) diventa

$$2y + 4z = -8, \quad 2y + 4z = -4,$$

ovviamente impossibile.

Se $\alpha = 2$, il sistema in (y, z) si riduce alla singola equazione $y + z = -2$ che, sostituita nella prima, fornisce le infinite soluzioni $(x, y, z) = (1, y, -2 - y)$.

Esercizio 4. (6 punti) Determinare, al variare del parametro $k \in \mathbb{R}$, la dimensione dello spazio V generato dai vettori

$$u = \begin{pmatrix} k+1 \\ 1 \\ 1-k \end{pmatrix} \quad v = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad w = \begin{pmatrix} k^2+1 \\ 1 \\ k+1 \end{pmatrix}.$$

Per ognuno dei casi trovati, determinare poi una base dello spazio V .

SOLUZIONE. Si tratta di determinare il rango della matrice

$$M = \begin{pmatrix} k+1 & 1 & k^2+1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1-k & 1 & k+1 \end{pmatrix}.$$

Si ha $\det M = k^2(k+1)$, pertanto:

- se $k \neq 0$ e $k \neq -1$, M ha rango massimo e $\dim V = 3$, una base è (ovviamente) $\{u, v, w\}$ oppure $\{i, j, k\}$;
- se $k = 0$, M ha rango 1 (si ha $u = v = w$) e $\dim V = 1$, una base è $\{u\}$;
- se $k = -1$, M ha rango 2 (si ha $w = 2v - u$) e $\dim V = 2$, una base è $\{u, v\}$ (oppure $\{u, w\}$, oppure $\{v, w\}, \dots$).

Ingegneria Chimica, dei Materiali e delle Nanotecnologie

29 agosto 2018 - Analisi Matematica I e Geometria (PRIMA PARTE)

Cognome:	Nome:	Matricola:
----------	-------	------------

Prescritto	Teoria	Es.1	Es.2	Es.3	Es.4	Totale
------------	--------	------	------	------	------	--------

LE RISPOSTE VANNO MOTIVATE.

- Calcolare il limite $\lim_{n \rightarrow \infty} n^3 \left(\frac{1}{n} - \sin \frac{1}{n} \right)$.
- Dato l'insieme $E = \left\{ \frac{n-1}{n+1} \cos(n\pi) : n \in \mathbb{N} \right\}$, determinare $\sup E$ ed $\inf E$.
- Determinare se è monotona in \mathbb{R} la funzione $f(x) = \ln(1 + |x|) - x$.
- Calcolare l'integrale definito $\int_0^1 \sqrt{1-x^2} dx$.
- Determinare l'equazione della retta tangente al grafico della funzione $F(x) = \int_0^x \sin(t^2) dt$, nel punto di ascissa $x = 0$.
- Determinare per quali $\alpha \in \mathbb{R}$, le soluzioni della seguente equazione in \mathbb{C} ha radici complesse coniugate:

$$\alpha z^2 - 2z + 1 = 0.$$
- Determinare la posizione reciproca delle rette r_1 e r_2 , dove

$$r_1 : \begin{cases} x = 1 + t \\ y = 1 + t \\ z = t \end{cases}, t \in \mathbb{R}, \quad \text{e} \quad r_2 : \begin{cases} x = s \\ y = 3 - 2s \\ z = -1 + s \end{cases} s \in \mathbb{R}.$$
- Calcolare l'angolo tra i vettori $\mathbf{u} = (1, 0, 1)$ e $\mathbf{v} = (0, 1, -1)$.
- Stabilire se è iniettiva, suriettiva, biiettiva l'applicazione lineare $\mathcal{L} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$, definita da $\mathcal{L}(x, y, z) = (x + y + z, x + y, z)$.
- Determinare se le seguenti due matrici A e B sono simili

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

Ingegneria Chimica, dei Materiali e delle Nanotecnologie

29 agosto 2018

Analisi Matematica I e Geometria (SECONDA PARTE)

Cognome:	Nome:	Matricola:
----------	-------	------------

Teoria. (3 punti) Enunciare e dimostrare il teorema del valor medio di Lagrange. Fornire un'applicazione significativa del teorema.

Esercizio 1. (8 punti) Studiare la seguente funzione

$$f(x) = e^{\frac{x^2 - |x|}{x+1}}$$

e disegnarne un grafico qualitativo.

SOLUZIONE. Affinché la funzione sia definita occorre che $x \neq -1$. Quindi il dominio della funzione è $(-\infty, -1) \cup (-1, +\infty)$.

$$f(x) = e^{\frac{x^2 - |x|}{x+1}} = \begin{cases} e^{\frac{x^2 - x}{x+1}} & \text{se } x \geq 0 \\ e^x & \text{se } x < 0, x \neq -1. \end{cases}$$

Limiti agli estremi del dominio:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0, \quad \lim_{x \rightarrow -1} f(x) = e^{-1}.$$

Per $x \rightarrow -\infty$, f presenta un asintoto orizzontale di equazione $y = 0$, non esiste asintoto obliquo per $x \rightarrow +\infty$.

$f(x) > 0$ nel suo dominio di definizione, quindi non ammette né punti di minimo assoluto né punti di massimo assoluto.

