

# CORSO DI ANALISI MATEMATICA 1 ESERCIZI

Carlo Ravaglia

16 settembre 2015

iv

www.unidocs.it

www.unidocs.it

www.



www.unidocs.it

www.unidocs.it



www.unidocs.it

www.unidocs.it



www.unidocs.it

www.unidocs.it

www.unidocs.it - Appunti e dispense per superare i tuoi esami universitari

www.unidocs.it - Appunti e dispense per superare i tuoi esami universitari

# Indice

<b>1 Numeri reali</b>	<b>1</b>
1.1 Ordine fra numeri reali . . . . .	1
1.2 Funzioni reali . . . . .	4
1.3 Radici aritmetiche . . . . .	7
1.4 Valore assoluto . . . . .	9
1.5 Polinomi . . . . .	10
1.6 Equazioni . . . . .	11
1.7 Disequazioni . . . . .	14
1.8 Dominio naturale di funzioni . . . . .	23
<b>2 Numeri complessi</b>	<b>25</b>
2.1 Parte reale, parte immaginaria, modulo . . . . .	25
2.2 Rappresentazione di sottoinsiemi di $\mathbf{C}$ . . . . .	26
<b>3 Lo spazio euclideo <math>\mathbf{R}^N</math></b>	<b>27</b>
3.1 Composizione di funzioni . . . . .	27
3.2 Componenti di una funzione vettoriale . . . . .	28
3.3 Prodotto scalare e norma . . . . .	28
3.4 Distanza . . . . .	29
<b>4 Topologia di <math>\mathbf{R}^N</math></b>	<b>31</b>
4.1 Intorni in $\mathbf{R}^N$ . . . . .	31
4.2 Gli spazi topologici $\overline{\mathbf{R}}$ , $\mathbf{R}_{(+)}$ e $\mathbf{R}_{(-)}$ . . . . .	32
4.3 Funzioni continue . . . . .	33
4.4 Limiti . . . . .	34
<b>5 Confronto asintotico</b>	<b>39</b>
5.1 Confronto asintotico . . . . .	39
5.2 Principio di sostituzione . . . . .	40
5.3 Asintoti . . . . .	40

<b>6 Serie</b>	<b>43</b>
6.1 Serie convergenti . . . . .	43
6.2 Serie geometrica . . . . .	43
6.3 Serie a termini positivi . . . . .	52
6.4 Limiti di successioni . . . . .	54
<b>7 Serie di potenze</b>	<b>57</b>
7.1 Serie di potenze . . . . .	57
7.2 Esponenziale, seno, coseno . . . . .	60
7.3 Limiti . . . . .	61
7.4 Serie . . . . .	66
<b>8 Derivate</b>	<b>69</b>
8.1 Derivate . . . . .	69
8.2 Massimo, minimo . . . . .	71
8.3 Teorema del valor medio . . . . .	72
8.4 Derivabilità e derivata . . . . .	73
8.5 Studio funzione . . . . .	75
8.6 Polinomio di Taylor . . . . .	83
<b>9 Funzioni elementari reali</b>	<b>85</b>
9.1 Funzione esponenziale reale . . . . .	85
9.2 Potenze di esponente reale . . . . .	86
9.3 Funzioni esponenziali di base $a$ . . . . .	89
9.4 Funzioni circolari . . . . .	90
9.5 Funzioni elementari reali . . . . .	91
9.6 Massimi e minimi di funzioni . . . . .	91
9.7 Equazioni reali . . . . .	93
9.8 Limiti . . . . .	93
9.9 Serie . . . . .	97
9.10 Derivabilità e derivate . . . . .	100
9.11 Studio di funzione . . . . .	107
<b>10 Argomento di un numero complesso</b>	<b>127</b>
10.1 Argomento di un numero complesso . . . . .	127
10.2 Radici complesse . . . . .	127
10.3 Logaritmi complessi . . . . .	133
<b>11 Primitive ed integrali</b>	<b>135</b>
11.1 Integrali di base . . . . .	135
11.2 Integrali per decomposizione . . . . .	137
11.3 Integrali immediati . . . . .	137
11.4 Funzione integrale . . . . .	139
11.5 Integrazione per sostituzione . . . . .	139
11.6 Integrazione per parti . . . . .	141
11.7 Integrazione delle funzioni razionali . . . . .	144

<b>INDICE</b>	vii
11.8 Integrazione di alcune funzioni irrazionali . . . . .	147
11.9 Integrazione di alcune funzioni trascendenti . . . . .	152
11.10 Integrali di vario tipo . . . . .	156
<b>12 Sviluppi in serie</b>	<b>163</b>
12.1 Limiti . . . . .	163
12.2 Asintoti . . . . .	173
12.3 Serie . . . . .	175
<b>13 Integrali impropri</b>	<b>177</b>
13.1 Integrali impropri . . . . .	177
13.2 Valore di un integrale improprio . . . . .	177
13.3 Convergenza di integrali impropri . . . . .	178
13.4 Convergenza e valori di integrali impropri . . . . .	181
13.5 Integrali impropri su intervalli aperti . . . . .	189
13.6 Integrali impropri su intervalli privati di punti . . . . .	194



# Capitolo 1

## Numeri reali

### 1.1 Ordine fra numeri reali

1. **Esercizio.** Sia

$$A = \left\{ \frac{1}{n} - 1; n \in \mathbf{N}^* \right\}.$$

- (a) Dire se  $A$  ammette massimo e in caso affermativo determinarlo.
- (b) Dire se  $A$  ammette minimo e in caso affermativo determinarlo.
- (c) Dire se  $A$  ammette estremo superiore in  $\mathbf{R}$  e in caso affermativo determinarlo.
- (d) Dire se  $A$  ammette estremo inferiore in  $\mathbf{R}$  e in caso affermativo determinarlo.

**Risoluzione.**

- (a)  $A$  ammette massimo e  $\max(A) = 0$ .
- (b)  $A$  non ammette minimo.
- (c)  $A$  ammette estremo superiore e  $\sup(A) = 0$ .
- (d)  $A$  ammette estremo inferiore e  $\inf(A) = -1$ .

2. **Esercizio.** Per ciascuno dei seguenti insiemi

- (a)  $A = \left\{ \frac{3n-1}{n}; n \in \mathbf{N}^* \right\}$ ,
- (b)  $A = \left\{ \frac{n+2}{n}; n \in \mathbf{N}^* \right\}$ ,
- (c)  $A = \left\{ \frac{3n^2+1}{n^2}; n \in \mathbf{N}^* \right\}$ ,
- (d)  $A = \left\{ \frac{1}{n^2+1}; n \in \mathbf{N} \right\}$ ,

dire se  $A$  ammette massimo e se  $A$  ammette minimo; dire se  $A$  è limitato superiormente, se  $A$  è limitato inferiormente, se  $A$  è limitato; determinare l'estremo superiore e l'estremo inferiore di  $A$  rispetto a  $(\mathbf{R}, \leq)$ .

**Risoluzione.**

- (a) Per ogni  $n \in \mathbf{N}$  si ha  $\frac{3n-1}{n} = 3 - \frac{1}{n}$ ; l'insieme  $A$  è quindi formato da punti che al crescere di  $n$  si avvicinano crescendo a 3 senza mai raggiungerlo; quindi si ha:  
 $A$  non ammette massimo;  
 $A$  ammette minimo e  $\min(A) = 2$ ;  
 $A$  è limitato superiormente;  
 $A$  è limitato inferiormente;  
 $A$  è limitato;  
 si ha  $\sup(A) = 3$ ;  
 si ha  $\inf(A) = 2$ .
- (b) Si ha  $\frac{n+2}{n} = 1 + \frac{2}{n}$ . L'insieme  $A$  è fatto di infiniti punti che al crescere di  $n$  si avvicinano decrescendo a 1 senza mai raggiungerlo; quindi si ha:  
 $A$  ammette massimo e si ha  $\max(A) = 3$ ;  
 $A$  non ammette minimo;  
 $A$  è limitato superiormente;  
 $A$  è limitato inferiormente;  
 $A$  è limitato;  
 si ha  $\sup(A) = 3$ ;  
 si ha  $\inf A = 1$ .
- (c) L'insieme  $A$  è l'immagine della successione  $\left(\frac{3n^2+1}{n^2}\right)_{n \in \mathbf{N}^*}$ .  
 Si ha  $\frac{3n^2+1}{n^2} = 3 + \frac{1}{n^2}$ ; quindi la successione  $\left(\frac{3n^2+1}{n^2}\right)_{n \in \mathbf{N}^*}$  è decrescente; si ha poi  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n^2+1}{n^2} = 3$  e  $3 \notin A$ ; si ha quindi:  
 $A$  ammette massimo e si ha  $\max(A) = 4$ ;  
 $A$  non ammette minimo;  
 $A$  è limitato superiormente;  
 $A$  è limitato inferiormente;  
 $A$  è limitato;  
 si ha  $\sup(A) = 4$ ;  
 si ha  $\inf A = 3$ .
- (d) L'insieme  $A$  è l'immagine della successione  $\left(\frac{1}{n^2+1}\right)_{n \in \mathbf{N}}$ .  
 La successione  $\left(\frac{1}{n^2+1}\right)_{n \in \mathbf{N}}$  è decrescente; al crescere di  $n$  i punti  $\frac{1}{n^2+1}$  si avvicinano decrescendo a 0 senza mai raggiungerlo; si ha quindi:  
 $A$  ammette massimo e si ha  $\max(A) = 1$ ;  
 $A$  non ammette minimo;  
 $A$  è limitato superiormente;  
 $A$  è limitato inferiormente;  
 $A$  è limitato;

## 1.1. ORDINE FRA NUMERI REALI

3

si ha  $\sup(A) = 1$ ;  
 si ha  $\inf A = 0$ .

3. **Esercizio.** Sia

$$A = \left\{ \frac{1}{x}; x \in ] - \infty, 0[ \right\};$$

dire se  $A$  ammette massimo e se  $A$  ammette minimo; determinare l'estremo superiore e l'estremo inferiore di  $A$  rispetto a  $\overline{\mathbf{R}}$ .

**Risoluzione.** Posto

$$f : ] - \infty, 0[ \rightarrow \mathbf{R}, x \mapsto \frac{1}{x},$$

si ha  $A = f(] - \infty, 0[) = ] - \infty, 0[$ . Quindi  $A$  non ammette massimo,  $A$  non ammette minimo,  $\sup(A) = 0$ ,  $\inf(A) = -\infty$ .

4. **Esercizio.** Per ciascuno dei seguenti insiemi

- (a)  $A = [\sqrt{2}, 2] \cap \mathbf{Q}$ ,
- (b)  $A = [-\sqrt{2}, \sqrt{2}] \cap \mathbf{Q}$ ,
- (c)  $A = [0, \sqrt{2}] \cap (\mathbf{R} - \mathbf{Q})$ ,
- (d)  $A = ] - \infty, \sqrt{2}] \cap \mathbf{Q}$ ,

dire se  $A$  ammette massimo e se  $A$  ammette minimo; dire se  $A$  è limitato superiormente, se  $A$  è limitato inferiormente, se  $A$  è limitato; determinare l'estremo superiore e l'estremo inferiore di  $A$  rispetto a  $(\overline{\mathbf{R}}, \leq)$ .

