Politecnico di Milano
Analisi Matematica I (Prof. Vittorino Pata)

LIMITI DI FUNZIONI REALI

In quanto segue, indichiamo con

$$\overline{\mathbb{R}} = [-\infty, +\infty]$$

la *retta reale estesa*, definita formalmente come l'unione della retta reale $\mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$ e dei due elementi $+\infty$ e $-\infty$.

1. Punti di accumulazione e punti isolati

Definizione 1. [Intorno di un punto]. Chiamiamo *intorno* di $x \in \mathbb{R}$, indicato genericamente con il simbolo $\mathcal{U}(x)$, un sottinsieme di $\mathbb{R}$ della forma

$$\mathcal{U}(x) = (x - \varepsilon, x + \varepsilon), \quad \varepsilon > 0.$$

Chiamiamo *intorno* di $+\infty$, indicato genericamente con il simbolo $\mathcal{U}(+\infty)$, un sottinsieme di $\mathbb{R}$ della forma

$$\mathcal{U}(+\infty) = (M, +\infty), \quad M \in \mathbb{R}.$$

Analogamente, definiamo l'intorno di $-\infty$ come

$$\mathcal{U}(-\infty) = (-\infty, M), \quad M \in \mathbb{R}.$$

Osservazione 2. Si noti che gli intorni (anche quelli di $\pm\infty$) sono sempre sottinsiemi di $\mathbb{R}$.

Dato un sottinsieme $A \subset \mathbb{R}$ e un punto $x \in \overline{\mathbb{R}}$, la nozione di intorno ci permette di tradurre matematicamente l'idea che ci si possa avvicinare con precisione arbitraria a x muovendosi all'interno di A.

Definizione 3. [Punto di accumulazione]. Siano $A \subset \mathbb{R}$ e $x \in \overline{\mathbb{R}}$. Allora x è detto *punto di accumulazione*[1] per A se ogni intorno di x contiene almeno

[1] Generalmente la nozione di punto di accumulazione viene data per punti di $\mathbb{R}$. Qui diamo una definizione generalizzata valida per punti di $\overline{\mathbb{R}}$.

un punto di A diverso da x (quest'ultima richiesta è superflua se $x = \pm\infty$). Tradotto in formule,

$$\forall \mathcal{U}(x) \quad \Rightarrow \quad \dot{\mathcal{U}}(x) \cap A \neq \emptyset,$$

dove l'insieme $\dot{\mathcal{U}}(x)$ è l'*intorno bucato* di x definito come

$$\dot{\mathcal{U}}(x) = \begin{cases} \mathcal{U}(x) \setminus \{x\} & \text{se } x \in \mathbb{R}, \\ \mathcal{U}(x) & \text{se } x = \pm\infty. \end{cases}$$

Esercizio 4. Mostrare che se ogni intorno di x contiene almeno un punto di A diverso da x, allora ne contiene infiniti.

L'esercizio di fatto consiste nel mostrare che se x è punto di accumulazione per A allora esiste una successione a_n di punti di A diversi da x tale che a_n tende a x. Piuttosto facilmente si verifica anche l'implicazione inversa. Riassumiamo queste considerazioni nel seguente

Teorema 5. *Sia $A \subset \mathbb{R}$, e sia $x \in \overline{\mathbb{R}}$. Allora x è punto di accumulazione per A se e solo se esiste $a_n \in A$ tale che $a_n \to x$, con $a_n \neq x$ per ogni n.*

Osservazione 6. Si noti che $+\infty$ [risp. $-\infty$] è punto di accumulazione per un insieme $A \subset \mathbb{R}$ se e solo se A non è superiormente [risp. inferiormente] limitato.

I punti appartenenti a un insieme $A \subset \mathbb{R}$ che non sono di accumulazione per A sono detti isolati.

