

CALCOLO DI PRIMITIVE

Premessa. Illustriamo qui brevemente le principali tecniche di integrazione. Un lavoro più approfondito verrà svolto durante le esercitazioni.

► Nel seguito, indichiamo con f una funzione continua su un certo intervallo $[a, b]$ e con F una sua primitiva, e consideriamo integrali indefiniti relativi a tale intervallo.

1. PRIMITIVE IMMEDIATE

► Nella tabella, $\alpha \neq -1$ e $k \neq 0$ sono numeri reali, mentre $a \neq 1$ è un numero positivo.

$f(x)$	$F(x)$
$\frac{1}{x}$	$\log x $
x^α	$\frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}$
$\sin x$	$-\cos x$
$\cos x$	$\sin x$
$\frac{1}{\cos^2 x}$	$\tan x$
$\frac{1}{\sin^2 x}$	$-\cot x$
e^x	e^x
a^x	$\frac{a^x}{\log a}$
$\frac{1}{1+x^2}$	$\arctan x$
$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\arcsin x$
$\frac{1}{\sqrt{x^2+k}}$	$\log x + \sqrt{x^2+k} $
$\sinh x$	$\cosh x$
$\cosh x$	$\sinh x$
$\frac{1}{\cosh^2 x}$	$\tanh x$

♣ **Osservazione.** Sono dette *funzioni elementari* le composizioni o combinazioni finite di funzioni razionali, algebriche, trigonometriche o esponenziali. Tuttavia (e lo si può dimostrare) non tutte le funzioni elementari hanno primitiva elementare. Tre esempi sono

$$e^{-x^2} \quad \frac{\sin x}{x} \quad \frac{e^x}{1+x}$$

le cui primitive sono classificate tra le funzioni cosiddette “speciali”.

2. CAMBIO DI VARIABILI

► Si utilizza la seguente formula (cfr. Proposizione 41 della Dispensa):

$$\int f(\psi(x))\psi'(x) dx = F(\psi(x)) + C$$

dove $\psi : [\alpha, \beta] \rightarrow [a, b]$ è suriettiva e derivabile e $\psi' \in R(\alpha, \beta)$.

✂ **Esempi:**¹

- $\int \cos 2x dx = \frac{1}{2} \int 2 \cos 2x dx = \frac{1}{2} \sin 2x + C$

- $\int e^{\sin x} \cos x dx = \int e^{\sin x} (\sin x)' dx = e^{\sin x} + C$

- $\int \frac{1}{1+x} dx = \log |1+x| + C$

- $\int \tan x dx = \int \frac{\sin x}{\cos x} dx = - \int \frac{(\cos x)'}{\cos x} dx = - \log |\cos x| + C$

► Gli ultimi due esempi sono un caso particolare di

$$\int \frac{\psi'(x)}{\psi(x)} dx = \log |\psi(x)| + C$$

♠ **Esercizio.** Calcolare le primitive delle seguenti funzioni:

- $\tanh x$

- $\frac{\cos x}{\cos^2(\sin x)}$

- $e^x \cos e^x$

- $\frac{3x}{1+x^4}$ [Si riscrive la funzione come $\frac{3}{2} \frac{2x}{1+(x^2)^2}$ notando che $(x^2)' = 2x$]

♣ **Osservazione.** Se la ψ è invertibile, allora si può porre $\psi(x) = t$ ottenendo

$$\int f(\psi(x))\psi'(x) dx \Big|_{x=\psi^{-1}(t)} = \int f(t) dt$$

¹Qui usiamo anche la formula $\int \lambda f(x) dx = \lambda \int f(x) dx$ (vedi paragrafo successivo).

✂ **Esempio:** Si consideri la funzione nella variabile t

$$f(t) = \frac{e^t}{1 + e^t}$$

(i) Per trovare la primitiva $F(t)$ di $f(t)$ operiamo la sostituzione

$$e^t = x \quad \Rightarrow \quad t = \log x$$

Se dunque definiamo

$$\psi(x) = \log x \quad \text{notando che} \quad \psi'(x) = \frac{1}{x}$$

la formula precedente ci dà

$$\int \frac{e^{\psi(x)}}{1 + e^{\psi(x)}} \psi'(x) dx = \int \frac{1}{1 + x} dx = \int f(t) dt$$

da cui

$$\int f(t) dt = \log(1 + x) + C$$

Il valore assoluto è in questo caso superfluo poiché $x > 0$. Riscrivendo il tutto in t si perviene al risultato finale

$$\int f(t) dt = \log(1 + e^t) + C$$

(ii) Se invece si deve calcolare l'integrale definito, ad esempio:

$$\int_0^1 f(t) dt$$

si opera la stessa sostituzione di prima, ma le cose si semplificano in quanto non ci si deve ricondurre alla variabile t . Infatti, i nuovi estremi di integrazione nella variabile x diventano:

$$t = 0 \Rightarrow x = e^0 = 1 \quad t = 1 \Rightarrow x = e^1 = e$$

Otteniamo quindi

$$\int_0^1 f(t) dt = \int_1^e \frac{1}{1 + x} dx = \log(1 + x) \Big|_1^e = \log(1 + e) - \log 2 = \log\left(\frac{1 + e}{2}\right)$$

3. METODO DI SCOMPOSIZIONE

► Si utilizza la linearità dell'integrale, ovvero

$$\int [f(x) + \lambda g(x)] dx = \int f(x) dx + \lambda \int g(x) dx$$

✂ Esempi:

- $\int \tan^2 x dx = \int \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} dx = \int \frac{1}{\cos^2 x} dx - \int dx = \tan x - x + C$
- $\int \frac{x}{1+x} dx = \int dx - \int \frac{1}{1+x} dx = x - \log|1+x| + C$
- $\int \sin^2 x dx = \int \frac{1 - \cos 2x}{2} dx = \frac{1}{2} \int dx - \frac{1}{2} \int \cos 2x dx = \frac{x}{2} - \frac{1}{4} \sin 2x + C$

♠ **Esercizio.** Calcolare la primitiva di $\cos^2 x$.