**Risoluzione.**

- (a) Per ogni  $x \in A$  si ha  $\sqrt{2} < x \leq 2$ ; inoltre  $2 \in A$ ; inoltre vi sono punti di  $A$  vicini come si vuole a  $\sqrt{2}$ ; quindi si ha:  
 $A$  ammette massimo e  $\max(A) = 2$ ;  
 $A$  non ammette minimo;  
 $A$  è limitato superiormente;  
 $A$  è limitato inferiormente;  
 $A$  è limitato;  
 si ha  $\sup(A) = 2$ ;  
 si ha  $\inf(A) = \sqrt{2}$ .
- (b) Per ogni  $x \in A$  si ha  $-\sqrt{2} < x < \sqrt{2}$ ; inoltre vi sono punti di  $A$  vicini come si vuole a  $-\sqrt{2}$  e a  $\sqrt{2}$ ; quindi si ha:  
 $A$  non ammette massimo;  
 $A$  non ammette minimo;  
 $A$  è limitato superiormente;  
 $A$  è limitato inferiormente;  
 $A$  è limitato;  
 si ha  $\sup(A) = \sqrt{2}$ ;  
 si ha  $\inf(A) = -\sqrt{2}$ .

- (c) Per ogni  $x \in A$  si ha  $0 < x \leq \sqrt{2}$ ; inoltre  $\sqrt{2} \in A$  e vi sono punti di  $A$  vicini come si vuole a 0; quindi si ha:  
 $A$  ammette massimo e si ha  $\max(f) = \sqrt{2}$ ;  
 $A$  non ammette minimo;  
 $A$  è limitato superiormente;  
 $A$  è limitato inferiormente;  
 $A$  è limitato;  
 si ha  $\sup(A) = \sqrt{2}$ ;  
 si ha  $\inf(A) = 0$ .
- (d) Per ogni  $x \in A$  si ha  $x < \sqrt{2}$ ; inoltre  $\sqrt{2} \notin A$  e vi sono punti di  $A$  vicini come si vuole a  $\sqrt{2}$  e inferiori di un arbitrario numero reale; quindi si ha:  
 $A$  non ammette massimo;  
 $A$  non ammette minimo;  
 $A$  è limitato superiormente;  
 $A$  non è limitato inferiormente;  
 $A$  non è limitato;  
 si ha  $\sup(A) = \sqrt{2}$ ;  
 si ha  $\inf(A) = -\infty$ .

5. **Esercizio.** Dare un esempio di un sottoinsieme di  $\{x \in \mathbf{R}; x < -1\}$  dotato di estremo superiore in  $(\mathbf{R}, \leq)$ , ma non di massimo.

**Risoluzione.**  $] - \infty, -2[$ .

6. **Esercizio.** Determinare l'insieme dei maggioranti di  $\mathbf{R}$  rispetto all'insieme ordinato  $(\overline{\mathbf{R}}, \leq)$ .

**Risoluzione.** L'insieme dei maggioranti di  $\mathbf{R}$  rispetto a  $\overline{\mathbf{R}}$  è  $\{+\infty\}$ .

7. **Esercizio.** Dare un esempio di una funzione definita su  $\{x \in \mathbf{R}; x \geq 1\}$  limitata inferiormente, ma non dotata di minimo.

**Risoluzione.**  $f : [1, +\infty[ \rightarrow \mathbf{R}, x \rightarrow \frac{1}{x}$ .

## 1.2 Funzioni reali

1. **Esercizio.** Determinare l'estremo superiore e l'estremo inferiore in  $\overline{\mathbf{R}}$  della seguente funzione:

$$f : \mathbf{R}^* \rightarrow \mathbf{R}, x \rightarrow \frac{1}{x^2}.$$

**Risoluzione.** Si ha  $f(\mathbf{R}^*) = ]0, +\infty[$ ; quindi si ha  $\sup(f) = +\infty, \inf(f) = 0$ .

2. **Esercizio.** Disegnare approssimativamente in uno stesso sistema di assi i grafici di

$$f : [0, 1] \rightarrow \mathbf{R}, x \rightarrow x^2$$

e di

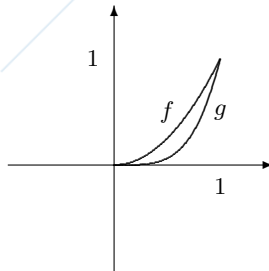
$$g : [0, 1] \rightarrow \mathbf{R}, x \rightarrow x^4$$

## 1.2. FUNZIONI REALI

5

mettendo in evidenza il legame fra i grafici.

**Risoluzione.**



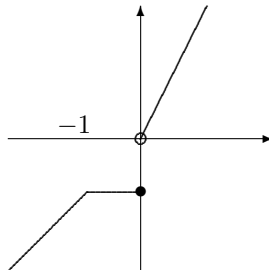
3. **Esercizio.** Sia

$$f : ]-\infty, 1] \longrightarrow \mathbf{R}, x \longrightarrow \begin{cases} x & \text{per } x \leq -1 \\ -1 & \text{per } -1 < x \leq 0 \\ 2x & \text{per } 0 < x \leq 1 \end{cases};$$

- tracciare approssimativamente il grafico di  $f$ ;
- determinare l'immagine di  $f$ ;
- dire se  $f$  ammette massimo e minimo e in caso affermativo determinarli;
- dire se  $f$  è limitata superiormente, limitata inferiormente, limitata;
- determinare l'estremo superiore e l'estremo inferiore di  $f$  rispetto a  $(\overline{\mathbf{R}}, \leq)$ .

**Risoluzione.**

(a) Si ha



- Si ha  $f(]-\infty, 1]) = ]-\infty, -1] \cup ]0, 2]$ .
  - $f$  ammette massimo e  $\max(f) = 2$ ;  $f$  non ammette minimo.
  - $f$  è limitata superiormente;  $f$  non è limitata inferiormente;  $f$  non è limitata.
  - Si ha  $\sup(f) = 2$ ,  $\inf(f) = -\infty$ .
4. **Esercizio.** Sia  $f : [-2, 0] \longrightarrow \mathbf{R}, x \longrightarrow x^2$ ; determinare  $f([-2, 0])$ , provare che  $f$  è iniettiva e trovare la funzione inversa di  $f$ .

**Risoluzione.** Si ha  $f([-2, 0]) = [0, 4]$ .

Per  $y \in [0, 4]$  e per ogni  $x \in [-2, 0]$  si ha  $f^{-1}(y) = x$  se e solo se  $f(x) = y$ , cioè se e solo se  $x^2 = y$ ; quindi si ha  $x = \pm\sqrt{y}$ ; poichè  $x \leq 0$ , si ha  $x = -\sqrt{y}$ ; ciò prova che  $f$  è iniettiva e che si ha

$$f^{-1} : [0, 4] \longrightarrow \mathbf{R}, y \longrightarrow -\sqrt{y}.$$

5. **Esercizio.** Sia  $f : [-1, 0[ \longrightarrow \mathbf{R}, x \longrightarrow \frac{1}{x^2}$ ; determinare  $f([-1, 0[)$ , provare che  $f$  è iniettiva e trovare la funzione inversa di  $f$ .

**Risoluzione.** Si ha  $f([-1, 0[) = [1, +\infty[$ .

Per  $y \in [1, +\infty[$  e  $x \in [-1, 0[$  si ha  $f^{-1}(y) = x$  se e solo se  $f(x) = y$ , cioè se e solo se  $\frac{1}{x^2} = y$ ; quindi si ha  $x = \pm\frac{1}{\sqrt{y}}$ ; poichè  $x < 0$ , si ha  $x = -\frac{1}{\sqrt{y}}$ ; ciò prova che  $f$  è iniettiva e che si ha

$$f^{-1} : [1, +\infty[ \longrightarrow \mathbf{R}, y \longrightarrow -\frac{1}{\sqrt{y}}.$$

6. **Esercizio.** Sia  $f : \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R}, x \longrightarrow x^2 - 3x + 2$ ;

- determinare l'immagine di  $f$ ;
- dire se  $f$  è iniettiva.

**Risoluzione.**

- L'immagine di  $f$  è l'insieme delle  $y \in \mathbf{R}$  tali che l'equazione di incognita  $x \in \mathbf{R}, x^2 + x + 1 = y$ , ammette almeno una soluzione. L'equazione è equivalente a  $x^2 - 3x + 2 - y = 0$ ; tale equazione ha soluzioni se e solo se  $9 - 4(2 - y) \geq 0$ , cioè se e solo se  $y \geq -\frac{1}{4}$ ; l'immagine di  $f$  è quindi  $[-\frac{1}{4}, +\infty[$ .
- La funzione  $f$  è iniettiva se e solo se per ogni  $y$  appartenente all'immagine di  $f$  l'equazione di incognita  $x \in \mathbf{R}, x^2 - 3x + 2 = y$  ammette una ed una sola soluzione. Sia  $y \geq -\frac{1}{4}$ ; l'equazione sopra è equivalente a  $x^2 - 3x + 2 - y = 0$ ; tale equazione per  $y \neq -\frac{1}{4}$  ha due soluzioni; quindi  $f$  non è iniettiva.

7. **Esercizio.** Sia  $f : \mathbf{R} - \{-\frac{1}{2}\} \longrightarrow \mathbf{R}, x \longrightarrow \frac{x}{2x+1}$ ;

- determinare l'immagine di  $f$ ;
- dire se  $f$  è iniettiva;
- in caso affermativo, determinare  $f^{-1}$ .

**Risoluzione.**

- L'immagine di  $f$  è l'insieme delle  $y \in \mathbf{R}$  tali che l'equazione di incognita  $x \in \mathbf{R} - \{-\frac{1}{2}\}, \frac{x}{2x+1} = y$ , ammette almeno una soluzione.

È quindi anche uguale all'insieme delle  $y \in \mathbf{R}$  tali che l'equazione di incognita  $x \in \mathbf{R}$

$$\begin{cases} \frac{x}{2x+1} = y \\ x \neq -\frac{1}{2} \end{cases},$$

## 1.3. RADICI ARITMETICHE

7

ammette almeno una soluzione.

L'equazione è equivalente a

$$\begin{cases} x = (2x+1)y \\ x \neq -\frac{1}{2} \end{cases} .$$

L'equazione di incognita  $x \in \mathbf{R}$ ,  $x = (2x-1)y$ , non ha la soluzione  $x = -\frac{1}{2}$ ; quindi l'equazione di incognita  $x \in \mathbf{R}$

$$\begin{cases} x = (2x+1)y \\ x \neq -\frac{1}{2} \end{cases}$$

è equivalente all'equazione di incognita  $x \in \mathbf{R}$ ,

$$x = (2x+1)y ,$$

quindi a  $x = 2xy + y$ ; quindi a  $(1-2x)y - y$ .

Tale equazione ha soluzioni  $x \in \mathbf{R}$  se e solo se  $1-2y \neq 0$ , cioè se e solo se  $y \neq \frac{1}{2}$ .

L'immagine di  $f$  è quindi  $\mathbf{R} - \{\frac{1}{2}\}$ .

- (b) La funzione  $f$  è iniettiva se e solo se per ogni  $y$  appartenente all'immagine di  $f$  l'equazione di incognita  $x \in \mathbf{R} - \{-\frac{1}{2}\}$ ,  $\frac{x}{2x+1} = y$ , ammette una ed una sola soluzione. Sia  $y \in \mathbf{R} - \{\frac{1}{2}\}$ ; l'equazione sopra è equivalente all'equazione di incognita  $x \in \mathbf{R}$ ,  $x(1-2y) = y$ ; tale equazione ha una ed una sola soluzione  $x = \frac{y}{1-2y}$ . quindi  $f$  è iniettiva.