Per lo studio della derivata prima distinguiamo i casi $x > 0$ e $x < 0$. In $(0, +\infty)$ la funzione è derivabile e vale:

$$f'(x) = e^{\frac{x^2 - x}{x+1}} \frac{(2x - 1)(x + 1) - x^2 + x}{(x + 1)^2} = e^{\frac{x^2 - x}{x+1}} \frac{x^2 + 2x - 1}{(x + 1)^2}.$$

Tale espressione mostra che

$$f' > 0 \iff x^2 + 2x - 1 > 0 \iff x > -1 + \sqrt{2}$$

quindi f decresce in $(0, -1 + \sqrt{2})$ e cresce in $(-1 + \sqrt{2}, +\infty)$. Il punto $-1 + \sqrt{2}$ è di minimo relativo e $f(-1 + \sqrt{2}) = e^{2\sqrt{2}-3}$.

Per $x < 0$, la funzione è derivabile in $(-\infty, -1) \cup (-1, 0)$:

$$f'(x) = e^x.$$

Quindi $f' > 0$ in $(-\infty, -1) \cup (-1, 0)$ ove f risulta crescente.

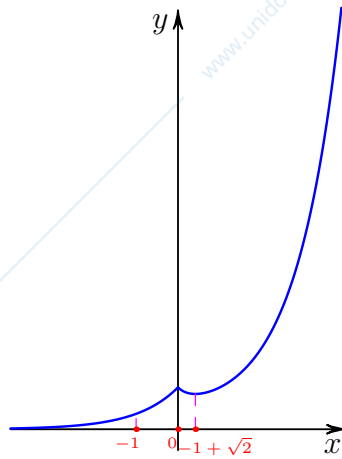
Essendo $\lim_{x \rightarrow 0^+} f'(x) = -1 \neq \lim_{x \rightarrow 0^-} f'(x) = 1$, la funzione non è derivabile nel punto angoloso $x = 0$.

La derivata seconda per $x > 0$ risulta:

$$f''(x) = e^{\frac{x^2 - x}{x+1}} \frac{(x^2 + 2x - 1)^2}{(x + 1)^4} + e^{\frac{x^2 - x}{x+1}} \frac{4}{(x + 1)^3}.$$

Per $x < 0$, $f''(x) = e^x$. $f''(x) > 0$ per ogni $x \in (-\infty, -1) \cup (-1, 0) \cup (0, +\infty)$, quindi f è convessa.

L'andamento qualitativo della funzione è descritto dal seguente grafico.



Esercizio 2. (4 punti) Al variare del parametro $\alpha > 0$ calcolare il seguente limite:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{e^{\sqrt{x} - \ln(1 + \sqrt{x})} - e^{x/2}}{x^\alpha}.$$

SOLUZIONE. Cambiamo variabile $t = \sqrt{x}$ e studiamo il limite:

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{e^{t - \ln(1+t)} - e^{t^2/2}}{t^{2\alpha}}.$$

Ricordiamo i seguenti sviluppi per $t \rightarrow 0$:

$$\log(1+t) = t - \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{3} + o(t^3), \quad e^t = 1 + t + \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{6} + o(t^3).$$

Pertanto, per $t \rightarrow 0^+$,

$$\frac{e^{t - \ln(1+t)} - e^{t^2/2}}{t^{2\alpha}} = \frac{e^{\frac{t^2}{2} - \frac{t^3}{3} + o(t^3)} - e^{t^2/2}}{t^{2\alpha}} = \frac{1 + \frac{t^2}{2} - \frac{t^3}{3} + o(t^3) - 1 - \frac{t^2}{2} + o(t^3)}{t^{2\alpha}} \sim -\frac{1}{3}t^{3-2\alpha}.$$

Quindi

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{e^{\sqrt{x} - \ln(1 + \sqrt{x})} - e^{x/2}}{x^\alpha} = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{e^{t - \ln(1+t)} - e^{t^2/2}}{t^{2\alpha}} = \begin{cases} 0 & \text{se } \alpha < \frac{3}{2} \\ -\frac{1}{3} & \text{se } \alpha = \frac{3}{2} \\ -\infty & \text{se } \alpha > \frac{3}{2}. \end{cases}$$

Esercizio 3. (6 punti) Determinare il nucleo e l'immagine della seguente applicazione lineare $\mathcal{L} : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^3$:

$$L(x, y, z, w) = (y + z + w, 2x + y - 2z, 2x + 2y - z + w).$$

Determinare un vettore $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^3$ ortogonale all'immagine di L .