Definizione 7. [Punto isolato]. Dato $A \subset \mathbb{R}$, un punto $x \in A$ è detto *punto isolato* se esiste un intorno di x che non contiene alcun punto di A all'infuori di x. In formule,

$$\exists \mathcal{U}(x) \quad \text{t.c.} \quad \mathcal{U}(x) \cap A = \{x\}.$$

2. Definizione di limite

Consideramo ora una funzione

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \quad \text{di dominio} \quad \mathfrak{D} \subset \mathbb{R}.$$

Dato un punto $x \in \overline{\mathbb{R}}$, siamo interessati a studiare il comportamento della f nelle vicinanze di x, indipendentemente dal valore assunto dalla funzione in x stesso (che peraltro potrebbe non appartenere al dominio $\mathfrak{D}$). Poiché f non è definita fuori dal proprio dominio, ciò implica necessariamente che x sia un punto di accumulazione per $\mathfrak{D}$.

Definizione 8. **[Limite].** Sia $\ell \in \overline{\mathbb{R}}$ e sia $x \in \overline{\mathbb{R}}$ un punto di accumulazione per $\mathfrak{D}$. Diciamo che f ammette limite ℓ in x, e scriviamo

$$\lim_{t \to x} f(t) = \ell,$$

se vale la seguente condizione:

$$\forall \mathcal{U}(\ell) \;\; \exists \mathcal{U}(x) \quad \text{t.c.} \quad t \in \dot{\mathcal{U}}(x) \cap \mathfrak{D} \;\Rightarrow\; f(t) \in \mathcal{U}(\ell). \tag{†}$$

In altre parole, in corrispondenza di ogni intorno $\mathcal{U}(\ell)$ esiste un intorno $\mathcal{U}(x)$ (che dipende dall'intorno $\mathcal{U}(\ell)$ fissato) tale che se t appartiene contemporaneamente al dominio $\mathfrak{D}$ e all'intorno bucato $\dot{\mathcal{U}}(x)$ (quindi in particolare $t \neq x$), allora l'immagine $f(t)$ cade nell'intorno $\mathcal{U}(\ell)$. Questo traduce l'idea che la funzione assuma valori arbitrariamente vicini a ℓ per ogni valore di t sufficientemente vicino (ma non uguale) a x.

► La Definizione 8 riassume in realtà nove possibili definizioni, a seconda che ℓ e x siano numeri reali oppure $\pm\infty$.

Esempio 9. Esplicitiamo la definizione nel caso in cui ℓ e x siano entrambi numeri reali. In tal caso, i generici intorni hanno la forma

$$\mathcal{U}(\ell) = (\ell - \varepsilon, \ell + \varepsilon) \qquad \text{e} \qquad \mathcal{U}(x) = (x - \delta, x + \delta),$$

con $\varepsilon, \delta > 0$. Dunque $f(t) \in \mathcal{U}(\ell)$ e $t \in \dot{\mathcal{U}}(x)$ diventano rispettivamente

$$|f(t) - \ell| < \varepsilon \qquad \text{e} \qquad 0 < |t - x| < \delta.$$

Pertanto la (†) si traduce in

$$\forall \varepsilon > 0 \;\; \exists \delta > 0 \quad \text{t.c.} \quad t \in \mathfrak{D},\; 0 < |t - x| < \delta \;\Rightarrow\; |f(t) - \ell| < \varepsilon,$$

dove δ dipende da ε.

Esercizio 10. Si espliciti la (†) nei rimanenti casi.

Osservazione 11. Consideriamo una successione a_n che tenda ad un limite reale ℓ. Come sappiamo, ciò significa che

$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists M \in \mathbb{N} \quad \text{t.c.} \quad n > M \Rightarrow |a_n - \ell| < \varepsilon,$$

dove M dipende dalla scelta di ε. Definendo allora la funzione f di dominio $\mathfrak{D} = \mathbb{N}$ come

$$f(n) = a_n, \quad \forall n \in \mathbb{N},$$

si vede subito che la nozione di limite per successioni non è altro che un caso particolare della (†).