- (c) Si ha  $f^{-1} : \mathbf{R} - \{\frac{1}{2}\} \rightarrow \mathbf{R} - \{-\frac{1}{2}\}$ ,  $y \rightarrow \frac{y}{1-2y}$ .

## 1.3 Radici aritmetiche

1. **Esercizio.** Trovare un  $m \in \mathbf{R}$  per cui

$$\frac{m+2}{\sqrt{m+3}}$$

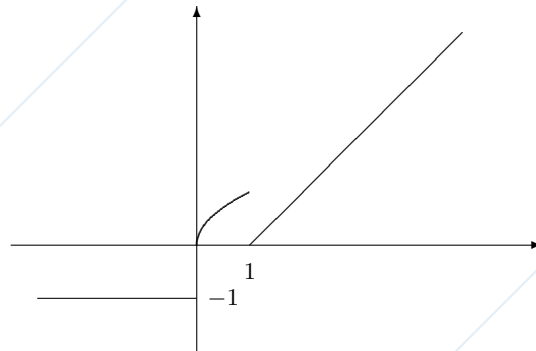
sia un numero razionale.

**Risoluzione.** Per  $m = 1$  si ha  $\frac{m+2}{\sqrt{m+3}} = \frac{3}{\sqrt{4}} = \frac{3}{2}$ ; è quindi sufficiente scegliere  $m = 1$ .

2. **Esercizio.** Disegnare approssimativamente il grafico di

$$f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}, x \rightarrow \begin{cases} -1 & \text{per } x < 0 \\ \sqrt{x} & \text{per } 0 \leq x \leq 1 \\ x-1 & \text{per } x > 1 \end{cases} .$$

**Risoluzione.**



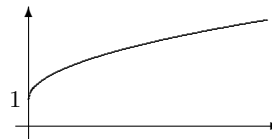
3. **Esercizio.** Sia

$$f : [0, +\infty[ \rightarrow \mathbf{R}, x \mapsto \sqrt{x} + 1 ;$$

- disegnare approssimativamente il grafico di  $f$ ;
- determinare l'immagine di  $f$  (si può rispondere utilizzando il grafico di  $f$ );
- provare che  $f$  è iniettiva;
- determinare  $f^{-1}$ ;
- disegnare approssimativamente il grafico di  $f^{-1}$ .

**Risoluzione.**

(a)



- (b) La proiezione del grafico sull'asse  $y$  è  $[1, +\infty[$ ; si ha quindi  $f([0, +\infty[) = [1, +\infty[$ .

Precisamente, se  $y \in \mathbf{R}$ ,  $y$  appartiene all'immagine di  $f$  se e solo se l'equazione di incognita  $x \in \mathbf{R}_+$

$$\sqrt{x} + 1 = y$$

ammette almeno una soluzione.

Tale equazione è equivalente all'equazione

$$\sqrt{x} = y - 1$$

Per  $y - 1 < 0$  l'equazione non ha soluzioni; per  $y - 1 \geq 0$  l'equazione è equivalente a  $x = (y - 1)^2$ ; quindi ha soluzioni. Quindi l'equazione ha soluzioni se e solo se  $y - 1 \geq 0$ , cioè se e solo se  $y \geq 1$ ; si ha quindi

$$f([0, +\infty[) = [1, +\infty[ .$$

## 1.4. VALORE ASSOLUTO

9

(c) Supposto  $y \geq 1$  l'equazione

$$\sqrt{x} = y - 1$$

ha un'unica soluzione data da

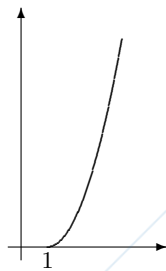
$$x = (y - 1)^2.$$

Quindi  $f$  è iniettiva.

(d) Si ha

$$f^{-1} : [1, +\infty[ \rightarrow [0, +\infty[, y \rightarrow (y - 1)^2.$$

(e)



## 1.4 Valore assoluto

1. **Esercizio.** Determinare i  $t \in \mathbf{R}$  per i quali

$$(|t| - 1)^2$$

ammette reciproco.

**Risoluzione.** Il numero reale  $(|t| - 1)^2$  ammette reciproco se e solo se  $(|t| - 1)^2 \neq 0$ , cioè se e solo se  $|t| - 1 \neq 0$ , cioè se e solo se  $|t| \neq 1$ , cioè se e solo se  $t \neq 1$  e  $t \neq -1$ .

2. **Esercizio.** Trovare un  $m \in \mathbf{N}$  in modo che

$$f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}, x \rightarrow \frac{x^2 + x^{3m+1}}{|x|^m + 1}$$

sia una funzione pari.

**Risoluzione.** Affinchè  $f$  sia una funzione pari, è sufficiente che  $3m + 1$  sia un numero pari; è allora sufficiente scegliere  $m = 1$ ; dunque

$$f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}, x \rightarrow \frac{x^2 + x^4}{|x| + 1}$$

è una funzione pari.

## 1.5 Polinomi

1. **Esercizio.** Determinare il quoziente ed il resto della divisione fra polinomi:

(a)  $(2x^4 - 3x^3 + 2x^2 - x + 3) : (x^2 + x + 1)$ ;

(b)  $(x^4 - 5x^3 - 4x + 3) : (x^2 - 1)$ ;

(c)  $(x^3 + 7x^2 + 3x + 1) : (x + 2)$ .

**Risoluzione.**

(a) Si ha

$$\begin{array}{r}
 2x^4 - 3x^3 + 2x^2 - x + 3 \\
 -2x^4 - 2x^3 - 2x^2 \\
 \hline
 -5x^3 + 4x^2 - x + 3 \\
 5x^3 + 5x^2 + 5x \\
 \hline
 5x^2 + 4x + 3 \\
 -5x^2 - 5x - 5 \\
 \hline
 -x - 2
 \end{array}
 \quad \left| \begin{array}{l}
 x^2 + x + 1 \\
 \hline
 2x^2 - 5x + 5
 \end{array} \right.$$

Quindi se  $Q(x)$  è il quoziente e  $R(x)$  è il resto, si ha  $Q(x) = 2x^2 - 5x + 5$  e  $R(x) = -x - 2$ .

(b) Si ha

$$\begin{array}{r}
 x^4 - 5x^3 - 4x + 3 \\
 -x^4 + x^2 \\
 \hline
 -5x^3 + x^2 - 4x + 3 \\
 5x^3 - 5x \\
 \hline
 x^2 - 9x + 3 \\
 -x^2 + 9x + 4 \\
 \hline
 -9x + 4
 \end{array}
 \quad \left| \begin{array}{l}
 x^2 - 1 \\
 \hline
 x^2 - 5x + 1
 \end{array} \right.$$

Quindi se  $Q(x)$  è il quoziente e  $R(x)$  è il resto, si ha  $Q(x) = x^2 - 5x + 1$  e  $R(x) = -9x + 4$ .

(c) Si ha

$$\begin{array}{r|rrr|r}
 & 1 & 7 & 3 & -1 \\
 -2 & & -2 & -10 & 14 \\
 \hline
 & 1 & 5 & -7 & 15
 \end{array}$$

Quindi, indicato con  $Q(x)$  il quoziente e con  $R(x)$  il resto, si ha  $Q(x) = x^2 + 5x - 7$  e  $R(x) = 15$ .

2. **Esercizio.** Determinare il quoziente ed il resto della divisione fra polinomi utilizzando la regola di Ruffini:

(a)  $(2x^4 - 3x^3 + 2x^2 - 5x + 3) : (x - 1)$ ;

(b)  $(x^4 - x^2 + x) : (x + 2)$ .

## 1.6. EQUAZIONI

11

**Risoluzione.**

(a) Si ha:

$$\begin{array}{c|cccc|c} 1 & 2 & -3 & 2 & -5 & 3 \\ & & 2 & -1 & 1 & -4 \\ \hline & 2 & -1 & 1 & -4 & -1 \end{array} .$$

Quindi se  $Q(x)$  è il quoziente e  $R(x)$  è il resto, si ha  $Q(x) = 2x^3 - x^2 + x - 4$  e  $R(x) = -1$ .

(b) Si ha:

$$\begin{array}{c|cccc|c} -2 & 1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ & & -2 & 4 & -6 & 10 \\ \hline & 1 & -2 & 3 & -5 & 10 \end{array} .$$

Quindi se  $Q(x)$  è il quoziente e  $R(x)$  è il resto, si ha  $Q(x) = x^3 - 2x^2 + 3x - 5$  e  $R(x) = 10$ .

**1.6 Equazioni**

1. **Esercizio.** Risolvere le seguenti equazioni polinomiali e determinare la molteplicità delle radici del polinomio:

(a)  $x^3 + 3x^2 - 4 = 0;$

(b)  $30x^3 - 7x^2 - 7x + 2 = 0;$

(c)  $x^4 - 13x^2 + 36 = 0.$

**Risoluzione.**

(a) Si ha  $x^3 + 3x^2 - 4 = (x-1)(x+2)^2$ . Quindi le radici sono  $x = 1$  e  $x = -2$ ;  $x = 1$  è radice semplice,  $x = -2$  è radice doppia.

(b) Sia  $A(x) = 30x^3 - 7x^2 - 7x + 2$ . Le radici razionali di  $A(x)$  sono fra i numeri razionali  $\frac{p}{q}$  con  $p$  divisore intero di 2 e  $q$  divisore intero di 30.

I divisori interi di 2 sono  $\pm 1$  e  $\pm 2$ ; i divisori interi di 30 sono  $\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 5, \pm 6, \pm 10, \pm 15, \pm 30$ .

Si trova  $A(-\frac{1}{2}) = 0$ ; quindi  $-\frac{1}{2}$  è radice di  $A(x)$ .

Il quoziente della divisione  $A(x) : (x + \frac{1}{2})$  è  $30x^2 - 22x + 4$ .

Si ha quindi

$$A(x) = (30x^2 - 22x + 4)(x + \frac{1}{2}) = (15x^2 - 11x + 2)(2x + 1).$$

L'equazione  $15x^2 - 11x + 2 = 0$  ha soluzioni  $x = \frac{1}{3}$  e  $x = \frac{2}{5}$ ; si ha quindi  $15x^2 - 11x + 2 = 15(x - \frac{1}{3})(x - \frac{2}{5}) = (3x - 1)(5x - 2)$ .

Si ha quindi  $A(x) = (15x^2 - 11x + 2)(2x + 1) = (3x - 1)(5x - 2)(2x + 1)$ .

Le radici dell'equazione sono quindi  $-\frac{1}{2}$  e  $\frac{1}{3}, \frac{2}{5}$ . Le tre del polinomio sono tutte semplici.

- (c) Si ha  $x^2 = \frac{13 \pm \sqrt{169-144}}{2} = \frac{13 \pm \sqrt{25}}{2} = \frac{13 \pm 5}{2}$ ; quindi si ha  $x^2 = 9$  o  $x^2 = 4$ ; quindi si ha  $x = \pm 3$  o  $x = \pm 2$ . Le radici del polinomio sono tutte semplici.

2. **Esercizio.** Risolvere le seguenti equazioni irrazionali

(a)  $\sqrt{x^2 + 1} = 3x - 1$ ;

(b)  $\sqrt{x} = x - 2$ ;

(c)  $\sqrt{x+1} = x$ .