SOLUZIONE. Associamo ad L la matrice rappresentativa

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -2 & 0 \\ 2 & 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Il rango di A è 2, essendo

$$\det \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \neq 0$$

e la terza riga della matrice somma delle prime due. L'immagine di L ha dimensione 2,

$$\text{Im}L = \left\{ t \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} : t, s \in \mathbb{R} \right\}.$$

Il nucleo di \mathcal{L} ha dimensione 2, ed è l'insieme delle soluzioni del sistema omogeneo

$$\begin{cases} y + z + w = 0 \\ 2x + y - 2z = 0 \\ 2x + 2y - z + w = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x = \frac{3}{2}s + \frac{1}{2}t \\ y = -s - t \\ z = s \\ w = t \end{cases}, \quad t, s \in \mathbb{R}.$$

Quindi

$$\text{Ker}L = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} = t \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} \frac{3}{2} \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} : t, s \in \mathbb{R} \right\}.$$

$\mathbf{v} = (a, b, c)$ è ortogonale ai vettori dell'immagine sse

$$\mathbf{v} \cdot (0, 2, 2) = \mathbf{v} \cdot (1, 1, 2) = 0 \iff \begin{cases} 2b + 2c = 0 \\ a + b + 2c = 0 \end{cases} \iff \mathbf{v} = (-t, -t, t), \quad t \in \mathbb{R}.$$

Possiamo prendere ad esempio $\mathbf{v} = (-1, -1, 1)$.

Esercizio 4. (6 punti) Al variare del parametro $k \in \mathbb{R}$ stabilire se la seguente matrice A è diagonalizzabile in \mathbb{R}

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ k & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

SOLUZIONE. L'equazione caratteristica di A è $\det(A - \lambda I) = -\lambda(\lambda^2 - 2\lambda - k) = 0$; pertanto, gli autovalori sono $\lambda = 0$ e $\lambda = 1 \pm \sqrt{1+k}$. Se $k < -1$ la matrice A non è diagonalizzabile in \mathbb{R} (ha autovalori complessi).

Sia $k \geq -1$. Se $k \neq 0, -1$ gli autovalori sono semplici, quindi A è diagonalizzabile.

Se $k = -1$, gli autovalori sono $\lambda_1 = 0, \lambda_2 = \lambda_3 = 1$. La matrice $A - I$ ha rango 2, quindi l'autovalore 1 non è regolare e A non è diagonalizzabile.

Se $k = 0$, gli autovalori sono $\lambda_1 = \lambda_2 = 0, \lambda_3 = 2$. La matrice A ha rango 2, quindi l'autovalore 0 non è regolare e A non è diagonalizzabile.

Cognome:	Nome:	Matricola:
----------	-------	------------

Teoria. (3 punti) Enunciare e dimostrare il teorema fondamentale del calcolo (di valutazione).

Esercizio 1. (8 punti) Studiare la seguente funzione

$$f(x) = \ln(1 + \arctan|x - 1|)$$

e disegnarne un grafico qualitativo. È richiesto anche lo studio della convessità.

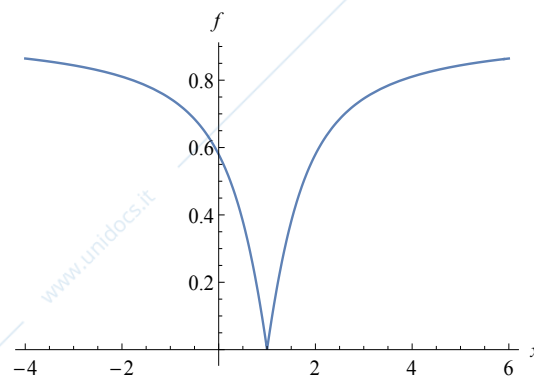
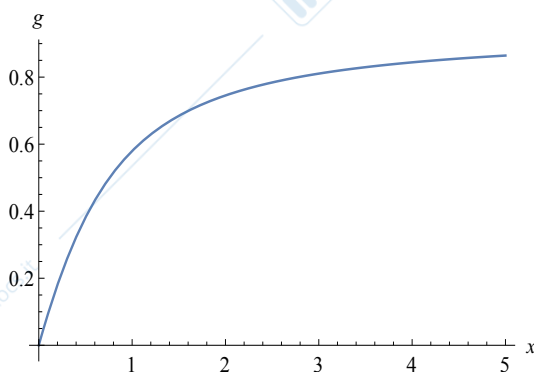
SOLUZIONE. Il grafico di f è il traslato del grafico della funzione pari $g(x) = \ln(1 + \arctan|x|)$ che studiamo su $[0, +\infty)$. Risulta

$$g(0) = 0, \quad g(x) > 0 \quad \forall x > 0, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \ln\left(1 + \frac{\pi}{2}\right),$$

con conseguente asintoto orizzontale. La derivata prima (sempre per $x > 0$) è

$$g'(x) = \frac{1}{1 + \arctan x} \frac{1}{1 + x^2} > 0 \quad \forall x > 0, \quad g'(0^+) = 1.$$

Pertanto, g è strettamente crescente su $[0, +\infty)$. Essendo poi g' il prodotto di due funzioni positive e decrescenti, ne segue che g' è decrescente e quindi g è concava su $[0, +\infty)$. Il grafico di g su $[0, +\infty)$ è nella figura di sinistra, quello di f (ottenuto per simmetria e traslazione) è in quello di destra; in $x = 1$ vi è un punto angoloso con coefficienti angolari delle semitangenti ± 1 .