3. Limiti successionali

Per calcolare i limiti della funzione reale f ci si può appellare ai risultati noti sui limiti di successioni, come mostra il seguente teorema.

Teorema 12. *Sia $\ell \in \overline{\mathbb{R}}$ e sia $x \in \overline{\mathbb{R}}$ un punto di accumulazione per $\mathfrak{D}$. I seguenti fatti sono equivalenti:*

(i) $\lim_{t \to x} f(t) = \ell$;

(ii) *per ogni successione $a_n \in \mathfrak{D}$ tale che $a_n \to x$, con $a_n \neq x$ per ogni n, si ha la convergenza $f(a_n) \to \ell$.*

Esercizio 13. Si dimostri il Teorema 12.

► La principale conseguenza del Teorema 12 è che il calcolo di limiti per le funzioni reali si riduce al calcolo di limiti per le successioni.

► In particolare, tutti i teoremi noti per le successioni si trasferiscono immediatamente al caso delle funzioni. Valgono infatti i seguenti risultati:

I. Operazioni con i limiti. Il limite in un punto della somma, prodotto, quoziente di due funzioni è rispettivamente uguale alla somma, prodotto, quoziente (se il denominatore è diverso da zero) dei due limiti[2], a patto che il risultato non sia una forma di indecisione (cioè del tipo $+\infty - \infty$, $\frac{\infty}{\infty}$, $\frac{0}{0}$ oppure $0 \cdot \infty$).

[2] Ovviamente il punto in questione deve essere di accumulazione anche per il dominio della somma, prodotto o quoziente, altrimenti tale limite non è definito.

II. Unicità del limite. Se f ammette limite in un punto $x \in \overline{\mathbb{R}}$ il valore di tale limite è unico.

III. Permanenza del segno. Se f ha limite $\ell > 0$ (oppure $\ell = +\infty$) in un punto $x \in \overline{\mathbb{R}}$, allora

$$\exists \mathcal{U}(x) \quad \text{t.c.} \quad t \in \dot{\mathcal{U}}(x) \cap \mathfrak{D} \ \Rightarrow \ f(t) > 0.$$

IV. a. Confronto. Siano $x \in \overline{\mathbb{R}}$ e $\ell \in \mathbb{R}$, e siano f, g, h tre funzioni definite in un intorno bucato $\dot{\mathcal{U}}(x)$ tali che

$$g(t) \leq f(t) \leq h(t), \quad \forall t \in \dot{\mathcal{U}}(x).$$

Allora

$$\text{se } \lim_{t \to x} g(t) = \lim_{t \to x} h(t) = \ell \quad \Rightarrow \quad \lim_{t \to x} f(t) = \ell.$$

IV. b. Confronto. Sia $x \in \overline{\mathbb{R}}$, e siano f, g due funzioni definite in un intorno bucato $\dot{\mathcal{U}}(x)$ tali che

$$g(t) \leq f(t), \quad \forall t \in \dot{\mathcal{U}}(x).$$

Allora

$$\text{se } \lim_{t \to x} g(t) = +\infty \quad \Rightarrow \quad \lim_{t \to x} f(t) = +\infty,$$

$$\text{se } \lim_{t \to x} f(t) = -\infty \quad \Rightarrow \quad \lim_{t \to x} g(t) = -\infty.$$

4. Punti di frontiera

In generale è interessante calcolare i limiti della f nei punti (ovviamente di accumulazione) giacenti sulla frontiera del dominio $\mathfrak{D}$.