**Risoluzione.**

- (a) Il dominio dell'equazione è  $\mathbf{R}$ . Si ha:  $\sqrt{x^2 + 1} = 3x - 1$  se e solo se 
$$\begin{cases} \sqrt{x^2 + 1} = 3x - 1 \\ 3x - 1 \geq 0 \end{cases} \quad \text{o} \quad \begin{cases} \sqrt{x^2 + 1} = 3x - 1 \\ 3x - 1 < 0 \end{cases}.$$

Risolviamo  $\begin{cases} \sqrt{x^2 + 1} = 3x - 1 \\ 3x - 1 \geq 0 \end{cases}$ . Il sistema è equivalente a

$$\begin{cases} x^2 + 1 = (3x - 1)^2 \\ x \geq \frac{1}{3} \end{cases}, \text{cioè a } \begin{cases} x^2 + 1 = 9x^2 - 6x + 1 \\ x \geq \frac{1}{3} \end{cases}, \text{cioè a } \begin{cases} 8x^2 - 6x = 0 \\ x \geq \frac{1}{3} \end{cases}, \text{cioè a } \begin{cases} x = 0 \text{ o } x = \frac{3}{4} \\ x \geq \frac{1}{3} \end{cases}, \text{cioè a } x = \frac{3}{4}.$$

Il sistema  $\begin{cases} \sqrt{x^2 + 1} = 3x - 1 \\ 3x - 1 < 0 \end{cases}$  non ammette soluzioni.

Quindi per l'equazione assegnata si trova  $x = \frac{3}{4}$ .

- (b) L'equazione si scrive  $\begin{cases} \sqrt{x} = x - 2 \\ x \geq 0 \end{cases}$ ; quindi equivale a

$$\begin{cases} \sqrt{x} = x - 2 \\ x \geq 0 \\ x - 2 \geq 0 \end{cases} \quad \text{o} \quad \begin{cases} \sqrt{x} = x - 2 \\ x \geq 0 \\ x - 2 < 0 \end{cases}.$$

Il sistema  $\begin{cases} \sqrt{x} = x - 2 \\ x \geq 0 \\ x - 2 < 0 \end{cases}$  non ammette soluzioni; quindi l'equazione equi-

vale a  $\begin{cases} \sqrt{x} = x - 2 \\ x \geq 0 \\ x - 2 \geq 0 \end{cases}$ , cioè a  $\begin{cases} x = x^2 - 4x + 4 \\ x \geq 0 \\ x \geq 2 \end{cases}$ , cioè a

$$\begin{cases} x^2 - 5x + 4 = 0 \\ x \geq 2 \end{cases}, \text{cioè a } \begin{cases} x = \frac{5 \pm \sqrt{9}}{2} \\ x \geq 2 \end{cases}, \text{cioè a } \begin{cases} x = 1 \text{ o } x = 4 \\ x \geq 2 \end{cases},$$

cioè a  $x = 4$ .

- (c) L'equazione si scrive  $\begin{cases} \sqrt{x+1} = x \\ x+1 \geq 0 \end{cases}$  ed è equivalente a

$$\begin{cases} \sqrt{x+1} = x \\ x+1 \geq 0 \\ x \geq 0 \end{cases} \quad \text{o} \quad \begin{cases} \sqrt{x+1} = x \\ x+1 \geq 0 \\ x < 0 \end{cases}.$$

## 1.6. EQUAZIONI

13

Il sistema  $\begin{cases} \sqrt{x+1} = x \\ x+1 \geq 0 \\ x < 0 \end{cases}$  non ammette alcuna soluzione.

L'equazione assegnata è quindi equivalente a

$$\begin{cases} \sqrt{x+1} = x \\ x+1 \geq 0 \\ x \geq 0 \end{cases}, \text{ cioè a } \begin{cases} x+1 = x^2 \\ x \geq -1 \\ x \geq 0 \end{cases}, \text{ cioè a } \begin{cases} x^2 - x - 1 = 0 \\ x \geq 0 \end{cases}, \text{ cioè a } \begin{cases} x = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2} \\ x \geq 0 \end{cases}, \text{ cioè a } x = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}.$$

Si trova quindi  $x = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$ .

3. **Esercizio.** Risolvere le seguenti equazioni:

- (a)  $x^2 + 2|x+1| - 1 = 0$ ;
- (b)  $|x+1| = 3$ ;
- (c)  $|x^2 + x - 1| = 3$ ;
- (d)  $\frac{|x^2-1|}{x} = x+1$ ;
- (e)  $|x+1| = x$ .

**Risoluzione.**

(a) L'equazione equivale a

$$\begin{cases} x^2 + 2|x+1| - 1 = 0 \\ x \geq -1 \end{cases} \quad \text{o} \quad \begin{cases} x^2 + 2|x+1| - 1 = 0 \\ x < -1 \end{cases}.$$

Si ha  $\begin{cases} x^2 + 2|x+1| - 1 = 0 \\ x \geq -1 \end{cases}$  se e solo se  $\begin{cases} x^2 + 2(x+1) - 1 = 0 \\ x \geq -1 \end{cases}$  cioè  $\begin{cases} x^2 + 2x + 1 = 0 \\ x \geq -1 \end{cases}$  cioè  $x = -1$ .

Si ha  $\begin{cases} x^2 + 2|x+1| - 1 = 0 \\ x < -1 \end{cases}$  se e solo se  $\begin{cases} x^2 - 2(x+1) - 1 = 0 \\ x < -1 \end{cases}$  cioè  $\begin{cases} x^2 - 2x - 3 = 0 \\ x < -1 \end{cases}$  cioè  $\begin{cases} x = 1 \pm \sqrt{1+3} = 1 \pm 2 \\ x < -1 \end{cases}$  cioè  $\begin{cases} x = 3 \text{ o } x = -1 \\ x < -1 \end{cases}$  e quindi mai.

Quindi l'equazione ha una sola soluzione data da  $x = -1$ .

- (b) Si ha  $|x+1| = 3$  se e solo se  $x+1 = \pm 3$ , cioè  $x = -4$  o  $x = 2$ .
- (c) L'equazione è equivalente a  $x^2 + x - 1 = \pm 3$ .

L'equazione  $x^2 + x - 1 = 3$  è equivalente a  $x^2 + x - 4 = 0$ , cioè a  $x = \frac{-1 \pm \sqrt{17}}{2}$ .

L'equazione  $x^2 + x - 1 = -3$  è equivalente a  $x^2 + x + 2 = 0$ ; il polinomio  $x^2 + x - 2$  ha discriminante  $\Delta = -7 < 0$ ; quindi l'equazione  $x^2 + x + 2 = 0$  non ha soluzioni.

Quindi l'equazione assegnata ha soluzioni.  $x = \frac{-1 \pm \sqrt{17}}{2}$ .

(d) L'equazione è assegnata per  $x \neq 0$ . L'equazione è equivalente a

$$\begin{cases} \frac{|x^2-1|}{x^2-1} = x+1 \\ x^2-1 \geq 0 \\ x \neq 0 \end{cases} \quad \text{o} \quad \begin{cases} \frac{|x^2-1|}{x^2-1} = x+1 \\ x^2-1 < 0 \\ x \neq 0 \end{cases}.$$

Il sistema  $\begin{cases} \frac{|x^2-1|}{x^2-1} = x+1 \\ x^2-1 \geq 0 \\ x \neq 0 \end{cases}$  è equivalente a  $\begin{cases} x^2-1 = x^2+x \\ x \leq -1 \text{ o } x \geq 1 \end{cases}$ , cioè a

$$\begin{cases} x = -1 \\ x \leq -1 \text{ o } x \geq 1 \end{cases}, \text{ cioè a } x = -1.$$

Il sistema  $\begin{cases} \frac{|x^2-1|}{x^2-1} = x+1 \\ x^2-1 < 0 \\ x \neq 0 \end{cases}$  è equivalente a  $\begin{cases} 1-x^2 = x^2+x \\ -1 < x < 1 \\ x \neq 0 \end{cases}$ , cioè a

$$\begin{cases} 2x^2+x-1=0 \\ -1 < x < 1 \\ x \neq 0 \end{cases}, \text{ cioè a } \begin{cases} 2x^2+x-1=0 \\ -1 < x < 1 \\ x \neq 0 \end{cases}, \text{ cioè a } \begin{cases} x = \frac{-1 \pm 3}{4} \\ -1 < x < 1 \\ x \neq 0 \end{cases},$$

$$\text{cioè a } \begin{cases} x = -1 \text{ o } x = \frac{1}{2} \\ -1 < x < 1 \\ x \neq 0 \end{cases}, \text{ cioè a } x = \frac{1}{2}.$$

L'equazione assegnata è quindi equivalente a  $x = -1$  o  $x = \frac{1}{2}$ .

(e) L'equazione è equivalente a

$$\begin{cases} |x+1| = x \\ x+1 \geq 0 \end{cases} \quad \text{o} \quad \begin{cases} |x+1| = x \\ x+1 < 0 \end{cases}.$$

Il sistema  $\begin{cases} |x+1| = x \\ x+1 \geq 0 \end{cases}$  è equivalente a  $\begin{cases} x+1 = x \\ x+1 \geq 0 \end{cases}$ , cioè a

$$\begin{cases} 1 = 0 \\ x+1 \geq 0 \end{cases}; \text{ poichè } 1 = 0 \text{ è falsa, tale sistema non ammette soluzioni.}$$

Il sistema  $\begin{cases} |x+1| = x \\ x+1 < 0 \end{cases}$  è equivalente a  $\begin{cases} -x-1 = x \\ x < -1 \end{cases}$ , cioè a

$$\begin{cases} 2x = -1 \\ x < -1 \end{cases}, \text{ cioè a } \begin{cases} x = -\frac{1}{2} \\ x < -1 \end{cases}; \text{ poichè non è } -\frac{1}{2} < -1, \text{ tale sistema non ammette alcuna soluzione.}$$

Quindi l'equazione assegnata non ammette soluzioni.

## 1.7 Disequazioni

1. **Esercizio.** Risolvere le seguenti disequazioni polinomiali:

(a)  $x + 5 < 4x + 2$ ;

## 1.7. DISEQUAZIONI

15

(b)  $x^2 - x + 1 > 0$ ;

(c) 
$$\begin{cases} -x^2 + 3x - 2 > 0 \\ x^2 + x + 1 > 0 \\ x^2 - 5x + 6 > 0 \end{cases};$$

**Risoluzione.**(a) Il dominio della disequazione è  $\mathbf{R}$ . Si ha:

$$x + 5 < 4x + 2 \text{ se e solo se } -3x < -3, \text{ se e solo se } x > 1.$$

(b) Il polinomio  $x^2 - x + 1$  ha discriminante  $\Delta = -3 < 0$ ; quindi la disequazione è soddisfatta per ogni  $x \in \mathbf{R}$ .(c) Il sistema di disequazioni equivale a  $\begin{cases} 1 < x < 2 \\ x < 2 \text{ o } x > 3 \end{cases}$ . Quindi si ha  $1 < x < 2$ .2. **Esercizio.** Risolvere le seguenti disequazioni fratte:

(a)  $\frac{x+4}{x-3} < 2$ ;

(b)  $\frac{2x+5}{3x-1} > 4$ .