Esercizio 2. (5 punti) Calcolare il limite

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{\sin x^4} \left(\frac{1}{\sqrt{\cos(2x)}} - e^{x^2} \right)$$

SOLUZIONE. Ricordiamo i seguenti sviluppi per $x, y \rightarrow 0$:

$$\sin x = x - \frac{x^3}{6} + o(x^4) \implies \sin x^4 = x^4 + o(x^{11}),$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o(x^5) \implies \cos(2x) = 1 - 2x^2 + \frac{2}{3}x^4 + o(x^5),$$

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + o(x^2) \implies e^{x^2} = 1 + x^2 + \frac{x^4}{2} + o(x^5),$$

$$(1+y)^\alpha = 1 + \alpha y + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2}y^2 + o(y^2) \implies (1+y)^{-1/2} = 1 - \frac{y}{2} + \frac{3}{8}y^2 + o(y^2)$$

$$\implies (\cos(2x))^{-1/2} = 1 + x^2 + \frac{7}{6}x^4 + o(x^5).$$

Pertanto,

$$\frac{1}{\sqrt{\cos(2x)}} - e^{x^2} \sim \frac{2}{3}x^4 \implies \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{\sin x^4} \left(\frac{1}{\sqrt{\cos(2x)}} - e^{x^2} \right) = \frac{2}{3}.$$

Esercizio 3. (6 punti)

(3.1) Al variare del parametro $\alpha \in \mathbb{R}$ discutere la risolubilità del sistema

$$\begin{cases} x + y + \alpha z + w = \alpha \\ x + w = 0 \\ -y + 2z = \alpha \end{cases}.$$

(3.2) Determinare α tale che il vettore $\mathbf{u} = (1, 0, 1, 1)$ sia ortogonale alle soluzioni del sistema del punto precedente.

SOLUZIONE. Dalle prime due equazioni ricaviamo $y + \alpha z = \alpha$ e $-y + 2z = \alpha$. Sottraendo queste due, si ottiene $(\alpha + 2)z = 2\alpha$. Pertanto,

se $\alpha = -2$ il sistema non ha soluzioni.

Se invece $\alpha \neq -2$, dalle due equazioni qui sopra otteniamo

$$z = \frac{2\alpha}{\alpha + 2}, \quad y = \frac{2\alpha - \alpha^2}{\alpha + 2}.$$

Pertanto,

se $\alpha \neq -2$ il sistema ammette le infinite soluzioni $(x, y, z, w) = \left(x, \frac{2\alpha - \alpha^2}{\alpha + 2}, \frac{2\alpha}{\alpha + 2}, -x \right) \forall x \in \mathbb{R}$.

La condizione di ortogonalità implica $\alpha = 0$.

Esercizio 4. (5 punti) Determinare $k \in \mathbb{R}$ tale che le due matrici A e D siano simili, dove

$$A = \begin{bmatrix} k & 0 & 1 \\ 0 & 1 & k \\ 1 & 0 & k \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad D = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

SOLUZIONE. Gli autovalori di D (matrice diagonale) sono $\lambda = 1$ (doppio) e $\lambda = -1$ (semplice).

L'equazione caratteristica di A è $\det(A - \lambda I) = (1 - \lambda)(\lambda^2 - 2k\lambda + k^2 - 1) = 0$; pertanto, gli autovalori sono $\lambda = 1$ e $\lambda = k \pm 1$. Questi autovalori coincidono con quelli di D (condizione necessaria per la similitudine) solo nel caso $k = 0$. Pertanto,

se $k \neq 0$ le matrici A e D non sono simili.

Se invece $k = 0$, bisogna verificare la diagonalizzabilità di A che diventa

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} .$$

Bisogna cioè verificare che l'autovalore doppio $\lambda = 1$ sia regolare. Risolvendo il sistema $Au = u$ si trova che

$$u = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \text{ è autovettore associato all'autovalore } \lambda = 1 \text{ se e solo se } x = z$$

che è l'equazione di un piano. L'autospazio ha dunque dimensione 2 (molteplicità geometrica = molteplicità algebrica) e l'autovalore $\lambda = 1$ è regolare. Quindi A è diagonalizzabile e le matrici sono simili quando $k = 0$.

Ingegneria Chimica, dei Materiali e delle Nanotecnologie
Analisi Matematica I e Geometria - SECONDA PROVA IN ITINERE (PRIMA
PARTE) - 18 gennaio 2018

LE RISPOSTE VANNO MOTIVATE.

1. Calcolare $(\sqrt{3} + i)^{30}$.
2. Determinare l'angolo formato dai vettori $u = (1, 1, 1)$ e $v = (1, -1, -\sqrt{6})$.
3. Determinare la posizione reciproca tra la retta r e il piano π , dove

$$r : \begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 1 + 2t \\ z = 2 + 2t \end{cases} \quad \pi : x + y + z - 6 = 0.$$

4. Trovare tutte le soluzioni (x, y, z) del sistema lineare

$$x + y = 2, \quad x + z = 2, \quad 2x + y + z = 4.$$

5. Scrivere il vettore $u = (2, 3)$ come combinazione lineare dei vettori $v = (1, 1)$ e $w = (1, -1)$.
6. Stabilire se l'applicazione lineare $\mathcal{L} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^4$, definita da $\mathcal{L}(x, y, z) = (x, y, x + y, x + z)$, è iniettiva.
7. Calcolare l'inversa della matrice

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}.$$

8. Determinare la dimensione del sottospazio di \mathbb{R}^4 generato dai vettori

$$u = (1, 1, 1, -1), \quad v = (1, -1, -1, 1), \quad w = (3, 1, 1, -1).$$

9. Calcolare, se possibile, i prodotti matriciali $A \cdot B$ e $B \cdot A$ dove

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

10. Determinare gli autovalori della matrice

$$\begin{pmatrix} 3 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 7 \end{pmatrix}.$$

Ingegneria Chimica, dei Materiali e delle Nanotecnologie
Analisi Matematica I e Geometria - SECONDA PROVA IN ITINERE (SECONDA
PARTE) - 18 gennaio 2018

Teoria. (3 punti) Si enunci il Teorema di Rouché-Capelli e si spieghi come si deve procedere per risolvere un sistema $m \times n$.