Definizione 14. [Punto di frontiera]. Dato $A \subset \mathbb{R}$, un punto $x \in \mathbb{R}$ è detto *punto di frontiera* per A se ogni intorno di x contiene almeno un punto di A e un punto del complementare di A. In formule,

$$\forall \mathcal{U}(x) \quad \Rightarrow \quad \mathcal{U}(x) \cap A \neq \emptyset \ \wedge \ \mathcal{U}(x) \cap A^C \neq \emptyset.$$

Definizione 15. [Punto interno]. Dato $A \subset \mathbb{R}$, un punto $x \in A$ è detto invece *punto interno* se esiste un intorno di x contenuto in A. In formule,

$$\exists \mathcal{U}(x) \quad \Rightarrow \quad \mathcal{U}(x) \subset A.$$

▶ **Riassumendo:** Dato un insieme $A \subset \mathbb{R}$ ed un punto $x \in \mathbb{R}$, si possono dunque presentare le seguenti situazioni.

• Se $x \in A$, allora x può essere:

- un punto isolato di A, e in tal caso è un punto di frontiera;
- un punto di accumulazione per A, e in tal caso può essere un punto di frontiera per A oppure un punto interno.

• Se $x \notin A$, allora x può essere:

- un punto di accumulazione per A, e in tal caso è un punto di frontiera;
- un *punto esterno* per A, ovvero non di accumulazione (in tal caso x è un punto interno per A^C).

Osservazione 16. Se A non è superiormente [risp. inferiormente] limitato, possiamo moralmente considerare $+\infty$ [risp. $-\infty$] un "punto" di frontiera per A.

▶ **Operativamente:** alla luce di quanto detto, calcoleremo i limiti della f

- nei punti $x \in \mathbb{R}$ che siano di frontiera per $\mathfrak{D}$ ma non isolati;
- nel punto $+\infty$ se $\mathfrak{D}$ non è superiormente limitato;
- nel punto $-\infty$ se $\mathfrak{D}$ non è inferiormente limitato.

5. Limite destro e sinistro

Spesso è utile considerare il limite della f in un punto x avvicinandosi al punto solo da destra [risp. da sinistra]. In tal caso si parla di limite destro [risp. sinistro]. Chiaramente, dobbiamo garantire che ci possa avvicinare al punto x da destra [risp. da sinistra] muovendosi all'interno del dominio $\mathfrak{D}$.

Definizione 17. [Punto di accumulazione destro]. Siano $A \subset \mathbb{R}$ e $x \in [-\infty, +\infty)$. Allora x è detto *punto di accumulazione destro* per A se

$$\forall \mathcal{U}(x) \quad \Rightarrow \quad \mathcal{U}(x) \cap (x, +\infty) \cap A \neq \emptyset.$$

• Analoga definizione per un punto di accumulazione sinistro $x \in (-\infty, +\infty]$.

Pertanto, in virtù dell'equivalenza tra limite e limite successionale stabilita dal Teorema 12, diamo la seguente definizione.

Definizione 18. [Limite destro]. Sia $x \in [-\infty, +\infty)$ un punto di accumulazione destro per $\mathfrak{D}$. Diciamo che f ha *limite destro* uguale a ℓ in x, e scriviamo

$$\lim_{t \to x^+} f(t) = \ell,$$

se per ogni successione $a_n \in \mathfrak{D}$ tale che $a_n \to x^+$, con $a_n \neq x$ per ogni n, si ha la convergenza $f(a_n) \to \ell$.

- Allo stesso modo si definisce il limite sinistro $\lim_{t \to x^-} f(t)$.

Esercizio 19. Si dimostri che f ha limite ℓ in x se e solo se ha limite destro e sinistro in x (qualora siano entrambi definiti) pari a ℓ.

Osservazione 20. Se nel calcolo del limite la convergenza successionale $f(a_n) \to \ell$ avviene sempre dall'alto, ovvero

$$f(a_n) \to \ell^+,$$

diciamo che f ha limite ℓ^+, intendendo che f ha limite ℓ e che tale valore è raggiunto dall'alto, con riferimento al fatto che ℓ vive sull'asse delle ordinate. Analogo discorso se $f(a_n) \to \ell^-$ (convergenza dal basso). Ovviamente sono possibili tutte le combinazioni (limite destro, sinistro, dall'alto, dal basso).