**Risoluzione.**(a) Il dominio della disequazione è  $\mathbf{R} - \{3\}$ . Sia  $x \neq 3$ . Si ha:

$$\frac{x+4}{x-3} < 2 \text{ se e solo se}$$

$$\frac{x+4}{x-3} - 2 < 0 \text{ se e solo se}$$

$$\frac{x+4-2x+6}{x-3} < 0 \text{ se e solo se}$$

$$\frac{-x+10}{x-3} < 0 \text{ se e solo se}$$

$$x < 3 \text{ o } x > 10.$$

(b) Il dominio della disequazione è  $\mathbf{R} - \{\frac{1}{3}\}$ . Sia  $x \neq \frac{1}{3}$ . Si ha:

$$\frac{2x+5}{3x-1} > 4 \text{ se e solo se}$$

$$\frac{2x+5}{3x-1} - 4 > 0 \text{ se e solo se}$$

$$\frac{2x+5-12x+4}{3x-1} - 4 > 0 \text{ se e solo se}$$

$$\frac{-10x+9}{3x-1} - 4 > 0 \text{ se e solo se}$$

$$\frac{1}{3} < x < \frac{9}{10}.$$

3. **Esercizio.** Risolvere le seguenti disequazioni irrazionali:

(a)  $\sqrt{x+2} > x$ .

(b)  $\sqrt{x^2 - 3x + 2} > x - 1$ ;

(c)  $\sqrt{x^2 - 3x + 2} > x - 3$ ;

(d)  $\sqrt{x^2 - 9} > x$ ;

(e)  $x < \sqrt{-x^2 + 1}$ ;

(f)  $x + 1 > \sqrt{-x^2 - 2x}$ ;

(g)  $\frac{1}{\sqrt{x+1}} > \frac{1}{x};$

(h)  $\frac{1}{1-\sqrt{x}} > \frac{1}{x};$

**Risoluzione.**(a) Tenendo conto della condizione sul dominio della disequazione, la disequazione è soddisfatta se e solo se  $\begin{cases} \sqrt{x+2} > x \\ x+2 \geq 0 \end{cases}$ , cioè se e solo se

$$\begin{cases} \sqrt{x+2} > x \\ x+2 \geq 0 \\ x \geq 0 \end{cases} \quad \text{o} \quad \begin{cases} \sqrt{x+2} > x \\ x+2 \geq 0 \\ x < 0 \end{cases}.$$

Si ha  $\begin{cases} \sqrt{x+2} > x \\ x+2 \geq 0 \\ x \geq 0 \end{cases}$  se e solo se  $\begin{cases} x+2 > x^2 \\ x+2 \geq 0 \\ x \geq 0 \end{cases}$ , cioè se e solo se  $\begin{cases} x+2 > x^2 \\ x \geq 0 \end{cases}$ , cioè se e solo se  $\begin{cases} x^2 - x - 2 < 0 \\ x \geq 0 \end{cases}$ .Il polinomio  $x^2 - x - 2$  ha discriminante  $\Delta = 1 + 8 = 9 > 0$ ; il polinomio ammette quindi le radici  $x = \frac{1 \pm 3}{2}$ , cioè  $x = -1$  o  $x = 2$ .Si ha quindi  $\begin{cases} x^2 - x - 2 < 0 \\ x \geq 0 \end{cases}$  se e solo se  $\begin{cases} -1 < x < 2 \\ x \geq 0 \end{cases}$ , cioè se e solo se  $0 \leq x < 2$ .Si ha  $\begin{cases} \sqrt{x+2} > x \\ x+2 \geq 0 \\ x < 0 \end{cases}$  se e solo se  $\begin{cases} x+2 \geq 0 \\ x < 0 \end{cases}$ , cioè se e solo se  $-2 \leq x < 0$ .

La disequazione assegnata è quindi soddisfatta se e solo se

$$-2 \leq x < 2.$$

(b) La disequazione equivale a

$$\begin{cases} \sqrt{x^2 - 3x + 2} > x - 1 \\ x^2 - 3x + 2 \geq 0 \\ x - 1 \geq 0 \end{cases} \quad \text{o} \quad \begin{cases} \sqrt{x^2 - 3x + 2} > x - 1 \\ x^2 - 3x + 2 \geq 0 \\ x - 1 < 0 \end{cases}.$$

Il sistema

$$\begin{cases} \sqrt{x^2 - 3x + 2} > x - 1 \\ x^2 - 3x + 2 \geq 0 \\ x - 1 \geq 0 \end{cases}$$

equivale a

$$\begin{cases} x^2 - 3x + 2 > (x - 1)^2 \\ x^2 - 3x + 2 \geq 0 \\ x - 1 \geq 0 \end{cases}, \quad \text{cioè a} \quad \begin{cases} x^2 - 3x + 2 > (x - 1)^2 \\ x - 1 \geq 0 \end{cases}, \quad \text{cioè a}$$

## 1.7. DISEQUAZIONI

17

$$\begin{cases} x^2 - 3x + 2 > x^2 - 2x + 1 \\ x \geq 1 \\ x < 1 \\ x \geq 1 \end{cases}, \text{ cioè a } \begin{cases} -3x + 2 > -2x + 1 \\ x \geq 1 \end{cases}, \text{ cioè a } \begin{cases} x < 1 \\ x \geq 1 \end{cases}; \text{ quindi non ammette alcuna soluzione.}$$

Il sistema

$$\begin{cases} \sqrt{x^2 - 3x + 2} > x - 1 \\ x^2 - 3x + 2 \geq 0 \\ x - 1 < 0 \end{cases}$$

$$\text{equivale a } \begin{cases} x^2 - 3x + 2 \geq 0 \\ x - 1 < 0 \end{cases}, \text{ cioè a } \begin{cases} x \leq 1 \text{ o } x \geq 2 \\ x < 1 \end{cases} \text{ cioè a } x < 1.$$

Quindi la disequazione data equivale a  $x < 1$ .

(c) La disequazione equivale a

$$\begin{cases} \sqrt{x^2 - 3x + 2} > x - 3 \\ x^2 - 3x + 2 \geq 0 \\ x - 3 \geq 0 \end{cases} \quad \text{o} \quad \begin{cases} \sqrt{x^2 - 3x + 2} > x - 3 \\ x^2 - 3x + 2 \geq 0 \\ x - 3 < 0 \end{cases}.$$

Il sistema

$$\begin{cases} \sqrt{x^2 - 3x + 2} > x - 3 \\ x^2 - 3x + 2 \geq 0 \\ x - 3 \geq 0 \end{cases}$$

equivale a

$$\begin{cases} x^2 - 3x + 2 > (x - 3)^2 \\ x^2 - 3x + 2 \geq 0 \\ x - 3 \geq 0 \end{cases}, \text{ cioè a } \begin{cases} x^2 - 3x + 2 > (x - 3)^2 \\ x - 3 \geq 0 \end{cases}, \text{ cioè a } \begin{cases} x^2 - 3x + 2 > x^2 - 6x + 9 \\ x \geq 3 \end{cases}, \text{ cioè a } \begin{cases} 3x > 7 \\ x \geq 3 \end{cases}, \begin{cases} x > \frac{7}{3} \\ x \geq 3 \end{cases}, \text{ cioè a } x \geq 3.$$

Il sistema

$$\begin{cases} \sqrt{x^2 - 3x + 2} > x - 3 \\ x^2 - 3x + 2 \geq 0 \\ x - 3 < 0 \end{cases}$$

equivale a

$$\begin{cases} x^2 - 3x + 2 \geq 0 \\ x - 3 < 0 \end{cases}, \text{ cioè a } \begin{cases} x \leq 1 \text{ o } x \geq 2 \\ x < 3 \end{cases}, \text{ cioè a } x \leq 1 \text{ o } 2 \leq x < 3.$$

Quindi la disequazione data equivale a  $x \leq 1$  o  $x \geq 2$ .

(d) La disequazione è equivalente a

$$\begin{cases} \sqrt{x^2 - 9} > x \\ x^2 - 9 \geq 0 \\ x \geq 0 \end{cases} \quad \text{o} \quad \begin{cases} \sqrt{x^2 - 9} > x \\ x^2 - 9 \geq 0 \\ x < 0 \end{cases}.$$



## 1.7. DISEQUAZIONI

19

$$\begin{cases} x < \frac{-2-\sqrt{2}}{2} \text{ o } x > \frac{-2+\sqrt{2}}{2} \\ -2 \leq x \leq 0 \\ x > -1 \end{cases}, \text{ cioè a } \frac{-2+\sqrt{2}}{2} < x \leq 0.$$

$$\text{Il sistema } \begin{cases} x+1 > \sqrt{-x^2-2x} \\ -x^2-2x \geq 0 \\ x+1 < 0 \end{cases} \text{ non ammette soluzioni.}$$

La disequazione assegnata è quindi equivalente a  $\frac{-2+\sqrt{2}}{2} < x \leq 0$ .

(g) La disequazione è assegnata per  $x \in \mathbf{R}$  tale che

$$\begin{cases} x+1 \geq 0 \\ \sqrt{x+1} \neq 0 \\ x \neq 0 \end{cases}, \text{ cioè tale che } \begin{cases} x+1 \geq 0 \\ x+1 \neq 0 \\ x \neq 0 \end{cases};$$

quindi per  $-1 < x < 0$  o  $x > 0$ .

Per  $-1 < x < 0$  la disequazione è soddisfatta.

Supponiamo  $x > 0$ . La disequazione è equivalente a  $\sqrt{x+1} < x$ , quindi a  $x+1 < x^2$ ; quindi a  $x^2 - x - 1 > 0$ .

Il polinomio  $x^2 - x - 1$  ha discriminante  $\Delta = 1 + 4 = 5 > 0$ ; il polinomio ammette quindi le radici  $x = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$ .

La disequazione  $x^2 - x - 1 > 0$  è quindi soddisfatta per  $x < \frac{1-\sqrt{5}}{2}$  o  $x > \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ ; quindi, essendo  $x > 0$ , se e solo se  $x > \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ .

La disequazione assegnata è quindi soddisfatta se e solo se

$$-1 < x < 0 \text{ o } x > \frac{1+\sqrt{5}}{2}.$$

(h) La disequazione è assegnata per

$$\begin{cases} x \geq 0 \\ 1 - \sqrt{x} \neq 0 \\ x \neq 0 \end{cases}, \text{ cioè per } \begin{cases} x > 0 \\ x \neq 1 \end{cases}, \text{ cioè per } 0 < x < 1 \text{ o } x > 1.$$

Supponiamo  $0 < x < 1$ ; si ha  $1 - \sqrt{x} > 0$  e  $1 - x > 0$ ; l'equazione è quindi equivalente a

$$\begin{cases} \frac{1}{1-\sqrt{x}} > \frac{1}{x} \\ 0 < x < 1 \end{cases}, \text{ cioè a } \begin{cases} 1 - \sqrt{x} < x \\ 0 < x < 1 \end{cases}, \text{ cioè a } \begin{cases} \sqrt{x} > 1 - x \\ 0 < x < 1 \end{cases}, \text{ cioè a } \begin{cases} x > (1-x)^2 \\ 0 < x < 1 \end{cases}, \text{ cioè a } \begin{cases} x > 1 - 2x + x^2 \\ 0 < x < 1 \end{cases}, \text{ cioè a } \begin{cases} x^2 - 3x + 1 < 0 \\ 0 < x < 1 \end{cases},$$

$$\text{cioè a } \begin{cases} \frac{3-\sqrt{5}}{2} < x < \frac{3+\sqrt{5}}{2} \\ 0 < x < 1 \end{cases}, \text{ cioè a } \frac{3-\sqrt{5}}{2} < x < 1.$$

Per  $x > 1$  si ha  $1 - \sqrt{x} < 0$ ; quindi la disequazione non è soddisfatta in quanto  $\frac{1}{1-\sqrt{x}} < 0$  e  $\frac{1}{x} > 0$ .