♠ **Esercizio.** Calcolare la primitiva di $\frac{1}{\sin 2x}$

Suggerimento: usare la relazione

$$\frac{1}{\sin 2x} = \frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{2 \sin x \cos x} = \frac{1}{2} \tan x + \frac{1}{2} \cot x$$

♠ **Esercizio.** Usando il punto precedente, calcolare la primitiva di $\frac{1}{\sin x}$

4. INTEGRAZIONE PER PARTI

► Data un'altra funzione continua g con primitiva G si ha (cfr. Proposizione 40 della Dispensa):

$$\int f(x)G(x)dx = F(x)G(x) - \int F(x)g(x)dx$$

✂ Esempi:

- $\int xe^x dx = xe^x - \int e^x dx = xe^x - e^x + C$
- $\int x^2 e^x dx = x^2 e^x - 2 \int xe^x dx = x^2 e^x - 2xe^x + 2e^x + C$
- $\int \log x dx = \int 1 \cdot \log x dx = x \log x - \int x \cdot \frac{1}{x} dx = x \log x - \int dx = x \log x - x + C$

♣ **Osservazione.** Quando l'integrazione per parti si reitera (come nel secondo esempio) si deve continuare a derivare la funzione derivata al passo precedente, altrimenti si torna all'integrale di partenza.

♣ **Osservazione (ovvero: sul perché abbiamo la fissa della costante arbitraria).** Volendo calcolare l'integrale indefinito

$$\int \frac{1}{x} dx$$

invece di utilizzare direttamente la tabella lo calcoliamo per parti:

$$\int \frac{1}{x} dx = \int 1 \cdot \frac{1}{x} dx = x \cdot \frac{1}{x} - \int x \cdot \left(-\frac{1}{x^2}\right) dx = 1 + \int \frac{1}{x} dx$$

Sottraendo l'integrale a entrambi i membri concludiamo che $0 = 1$.

Morale: lo studente consideri seriamente di rivalutare il ruolo della costante arbitraria nell'integrale indefinito. Nonostante qualcuno possa pensare il contrario, non è solo un vezzo del docente!

♠ **Esercizio.** Data f con f'' continua, calcolare $f(2)$ sapendo che

$$f(3) = 2 \quad f'(2) = 4 \quad \int_2^3 (3-x)f''(x) dx = -3$$

Svolgimento. Integrando per parti otteniamo

$$\int_2^3 (3-x)f''(x) dx = (3-x)f'(x) \Big|_2^3 + \int_2^3 f'(x) dx = -f'(2) + f(3) - f(2)$$

Dai dati a disposizione, concludiamo che

$$-3 = -4 + 2 - f(2) \quad \Rightarrow \quad f(2) = 1$$

5. INTEGRAZIONE PER RICORRENZA

Questa è una tecnica basata su un'integrazione per parti reiterata, molto utile quando si abbia un prodotto di due funzioni con primitiva (e derivata) ricorrente (seni-coseni trigonometrici-iperbolici o funzioni esponenziali). La illustriamo attraverso due esempi.

✂ **Esempio 1:** Ricalcoliamo con questo metodo la primitiva di $\sin^2 x$. Si ha

$$\begin{aligned} I &:= \int \sin^2 x dx = \int \sin x \sin x dx = -\cos x \sin x - \int (-\cos x) \cos x dx \\ &= -\cos x \sin x + \int \cos^2 x dx = -\cos x \sin x + \int [1 - \sin^2 x] dx \\ &= -\cos x \sin x + x - I \end{aligned}$$

6

Si noti che abbiamo riottenuto I , ma col segno meno. Portando allora I a sinistra (e ricordando che contiene una costante arbitraria), otteniamo

$$2I = x - \cos x \sin x + C \quad \Rightarrow \quad I = \frac{x - \cos x \sin x}{2} + C$$

✂ **Esempio 2:** Calcoliamo la primitiva di

$$e^{3x} \sin 2x$$

Integrando per parti

$$I := \int e^{3x} \sin 2x \, dx = \frac{1}{3} e^{3x} \sin 2x - \frac{2}{3} \int e^{3x} \cos 2x \, dx$$

A questo punto, un'ulteriore integrazione per parti fornisce

$$\int e^{3x} \cos 2x \, dx = \frac{1}{3} e^{3x} \cos 2x + \frac{2}{3} \int e^{3x} \sin 2x \, dx = \frac{1}{3} (e^{3x} \cos 2x + 2I)$$

Mettendo insieme i risultati, arriviamo quindi all'uguaglianza

$$I = \frac{e^{3x}(3 \sin 2x - 2 \cos 2x)}{9} - \frac{4}{9} I$$

e ragionando come prima troviamo

$$\frac{13}{9} I = \frac{e^{3x}(3 \sin 2x - 2 \cos 2x)}{9} + C \quad \Rightarrow \quad I = \frac{e^{3x}(3 \sin 2x - 2 \cos 2x)}{13} + C$$