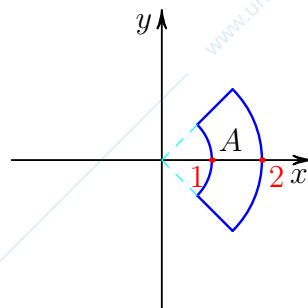
Soluzione. Confrontare il libro di testo.

Esercizio 1. (4 punti) Disegnare nel piano di Gauss gli insiemi

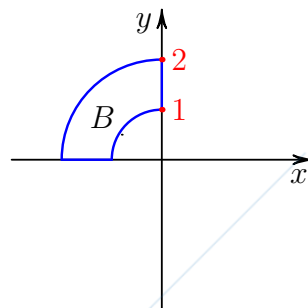
$$A = \left\{ z \in \mathbb{C} : 1 \leq |z| \leq 2, -\frac{\pi}{4} \leq \arg z \leq \frac{\pi}{4} \right\}$$

$$B = \left\{ w \in \mathbb{C} : w = \frac{-1+i}{\sqrt{2}} z, z \in A \right\}.$$

Soluzione. L'insieme A risulta:



Essendo $w = \left(\cos \frac{3}{4}\pi + i \sin \frac{3}{4}\pi \right) z$, l'insieme B si ottiene ruotando l'insieme A attorno all'origine (in senso antiorario) di un angolo $\theta = \frac{3}{4}\pi$:



Esercizio 2. (7 punti)

(2.1) Determinare il punto P' proiezione ortogonale del punto $P \equiv (1, 1, 0)$ sulla retta

$$r : \begin{cases} x = 5 + t \\ y = 1 - t \\ z = 1 + 2t. \end{cases}$$

(2.2) Determinare il punto P'' simmetrico di P rispetto alla retta r e determinare tutti i punti Q di r in modo che il triangolo $PP''Q$ sia equilatero.

Soluzione. (2.1) Definiti $\mathbf{d} = \frac{1}{\sqrt{6}}(1, -1, 2)$ il versore direzione della retta r e $A = (5, 1, 1)$, otteniamo

$$\overrightarrow{AP'} = (\overrightarrow{AP} \cdot \mathbf{d})\mathbf{d} = (-1, 1, -2),$$

da cui $P' = A + \overrightarrow{AP'} = (4, 2, -1)$.

(2.2) Essendo $\overrightarrow{PP'} = \overrightarrow{P'P''}$, $P'' = 2P' - P = (7, 3, -2)$. $Q = (5+t, 1-t, 1+2t)$ deve soddisfare $\|\overrightarrow{PQ}\| = \|\overrightarrow{PP''}\|$, da cui

$$(5+t-1)^2 + (1-t-1)^2 + (1+2t)^2 = 36+4+4 \quad \Leftrightarrow \quad 6t^2+12t-27 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad t = -1 \pm \frac{\sqrt{11}}{\sqrt{2}}.$$

Esercizio 3. (5 punti) Sia $\mathcal{L}: \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^3$ l'applicazione lineare definita, per ogni $(x, y, z, w) \in \mathbb{R}^4$, da

$$\mathcal{L}(x, y, z, w) = (x + y + z, y + z + w, x - y - w).$$

(3.1) Determinare il nucleo e l'immagine di \mathcal{L} .

(3.2) Stabilire se \mathcal{L} è iniettiva e/o suriettiva.

Soluzione. (3.1) Il nucleo di \mathcal{L} è l'insieme delle soluzioni del sistema omogeneo

$$\begin{cases} x + y + z = 0 \\ y + z + w = 0 \\ x - y - w = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = t \\ y = 0 \\ z = -t \\ w = t \end{cases}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Quindi

$$\text{Ker } \mathcal{L} = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} = t \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} : t \in \mathbb{R} \right\}.$$

Il nucleo di \mathcal{L} ha dimensione 1, dal teorema di nullità più rango si ottiene che la dimensione dell'immagine è 3. L'immagine di \mathcal{L} è quindi \mathbb{R}^3 . (3.2) \mathcal{L} è suriettiva, $\text{Im } \mathcal{L} = \mathbb{R}^3$, non è iniettiva $\text{Ker } \mathcal{L} \neq \{0\}$.

Esercizio 4. (8 punti)

(4.1) Senza fare conti, dimostrare che la matrice

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

è diagonalizzabile.

(4.2) Determinare una matrice diagonale D e una matrice S tali che $A = SDS^{-1}$.