Quindi la disequazione assegnata è equivalente a  $\frac{3-\sqrt{5}}{2} < x < 1$ .

4. **Esercizio.** Risolvere le seguenti disequazioni:

- (a)  $|x + 1| > 2x + 3$ ;  
 (b)  $\frac{|x|+1}{x-1} > x + 1$ ;  
 (c)  $|x - 3| < 2$ ;  
 (d)  $x|x + 1| > x$ ;  
 (e)  $\frac{1}{|x-1|} > \frac{1}{2}$ ;  
 (f)  $\frac{x}{x-2} > |x - 2|$ .

**Risoluzione.**

(a) La disequazione è equivalente a

$$\begin{cases} |x + 1| > 2x + 3 \\ x + 1 \geq 0 \end{cases} \quad \text{o} \quad \begin{cases} |x + 1| > 2x + 3 \\ x + 1 < 0 \end{cases}.$$

Risolviamo  $\begin{cases} |x + 1| > 2x + 3 \\ x + 1 \geq 0 \end{cases}$ . Il sistema è equivalente a

$$\begin{cases} x + 1 > 2x + 3 \\ x \geq -1 \end{cases}, \text{ cioè a } \begin{cases} x < -2 \\ x \geq -1 \end{cases};$$

quindi il sistema non ammette alcuna soluzione.

Risolviamo  $\begin{cases} |x + 1| > 2x + 3 \\ x + 1 < 0 \end{cases}$ . Il sistema è equivalente a

$$\begin{cases} -(x + 1) > 2x + 3 \\ x < -1 \end{cases}, \text{ cioè a } \begin{cases} -x - 1 > 2x + 3 \\ x < -1 \end{cases}, \text{ cioè a } \begin{cases} 3x < -4 \\ x < -1 \end{cases};$$

$$\text{cioè a } \begin{cases} x < -\frac{4}{3} \\ x < -1 \end{cases}, \text{ cioè a } x < -\frac{4}{3}.$$

Quindi la disequazione assegnata è equivalente a  $x < -\frac{4}{3}$ .

(b) Si ha  $x \neq 1$ .

La disequazione equivale a  $\frac{|x|+1}{x-1} - (x + 1) > 0$ , cioè a  $\frac{|x|+1-(x^2-1)}{x-1} > 0$ ,  
 cioè a  $\frac{-x^2+|x|+2}{x-1} > 0$ , cioè a

$$\begin{cases} \frac{-x^2+|x|+2}{x-1} > 0 \\ x \geq 0 \end{cases} \quad \text{o} \quad \begin{cases} \frac{-x^2+|x|+2}{x-1} > 0 \\ x < 0 \end{cases}.$$

Il sistema  $\begin{cases} \frac{-x^2+|x|+2}{x-1} > 0 \\ x \geq 0 \end{cases}$  equivale a  $\begin{cases} \frac{-x^2+x+2}{x-1} > 0 \\ x \geq 0 \end{cases}$ , cioè a

$$\begin{cases} x < -1 \text{ o } 1 < x < 2 \\ x \geq 0 \end{cases}, \text{ cioè a } 1 < x < 2.$$

Il sistema  $\begin{cases} \frac{-x^2+|x|+2}{x-1} > 0 \\ x < 0 \end{cases}$  equivale a  $\begin{cases} \frac{-x^2-x+2}{x-1} > 0 \\ x < 0 \end{cases}$ , cioè a

$$\begin{cases} x < -2 \\ x < 0 \end{cases}, \text{ cioè a } x < -2.$$

## 1.7. DISEQUAZIONI

21

Quindi la disequazione assegnata è equivalente a

$$x < -2 \text{ o } 1 < x < 2.$$

(c) La disequazione equivale a  $-2 < x - 3 < 2$ , cioè a  $1 < x < 5$ .

(d) La disequazione equivale a

$$\begin{cases} x|x+1| > x \\ x+1 \geq 0 \end{cases} \text{ o } \begin{cases} x|x+1| > x \\ x+1 < 0 \end{cases}.$$

Il sistema  $\begin{cases} x|x+1| > x \\ x+1 \geq 0 \end{cases}$  equivale a  $\begin{cases} x(x+1) > x \\ x+1 \geq 0 \end{cases}$ , cioè a  $\begin{cases} x^2 + x > x \\ x+1 \geq 0 \end{cases}$ , cioè a  $\begin{cases} x^2 > 0 \\ x+1 \geq 0 \end{cases}$ , cioè a  $\begin{cases} x \neq 0 \\ x \geq -1 \end{cases}$ , cioè a  $-1 \leq x < 0$  o  $x > 0$ .

Il sistema  $\begin{cases} x|x+1| > x \\ x+1 < 0 \end{cases}$  equivale a  $\begin{cases} x(-x-1) > x \\ x < -1 \end{cases}$ , cioè a  $\begin{cases} -x^2 - x > x \\ x < -1 \end{cases}$ , cioè a  $\begin{cases} x^2 + 2x < 0 \\ x < -1 \end{cases}$ , cioè a  $\begin{cases} -2 < x < 0 \\ x < -1 \end{cases}$ , cioè a  $-2 < x < -1$ .

Quindi la disequazione assegnata equivale a  $-2 < x < 0$  o  $x > 0$ .

(e) La disequazione è assegnata per  $x \neq 1$ ; si scrive dunque  $\begin{cases} \frac{1}{|x-1|} > \frac{1}{2} \\ x \neq 1 \end{cases}$ ;

essa è equivalente a  $\begin{cases} |x-1| < 2 \\ x \neq 1 \end{cases}$ , cioè a  $\begin{cases} -2 < x-1 < 2 \\ x \neq 1 \end{cases}$ , cioè a

$$\begin{cases} -1 < x < 3 \\ x \neq 1 \end{cases}, \text{ cioè a } -1 < x < 1 \text{ o } 1 < x < 3.$$

(f) La disequazione è assegnata per  $x \neq 2$ ; supposto  $x \in \mathbf{R}$  e  $x \neq 2$  risolviamo la disequazione in due modi

i. *Modo 1* Si ha

$$\frac{x}{x-2} > |x-2|$$

se e solo se

$$\begin{cases} \frac{x}{x-2} > |x-2| \\ x > 2 \end{cases} \text{ o } \begin{cases} \frac{x}{x-2} > |x-2| \\ x < 2 \end{cases}.$$

Si ha

$$\begin{cases} \frac{x}{x-2} > |x-2| \\ x > 2 \end{cases} \text{ se e solo se } \begin{cases} \frac{x}{x-2} > x-2 \\ x > 2 \end{cases} \text{ se e solo se}$$

$$\begin{cases} \frac{x}{x-2} - x + 2 > 0 \\ x > 2 \end{cases} \text{ se e solo se } \begin{cases} \frac{x-x^2+4x-4}{x-2} > 0 \\ x > 2 \end{cases} \text{ se e solo se}$$

$$\begin{cases} \frac{x^2-5x+4}{x-2} < 0 \\ x > 2 \end{cases}.$$

Tenendo conto della condizione  $x > 2$ , se e solo se

$$\begin{cases} x^2 - 5x + 4 < 0 \\ x > 2 \end{cases} \text{ se e solo se } \begin{cases} 1 < x < 4 \\ x > 2 \end{cases} \text{ se e solo se } . \\ 2 < x < 4 .$$

Si ha

$$\begin{cases} \frac{x}{x-2} > |x-2| \\ x < 2 \end{cases} \text{ se e solo se } \begin{cases} \frac{x}{x-2} > -x+2 \\ x < 2 \end{cases} \text{ se e solo se} \\ \begin{cases} \frac{x}{x-2} + x - 2 > 0 \\ x < 2 \end{cases} \text{ se e solo se } \begin{cases} \frac{x+x^2-4x+4}{x-2} > 0 \\ x < 2 \end{cases} \text{ se e solo se} \\ \begin{cases} \frac{x^2-3x+4}{x-2} > 0 \\ x < 2 \end{cases} .$$

Tenendo conto della condizione  $x < 2$ , se e solo se

$$\begin{cases} x^2 - 3x + 4 < 0 \\ x < 2 \end{cases} .$$

Il polinomio  $x^2 - 3x + 4$  ha discriminante  $\Delta = 9 - 16 = -7 < 0$ ; quindi la disequazione  $x^2 - 3x + 4 < 0$  non è mai soddisfatta. Quindi il sistema 8

$$\begin{cases} x^2 - 3x + 4 < 0 \\ x < 2 \end{cases}$$

non ha soluzioni.

La disequazione assegnata è quindi equivalente a

$$2 < x < 4 .$$

ii. *Modo 2* Si ha

$$\frac{x}{x-2} > |x-2| \text{ se e solo se } |x-2| < \frac{x}{x-2} \text{ se e solo se} \\ \begin{cases} x-2 < \frac{x}{x-2} \\ x-2 > -\frac{x}{x-2} \end{cases} \text{ se e solo se } \begin{cases} x-2 - \frac{x}{x-2} > < 0 \\ x-2 + \frac{x}{x-2} > 0 \end{cases} \text{ se e solo se} \\ \begin{cases} \frac{(x-2)^2-x}{x-2} < 0 \\ \frac{(x-2)^2+x}{x-2} > 0 \end{cases} \text{ se e solo se } \begin{cases} \frac{x^3-5x+4}{x-2} < 0 \\ \frac{x^2-3x+4}{x-2} > 0 \end{cases} .$$

Il polinomio  $x^2 - 5x + 4$  ha radici 1 e 4; quindi  $x^2 - 5x + 4 > 0$  se e solo se  $x < 1$  o  $x > 4$ ; si ha quindi  $\frac{x^2-5x+4}{x-2} < 0$  se e solo se  $x < 1$  o  $2 < x < 4$ .

Il polinomio  $x^2 - 3x + 4$  ha discriminante  $\Delta = 9 - 16 = -7 < 0$ ; quindi  $x^2 - 3x + 4 > 0$  per ogni  $x \in \mathbf{R}$ ; si ha quindi  $\frac{x^2-3x+4}{x-2} > 0$  se e solo se  $x > 2$ .

Quindi si ha

$$\begin{cases} \frac{x^3-5x+4}{x-2} < 0 \\ \frac{x^2-3x+4}{x-2} > 0 \end{cases} \text{ se e solo se } \begin{cases} x < 1 \text{ o } 2 < x < 4 \\ x > 2 \end{cases} \text{ se e solo se} \\ 2 < x < 4.$$

## 1.8 Dominio naturale di funzioni

1. **Esercizio.** Determinare il dominio naturale delle seguenti funzioni reali di variabile reale:

(a)  $f(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2-1}-\sqrt{x}}$ ;

(b)  $f(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2-2}-\sqrt{x}}$ ;

(c)  $f(x) = \sqrt{|x|-1}$ ;

(d)  $f(x) = \frac{1}{|x|-1}$ .