(4.3) È possibile determinare una base ortonormale di \mathbb{R}^3 formata da autovettori di A ? Giustificare la risposta.

Soluzione. (4.1) La matrice è reale e simmetrica quindi diagonalizzabile (Teorema Spettrale).

(4.2) Cerchiamo autovalori ed autovettori di A :

$$\det(A - \lambda I) = \det \begin{bmatrix} 1 - \lambda & -1 & -1 \\ -1 & 1 - \lambda & -1 \\ -1 & -1 & 1 - \lambda \end{bmatrix} = -(\lambda - 2)(\lambda^2 - \lambda - 2) = 0$$

sse

$$\lambda_1 = -1, \lambda_2 = \lambda_3 = 2.$$

Per determinare gli autovettori relativi a $\lambda = -1$ risolviamo il sistema

$$\begin{cases} 2x - y - z = 0 \\ -x + 2y - z = 0 \\ -x - y + 2z = 0 \end{cases} \quad \text{sse} \quad \begin{cases} x = t \\ y = t \\ z = t \end{cases}$$

Otteniamo che gli autovettori relativi a $\lambda = -1$ sono i vettori

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

al variare di $t \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

Per determinare gli autovettori relativi a $\lambda = 2$ risolviamo il sistema

$$\begin{cases} -x - y - z = 0 \\ -x - y - z = 0 \\ -x - y - z = 0 \end{cases} \quad \text{sse} \quad \begin{cases} x = -s - t \\ y = s \\ z = t \end{cases}$$

Otteniamo che gli autovettori relativi a $\lambda = 2$ sono i vettori

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = t \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

al variare di $t, s \in \mathbb{R}$, con $(t, s) \neq (0, 0)$. Le matrici richieste sono quindi

$$S = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad D = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

(4.3) Il Teorema Spettrale assicura l'esistenza di una base ortonormale di autovettori.

Cognome:	Nome:	Matricola:
----------	-------	------------

Prescritto	Teoria	Es.1	Es.2	Es.3	Es.4	Totale
------------	--------	------	------	------	------	--------

LE RISPOSTE VANNO MOTIVATE.

1. Calcolare il limite $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{n} + \sin \frac{1}{n} \right) \sqrt{4n^2 + 2n + 1}$.

2. Stabilire se la funzione $f(x) = \begin{cases} \frac{e^{2x}-1}{e^x-1} & \text{se } x \neq 0 \\ 2 & \text{se } x = 0 \end{cases}$ è continua in $x_0 = 0$.

3. Stabilire se la funzione $F(x) = xe^{x-1} + \sqrt[3]{x^2 - 1}$ possiede almeno uno zero nell'intervallo $I = [0, 1]$.

4. Calcolare l'integrale $I = \int_0^1 x e^x dx$.

5. Stabilire se la funzione $F(x) = \int_0^x (1 - e^{\sin t}) dt$ possiede un punto di massimo in $x_0 = 0$.

6. Disegnare sul piano di Gauss l'insieme $\Omega = \{z \in \mathbb{C} : |z - 1 - i| \leq 1, |z + 1 - i| \leq 2\}$.

7. Determinare una base del nucleo dell'applicazione lineare $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ rappresentata, rispetto alle basi canoniche, dalla matrice $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

8. Stabilire se le matrici $A = \begin{bmatrix} 1 & \sqrt{2} \\ \pi & -1 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 1 - \sqrt{2} & \pi \\ 2\pi & \sqrt{2} \end{bmatrix}$ sono simili.

9. Determinare una base ortogonale del sottospazio $X = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x - y + 2z = 0\}$ di \mathbb{R}^3 .

10. Determinare la distanza tra il punto $P \equiv (1, 2, -1)$ e il piano $\pi : 2x - y + z + 3 = 0$.

Cognome:	Nome:	Matricola:
-----------------	--------------	-------------------

Teoria. (3 punti) Enunciare e dimostrare il primo teorema fondamentale del calcolo integrale.



Esercizio 1. (8 punti) Studiare la funzione definita da

$$f(x) = \cos^2(x) - \cos(x)$$

e disegnarne un grafico qualitativo. (È richiesto anche lo studio della derivata seconda.)

SOLUZIONE.

La funzione f è una funzione pari definita su tutto \mathbb{R} ed è periodica di periodo 2π . Possiamo pertanto restringerci all'intervallo $[-\pi, \pi]$ (in realtà, per la simmetria, potremmo restringerci all'intervallo $[0, \pi]$).

La funzione f si annulla quando $\cos x = 0$ oppure quando $\cos x = 1$, ossia per $x = 0$ e per $x = \pm\frac{\pi}{2}$. Inoltre, $f(x) \geq 0$ se e solo se $\cos x(\cos x - 1) \geq 0$, ossia se e solo se $-\pi \leq x \leq -\pi/2$ oppure $\pi/2 \leq x \leq \pi$.