**Risoluzione.**

- (a) Il dominio naturale di  $f$  è dato dalle soluzioni del seguente sistema

$$\begin{cases} x^2 - 1 \geq 0 \\ x \geq 0 \\ \sqrt{x^2 - 1} - \sqrt{x} \neq 0 \end{cases}.$$

Il sistema equivale a  $\begin{cases} x \geq 1 \text{ o } x \leq -1 \\ x \geq 0 \\ \sqrt{x^2 - 1} \neq \sqrt{x} \end{cases}$ , cioè a  $\begin{cases} x \geq 1 \\ x^2 - 1 \neq x \end{cases}$ , cioè a

$$\begin{cases} x \geq 1 \\ x^2 - x - 1 \neq 0 \end{cases}, \text{ cioè a } \begin{cases} x \geq 1 \\ x \neq \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2} \end{cases}, \text{ cioè a}$$

$$1 \leq x < \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \text{ o } x > \frac{1 + \sqrt{5}}{2}.$$

Quindi si ha

$$\text{dom}(f) = \left[1, \frac{1 + \sqrt{5}}{2}[\cup] \frac{1 + \sqrt{5}}{2}, +\infty[.\right.$$

- (b) Il dominio naturale di  $f$  è dato dalle soluzioni del seguente sistema

$$\begin{cases} x^2 - 2 \geq 0 \\ x \geq 0 \\ \sqrt{x^2 - 2} - \sqrt{x} \neq 0 \end{cases}.$$

Il sistema equivale a  $\begin{cases} x \geq \sqrt{2} \text{ o } x \leq -\sqrt{2} \\ x \geq 0 \\ \sqrt{x^2 - 2} \neq \sqrt{x} \end{cases}$ , cioè a  $\begin{cases} x \geq \sqrt{2} \\ x^2 - 2 \neq x \end{cases}$ , cioè a

$\begin{cases} x \geq \sqrt{2} \\ x^2 - x - 2 \neq 0 \end{cases}$ , cioè a  $\begin{cases} x \geq \sqrt{2} \\ x \neq 2 \text{ e } x \neq -1 \end{cases}$ , cioè a  $\sqrt{2} \leq x < 2$  o  $x > 2$ .

Quindi si ha

$$\text{dom}(f) = [\sqrt{2}, 2[ \cup ]2, +\infty[ .$$

(c) Il dominio naturale di  $f$  è dato dalle  $x \in \mathbf{R}$  tali che  $|x| - 1 \geq 0$ , cioè tali che  $|x| \geq 1$ , cioè tali che  $x \leq -1$  o  $x \geq 1$ . Quindi si ha

$$\text{dom}(f) = ]-\infty, -1] \cup [1, +\infty[ .$$

(d) Il dominio naturale di  $f$  è dato dalle  $x \in \mathbf{R}$  tali che  $|x| - 1 \neq 0$ , cioè tali che  $|x| \neq 1$ , cioè tali che  $x \neq -1$  e  $x \neq 1$ . Quindi si ha

$$\text{dom}(f) = ]-\infty, -1[ \cup ]-1, 1[ \cup ]1, +\infty[ .$$

## Capitolo 2

# Numeri complessi

### 2.1 Parte reale, parte immaginaria, modulo

1. **Esercizio.** Determinare la parte reale e la parte immaginaria dei seguenti numeri complessi:

- (a)  $\frac{1}{i}$ ;
- (b)  $-\frac{1}{i}$ ;
- (c)  $\frac{1-i}{1+7i} - 5i$ ;
- (d)  $1 - \frac{1}{i}$ ;
- (e)  $i - \frac{1}{i}$ .

**Risoluzione.**

- (a) Si ha  $\frac{1}{i} = -i$ ; quindi si ha  $\Re(\frac{1}{i}) = 0$ ,  $\Im(\frac{1}{i}) = -1$ .
- (b) Si ha  $-\frac{1}{i} = i$ ; quindi si ha  $\Re(-\frac{1}{i}) = 0$ ,  $\Im(-\frac{1}{i}) = 1$ .
- (c) Si ha
 
$$\frac{1-i}{1+7i} - 5i = \frac{(1-i)(1-7i)}{(1+7i)(1-7i)} - 5i = \frac{1-7i-i-7}{1+49} - 5i = \frac{-6-8i}{50} - 5i = -\frac{3}{25} - \frac{4}{25} - 5i = -\frac{3}{25} - \frac{129}{25}i.$$
 Si ha quindi  $\Re(\frac{1-i}{1+7i} - 5i) = -\frac{3}{25}$  e  $\Im(\frac{1-i}{1+7i} - 5i) = -\frac{129}{25}$ .
- (d) Si ha  $1 - \frac{1}{i} = 1 + i$ . Si ha quindi  $\Re(1 - \frac{1}{i}) = 1$  e  $\Im(1 - \frac{1}{i}) = 1$ .
- (e) Si ha  $i - \frac{1}{i} = i + i = 2i$ . Si ha quindi  $\Re(i - \frac{1}{i}) = 0$  e  $\Im(i - \frac{1}{i}) = 2$ .

2. **Esercizio.** Determinare la parte reale, la parte immaginaria e il modulo dei seguenti numeri complessi:

- (a)  $\frac{1}{1-i}$ ;

(b)  $\frac{2+i}{3+i}$ .

**Risoluzione.**

(a) Si ha

$$\frac{1}{1-i} = \frac{1+i}{(1-i)(1+i)} = \frac{1+i}{2} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}i.$$

$$\text{Quindi si ha } \Re z = \frac{1}{2}, \Im z = \frac{1}{2}, |z| = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

(b) Si ha

$$\frac{2+i}{3+i} = \frac{(2+i)(3-i)}{(3+i)(3-i)} = \frac{6-2i+3i+1}{9+1} = \frac{7+i}{10} = \frac{7}{10} + \frac{1}{10}i.$$

Si ha quindi

$$\Re\left(\frac{2+i}{3+i}\right) = \frac{7}{10}, \Im\left(\frac{2+i}{3+i}\right) = \frac{1}{10} \text{ e}$$

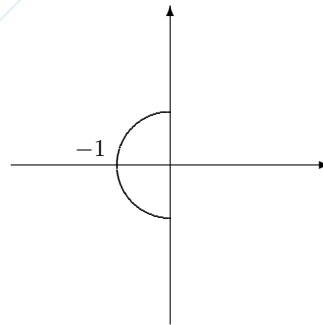
$$\left|\frac{2+i}{3+i}\right| = \sqrt{\frac{49}{100} + \frac{1}{100}} = \sqrt{\frac{50}{100}} = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

## 2.2 Rappresentazione di sottoinsiemi di $\mathbf{C}$

### 1. Esercizio.

Disegnare

$$A = \{z \in \mathbf{C}; |z| < 1, \Re z < 0\}.$$

**Risoluzione.**

## Capitolo 3

# Lo spazio euclideo $\mathbf{R}^N$

### 3.1 Composizione di funzioni

1. **Esercizio.** Sia

$$f : \mathbf{N} \rightarrow \mathbf{R}_+, n \rightarrow n! + 1 \quad \text{e} \quad g : \mathbf{R}_+ \rightarrow \mathbf{R}, x \rightarrow \sqrt{x} + 1 ;$$

determinare  $g \circ f$ , esprimendola nella forma

$$g \circ f : A \rightarrow B, u \rightarrow \mathcal{T}\{u\},$$

esplicitando  $A$ ,  $B$  e  $\mathcal{T}\{u\}$ .

**Risoluzione.** Sia  $n \in \mathbf{N}$ ; si ha  
 $g(f(n)) = g(n! + 1) = \sqrt{n! + 1} + 1$ .

Si ha quindi

$$g \circ f : \mathbf{N} \rightarrow \mathbf{R}, n \rightarrow \sqrt{n! + 1} + 1 .$$

2. Sia

$$f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}, x \rightarrow \sqrt{|x|}$$

e

$$g : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}, x \rightarrow 2x - 1 ;$$

- determinare  $f \circ g$ ;
- determinare  $g \circ f$ ;
- dimostrare che  $g$  è biettiva e determinare  $g^{-1}$ .

**Risoluzione.**

- Per ogni  $x \in \mathbf{R}$  si ha  
 $(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(2x - 1) = \sqrt{|2x - 1|}$ .

Si ha quindi

$$f \circ g : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}, x \rightarrow \sqrt{|2x - 1|} .$$

(b) Per ogni  $x \in \mathbf{R}$  si ha

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(\sqrt{|x|}) = 2\sqrt{|x|} - 1.$$

Si ha quindi

$$g \circ f : \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R}, x \longrightarrow 2\sqrt{|x|} - 1.$$

(c) Sia  $x \in \mathbf{R}$ ; consideriamo l'equazione di incognita  $x$  in  $\mathbf{R}$ ,

$$2x - 1 = y.$$

L'equazione ammette una ed una sola soluzione,

$$x = \frac{y+1}{2}.$$

Quindi  $g$  è biettiva e si ha

$$g^{-1} : \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R}, y \longrightarrow \frac{y+1}{2}.$$

### 3.2 Componenti di una funzione vettoriale

1. **Esercizio.** Determinare le componenti della funzione  $f : \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R}^2$  che a  $t \in \mathbf{R}$  fa corrispondere il punto intersezione della retta di equazione

$$5x + 7y - 2 = 0$$

con la retta di equazione

$$y = t.$$

**Risoluzione.** Il valore  $f(t)$  è la soluzione del sistema  $\begin{cases} 5x + 7y - 2 = 0 \\ y = t \end{cases}$ . Il sistema è equivalente a

$$\begin{cases} y = t \\ 5x = 2 - 7t \end{cases}, \text{ cioè a } \begin{cases} y = t \\ x = \frac{2-7t}{5} \end{cases}.$$

Quindi si ha  $f(t) = (\frac{2-7t}{5}, t)$ ; quindi

$$f_1 : \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R}, t \longrightarrow \frac{2-7t}{5},$$

$$f_2 : \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R}, t \longrightarrow t.$$

### 3.3 Prodotto scalare e norma

1. **Esercizio.** Calcolare:

(a)  $((1, 4, 3, 2) | (-1, 2, -3, 1))$ ;

(b)  $((1, 2, -1, 4) | (5, 3, 1, -2))$ ;

## 3.4. DISTANZA

29

$$(c) \left( 3(5, 2, 1, 4) \mid -(3, 1, -2, 4) \right).$$

**Risoluzione.**

$$(a) \text{ Si ha } \left( (1, 4, 3, 2) \mid (-1, 2, -3, 1) \right) = -1 + 8 - 9 + 2 = 0.$$

$$(b) \text{ Si ha } \left( (1, 2, -1, 3) \mid (4, 1, 5, 6) \right) = 4 + 2 - 5 + 18 = 19.$$

(c) Si ha

$$\left( 3(5, 2, 1, 4) \mid -(3, 1, -2, 4) \right) = \left( (15, 6, 3, 12) \mid (-3, -1, 2, -4) \right) = -45 - 6 + 6 - 48 = -93.$$

2. **Esercizio.** Determinare il valore della seguente espressione:

$$\|2(4, 1, -2, -3) + (5, 7, -1, 2)\|.$$

**Risoluzione.** Si ha

$$\|2(4, 1, -2, -3) + (5, 7, -1, 2)\| = \|(8, 2, -4, -6) + (5, 7, -1, 2)\| = \|(13, 9, -5, 4)\| = \sqrt{169 + 81 + 25 + 16} = \sqrt{291}.$$

3. **Esercizio.** Dire quali delle seguenti espressioni hanno significato; di queste calcolarne il valore:

$$(a) \|2(3, 1, 2)\| + \|(1, 2, 3)\|;$$

$$(b) 7 - (1, 2, 3);$$

$$(c) \frac{(3, 1, 4)}{(4, 5, 3)}.$$

**Risoluzione.**

$$(a) \text{ L'espressione } \|2(3, 1, 2)\| + \|(1, 2, 3)\| \text{ ha significato e si ha } \|2(3, 1, 2)\| + \|(1, 2, 3)\| = 2\sqrt{9 + 1 + 4} + \sqrt{1 + 4 + 9} = 2\sqrt{14} + \sqrt{14} = 3\sqrt{14}.$$

(b) L'espressione  $7 - (1, 2, 3)$  non ha significato.(c) L'espressione  $\frac{(3, 1, 4)}{(4, 5, 3)}$  non ha significato.