La derivata prima e la derivata seconda sono

$$f'(x) = -2 \cos x \sin x + \sin x = \sin x(1 - 2 \cos x)$$

$$f''(x) = 2 \sin^2 x - 2 \cos^2 x + \cos x = 2 + \cos x - 4 \cos^2 x.$$

Si ha $f'(x) = 0$ se e solo se $\sin x = 0$ oppure $\cos x = \frac{1}{2}$, ossia se e solo se $x = 0$, $x = \pm\pi$ o $x = \pm\frac{\pi}{3}$. Pertanto, si ha

$$f''(0) = -1 < 0$$

$(0, 0)$ punto di minimo

$$f''(\pm\pi) = -3 < 0$$

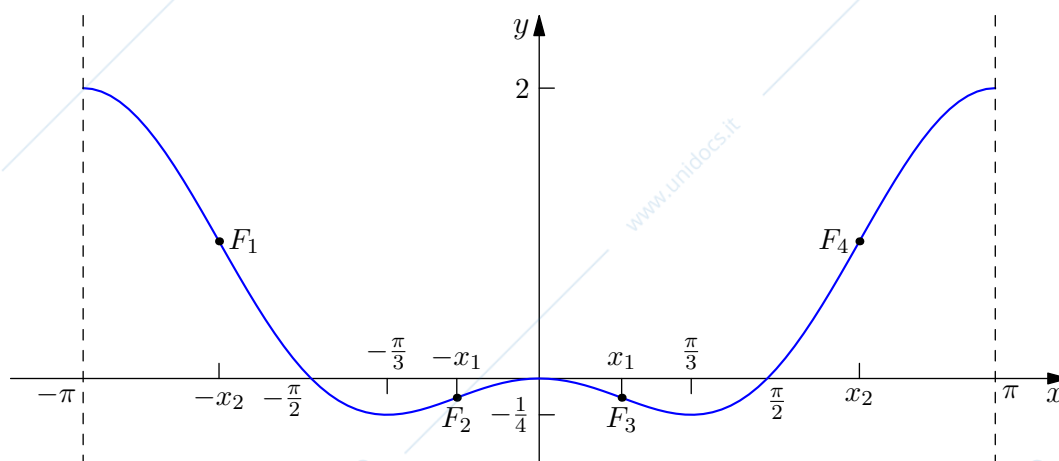
$(\pm\pi, 2)$ punti di massimo

$$f''\left(\pm\frac{\pi}{3}\right) = \frac{3}{2} > 0$$

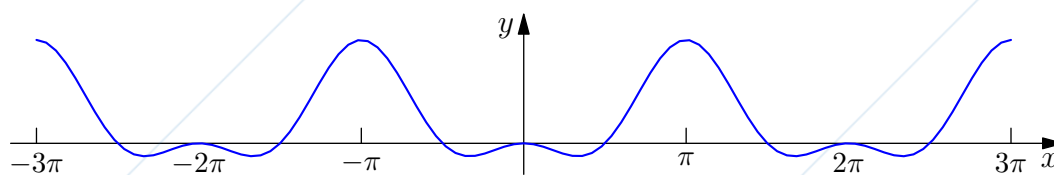
$\left(\pm\frac{\pi}{3}, -\frac{1}{4}\right)$ punti di minimo.

Si ha $f''(x) = 0$ se e solo se $4 \cos^2 x - \cos x - 2 = 0$, ossia se e solo se $\cos x = \frac{1 \pm \sqrt{33}}{8}$, da cui si hanno le soluzioni $\pm\alpha = \pm \arccos \frac{1 + \sqrt{33}}{8} \simeq \pm 0.567829$ e $\pm\beta = \pm \arccos \frac{1 - \sqrt{33}}{8} \simeq \pm 2.20566$. Pertanto, si ha $f''(x) \geq 0$ se e solo se $4 \cos^2 x - \cos x - 2 \leq 0$, ossia se e solo se $\frac{1 - \sqrt{33}}{8} \leq \cos x \leq \frac{1 + \sqrt{33}}{8}$. Questo accade se e solo se $-\beta \leq x \leq -\alpha$ e $\alpha \leq x \leq \beta$. Quindi, la funzione f presenta concavità rivolta verso l'alto per $-\beta < x < -\alpha$ e $\alpha < x < \beta$ e presenta concavità rivolta verso il basso per $-\pi < x < -\beta$, $-\alpha < x < \alpha$ e $\beta < x < \pi$. Infine, f ha un flesso nei punti $F_1 \equiv (-\beta, f(-\beta))$, $F_2 \equiv (-\alpha, f(-\alpha))$, $F_3 \equiv (\alpha, f(\alpha))$ e $F_4 \equiv (\beta, f(\beta))$. In particolare, $f(\alpha) = \frac{13 - 3\sqrt{33}}{32} \simeq -0.132303$ e $f(\beta) = \frac{13 + 3\sqrt{33}}{32} \simeq 0.944803$.

Il grafico della funzione, ristretto all'intervallo $[-\pi, \pi]$, è



Il grafico della funzione, ristretto all'intervallo $[-3\pi, 3\pi]$, è



Esercizio 2. (4 punti)

(a) Scrivere lo sviluppo di MacLaurin del terzo ordine della funzione f definita da

$$f(x) = (1+x)e^{-x} + x \cos x - (1-x) \ln(1+x) - 1.$$

(b) Stabilire se la funzione f possiede un punto di minimo in $x_0 = 0$.

SOLUZIONE.

(a) Per $x \rightarrow 0$, si hanno gli sviluppi

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + o(x^3)$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + o(x^2)$$

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + o(x^3).$$

Pertanto, per $x \rightarrow 0$, si ha

$$\begin{aligned} f(x) &= (1+x)e^{-x} + x \cos x - (1-x) \ln(1+x) - 1 \\ &= (1+x) \left(1 - x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6} + o(x^3) \right) + x \left(1 - \frac{x^2}{2} + o(x^2) \right) - (1-x) \left(x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + o(x^3) \right) - 1 \\ &= 1 - x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6} + o(x^3) + x - x^2 + \frac{x^3}{2} + o(x^3) + x - \frac{x^3}{2} + o(x^3) \\ &\quad - x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} + o(x^3) + x^2 - \frac{x^3}{2} + o(x^3) - 1 \\ &= x^2 - x^3 + o(x^3). \end{aligned}$$

(b) Dallo sviluppo trovato, si ha $f'(0) = 0$ e $f''(0) = 2 > 0$. Di conseguenza, la funzione f possiede un punto di minimo in $x_0 = 0$.

Esercizio 3. (6 punti) Sia $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ l'applicazione lineare definita da $f(x, y, z) = (x - y + z, x + y - z, 2x - y)$.

- (a) Scrivere la matrice A che rappresenta f rispetto alla base canonica.
 (b) Stabilire se \mathbb{R}^3 possiede una base formata da autovettori di f . In caso affermativo, determinare una tale base.

SOLUZIONE.

- (a) La matrice che rappresenta f rispetto alla base canonica è

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 0 \end{bmatrix}.$$

- (b) Lo spazio \mathbb{R}^3 possiede una base formata da autovettori di f se e solo se la matrice A è diagonalizzabile. Poiché

$$|\lambda I - A| = \begin{vmatrix} \lambda - 1 & 1 & -1 \\ -1 & \lambda - 1 & 1 \\ -2 & 1 & \lambda \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \lambda - 1 & 1 & -1 \\ \lambda - 1 & \lambda - 1 & 1 \\ \lambda - 1 & 1 & \lambda \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \lambda - 1 & 1 & -1 \\ 0 & \lambda - 2 & 2 \\ 0 & 0 & \lambda + 1 \end{vmatrix} = (\lambda - 1)(\lambda - 2)(\lambda + 1),$$

gli autovalori di A sono 1, 2, -1. Pertanto, possedendo tre autovalori reali e distinti, la matrice A è diagonalizzabile. Passiamo ora a determinare gli autospazi di A .

Per $\lambda = 1$, l'autospazio è determinato dal sistema

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{ossia} \quad \begin{cases} y - z = 0 \\ -x + z = 0 \\ -2x + y + z = 0 \end{cases}$$

che ha soluzione $x = y = z$. Quindi $V_1 = \langle (1, 1, 1) \rangle$.

Per $\lambda = 2$, l'autospazio è determinato dal sistema

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ -2 & 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{ossia} \quad \begin{cases} x - y - z = 0 \\ -x + y + z = 0 \\ -2x + y + 2z = 0 \end{cases}$$

che ha soluzione $y = 0, z = x$. Quindi $V_2 = \langle (1, 0, 1) \rangle$.

Per $\lambda = -1$, l'autospazio è determinato dal sistema

$$\begin{bmatrix} -2 & 1 & -1 \\ -1 & -2 & 1 \\ -2 & 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{ossia} \quad \begin{cases} -2x + y - z = 0 \\ -x - 2y + z = 0 \\ -2x + y - z = 0 \end{cases}$$

che ha soluzione $y = -3x, z = -5x$. Quindi $V_3 = \langle (1, -3, -5) \rangle$.

In conclusione, una base di \mathbb{R}^3 formata da autovettori di f è data da

$$\{(1, 1, 1), (1, 0, 1), (1, -3, -5)\}.$$

Esercizio 4. (6 punti) Calcolate, al variare del parametro reale k , il rango della matrice

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & k-1 \\ k & 1 & 2k & k-1 \\ k+1 & k & 3k & k \end{bmatrix}.$$

SOLUZIONE. Per $k = 1$, si ha la matrice

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 3 & 1 \end{bmatrix}$$

che ha rango 2, avendo solo due righe linearmente indipendenti.

Per $k \neq 1$, possiamo scegliere il minore (di nord-ovest)

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ k & 1 \end{vmatrix} = 1 - k \neq 0.$$

Orlandolo in tutti i modo possibili, abbiamo i due minore di ordine 3:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ k & 1 & 2k \\ k+1 & k & 3k \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ k & 1 & 0 \\ k+1 & k & k-2 \end{vmatrix} = (1-k)(k-2)$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & k-1 \\ k & 1 & k-1 \\ k+1 & k & k \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & k-1 \\ k-1 & 0 & 0 \\ k+1 & k & k \end{vmatrix} = k(1-k)(2-k).$$

Questi minori si annullano contemporaneamente solo per $k = 2$. Quindi, $r(A) = 3$ per $k \neq 2$ e $r(A) = 2$ per $k = 2$

In conclusione, si ha

$$r(A) = \begin{cases} 3 & \text{per } k \neq 1, 2 \\ 2 & \text{per } k = 1, 2. \end{cases}$$