## 3.4 Distanza

1. **Esercizio.** Calcolare la distanza

$$(a) d\left((1, 5, 3, 4), (0, 2, 1, 6)\right);$$

$$(b) d\left((3, 1, 4, 5), (2, 1, 4, 2)\right).$$

**Risoluzione.**

(a) Si ha

$$d\left((1, 5, 3, 4), (0, 2, 1, 6)\right) = \|(1, 5, 3, 4) - (0, 2, 1, 6)\| = \|(1, 3, 2, -2)\| = \sqrt{1 + 9 + 4 + 4} = \sqrt{18} = 3\sqrt{2}.$$

(b) Si ha

$$d((3, 1, 4, 5), (2, 1, 4, 2)) = \|(3, 1, 4, 5) - (2, 1, 4, 2)\| = \|(1, 0, 0, 3)\| = \sqrt{1+9} = \sqrt{10}.$$

## Capitolo 4

# Topologia di $\mathbf{R}^N$

### 4.1 Intorni in $\mathbf{R}^N$

1. **Esercizio.** Dare un esempio di un intorno  $U$  in  $\mathbf{R}$  di 1 tale che  $1 + \frac{1}{2} \notin U$ .

**Risoluzione.**  $U = ]\frac{1}{2}, \frac{3}{2}[$ .

2. **Esercizio.** Sia

$$A = \left\{ -\frac{1}{n} + 1; n \in \mathbf{N}^* \right\};$$

- (a) determinare  $\overset{\circ}{A}$  e dire se  $A$  è aperto;
- (b) determinare  $\overline{A}$  e dire se  $A$  è chiuso;
- (c) determinare  $\text{Fr}(A)$ ;
- (d) determinare l'insieme dei punti isolati di  $A$ .

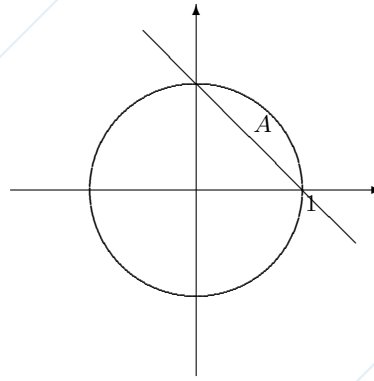
**Risoluzione.**

- (a) Si ha  $\overset{\circ}{A} = \emptyset$ ; quindi  $A$  non è aperto.
  - (b) Si ha  $\overline{A} = A \cup \{1\}$ ; poichè  $1 \notin A$ ,  $A$  non è chiuso.
  - (c) Si ha  $\text{Fr}(A) = A \cup \{1\}$ .
  - (d) Ogni punto di  $A$  è punto isolato.
3. **Esercizio.** Disegnare nel piano l'insieme

$$A = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2; x^2 + y^2 \leq 1, x + y > 1\};$$

dire se  $A$  è aperto; dire se  $A$  è chiuso; determinare  $\overline{A}$ ,  $\overset{\circ}{A}$ ,  $\text{Fr}(A)$  e l'insieme dei punti isolati di  $A$ .

**Risoluzione.** Si ha:



L'insieme  $A$  non è aperto; l'insieme  $A$  non è chiuso; si ha:

$$\bar{A} = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2; x^2 + y^2 \leq 1, x + y \geq 1\},$$

$$\overset{\circ}{A} = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2; x^2 + y^2 < 1, x + y > 1\},$$

$$\text{Fr}(A) = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2; x^2 + y^2 = 1, x + y \geq 1\} \cup$$

$$\{(x, y) \in \mathbf{R}^2; x^2 + y^2 \leq 1, x + y = 1\};$$

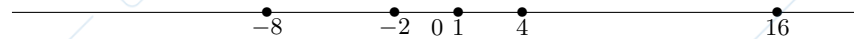
l'insieme dei punti isolati di  $A$  è l'insieme vuoto.

4. **Esercizio.** Sia

$$A = \{(-2)^n; n \in \mathbf{N}\};$$

consideriamo  $A$  come sottoinsieme dello spazio topologico  $\mathbf{R}$ ; determinare  $\overset{\circ}{A}$ ,  $\bar{A}$ ,  $\text{Fr}(A)$  e l'insieme dei punti isolati di  $A$ ; dire se  $A$  è aperto e se  $A$  è chiuso (è sufficiente rispondere direttamente, avendo presente la posizione dei punti di  $A$  sulla retta).

**Risoluzione.**



L'insieme  $A$  è formato da infiniti punti fra loro "separati". Si ha

- (a)  $\overset{\circ}{A} = \emptyset$ ;
- (b)  $\bar{A} = A$ ;
- (c)  $\text{Fr}(A) = A$ ;
- (d) ogni punto di  $A$  è isolato;
- (e)  $A$  non è aperto, in quanto  $A \neq \overset{\circ}{A}$ ;
- (f)  $A$  è chiuso, in quanto  $A = \bar{A}$ .

## 4.2 Gli spazi topologici $\bar{\mathbf{R}}$ , $\mathbf{R}_{(+)}$ e $\mathbf{R}_{(-)}$

1. **Esercizio.** Trovare, per lo spazio topologico  $\bar{\mathbf{R}}$ , un intorno di  $+\infty$  diverso da  $\bar{\mathbf{R}}$  e contenente  $\mathbf{N}$ .

**Risoluzione.** Un intorno di  $+\infty$ , diverso da  $\bar{\mathbf{R}}$  e contenente  $\mathbf{N}$  è  $[0, +\infty[$ .

## 4.3. FUNZIONI CONTINUE

33

## 4.3 Funzioni continue

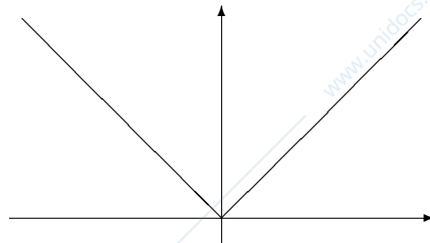
1. **Esercizio.** Sia

$$f : \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R}, x \longrightarrow (\operatorname{sgn} x)x ;$$

- (a) disegnare il grafico di  $f$ ;  
 (b) determinare l'insieme dei punti ove  $f$  è continua.

**Risoluzione.**(a) Per ogni  $x \in \mathbf{R}$  si ha

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{per } x > 0 \\ 0 & \text{per } x = 0 \\ -x & \text{per } x < 0 \end{cases}$$

quindi  $f$  è la funzione valore assoluto; il grafico di  $f$  è quindi(b) La funzione è continua in ogni  $x \in \mathbf{R}$ .2. **Esercizio.** Dire se

$$f : [0, 27] \longrightarrow \mathbf{R}, x \longrightarrow \frac{x^3 + \sqrt{x}}{x^4 + 1}$$

ammette massimo e se ammette minimo, spiegandone il motivo.

**Risoluzione.** Poichè  $f$  è continua e poichè  $\operatorname{dom}(f)$  è compatto, per il teorema di Weierstrass,  $f$  ammette massimo e minimo.3. **Esercizio.** Assegnate le funzioni

- (a)  $f : \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R}, x \longrightarrow 2x^3 + 3x^2 - 5x + 1,$   
 (b)  $f : \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R}, x \longrightarrow \frac{x^3 + 2x^2 + x + 1}{x^4 + 1},$

dire se l'equazione di incognita  $x$ 

$$f(x) = 0$$

ammette almeno una soluzione; in tal caso determinare  $a, b \in \mathbf{R}$ , con  $a < b$  tali che nell'intervallo  $]a, b[$  vi sia almeno una soluzione dell'equazione.**Risoluzione.**

- (a) Si ha  $f(0) = 1 > 0$ ,  $f(-3) = -54 + 27 + 15 + 1 = -11 < 0$ ; quindi per il teorema del valor intermedio esiste  $x \in ]-3, 0[$  tale che  $f(x) = 0$ .
- (b) Si ha  $f(-1) = \frac{1}{2} > 0$  e  $f(-2) = -\frac{1}{17} < 0$ ; per il teorema degli zeri di una funzione continua, esiste  $x \in ]-2, -1[$  tale che  $f(x) = 0$ .

## 4.4 Limiti

(a) **Esercizio.** Calcolare i seguenti limiti:

- i.  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^4 - 3x^2 + 2x - 1}{2x^3 + 3x - 5}$ ;
- ii.  $\lim_{x \rightarrow +\infty} x(\sqrt{x^2 + 1} - \sqrt{x^2 - 1})$ ;
- iii.  $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2 + x + 1} - x)$ ;
- iv.  $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2 + x + 1} - \sqrt{x^2 - 1})$ ;
- v.  $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt[3]{x^3 + 1} - x)$ ;
- vi.  $\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{5x + 3}{x^2 - 1}$ ;
- vii.  $\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{5x + 3}{x^2 - 1}$ .

**Risoluzione.**

i. Si ha

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^4 - 3x^2 + 2x - 1}{2x^3 + 3x - 5} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{2}x = -\infty.$$

ii. Si ha

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} x(\sqrt{x^2 + 1} - \sqrt{x^2 - 1}) &= \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x(\sqrt{x^2 + 1} - \sqrt{x^2 - 1})(\sqrt{x^2 + 1} + \sqrt{x^2 - 1})}{\sqrt{x^2 + 1} + \sqrt{x^2 - 1}} &= \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x \cdot 2}{\sqrt{x^2 + 1} + \sqrt{x^2 - 1}} &= \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x}{x(\sqrt{1 + \frac{1}{x^2}} + \sqrt{1 - \frac{1}{x^2}})} &= \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2}{\sqrt{1 + \frac{1}{x^2}} + \sqrt{1 - \frac{1}{x^2}}} &= \frac{2}{2} = 1. \end{aligned}$$

iii. Si ha

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2 + x + 1} - x) &= \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\sqrt{x^2 + x + 1} - x)(\sqrt{x^2 + x + 1} + x)}{\sqrt{x^2 + x + 1} + x} &= \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 + x + 1 - x^2}{\sqrt{x^2 + x + 1} + x} &= \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x + 1}{\sqrt{x^2 + x + 1} + x} &= \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x(1 + \frac{1}{x})}{x(\sqrt{1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}} + 1)} &= \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1 + \frac{1}{x}}{\sqrt{1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}} + 1} &= \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

iv. Si ha

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2 + x + 1} - \sqrt{x^2 - 1}) &= \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\sqrt{x^2 + x + 1} - \sqrt{x^2 - 1})(\sqrt{x^2 + x + 1} + \sqrt{x^2 - 1})}{\sqrt{x^2 + x + 1} + \sqrt{x^2 - 1}} &= \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 + x + 1 - x^2 + 1}{\sqrt{x^2 + x + 1} + \sqrt{x^2 - 1}} &= \end{aligned}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x+2}{\sqrt{x^2+x+1} + \sqrt{x^2-1}} =$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x(1+\frac{2}{x})}{x(\sqrt{1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}} + \sqrt{1-\frac{1}{x^2}})} =$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1+\frac{2}{x}}{\sqrt{1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}} + \sqrt{1-\frac{1}{x^2}}} = \frac{1}{2}.$$

v. Si ha

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt[3]{x^3+1} - x) =$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\sqrt[3]{x^3+1}-x)(\sqrt[3]{(x^3+1)^2+x} \sqrt[3]{x^3+1+x^2})}{\sqrt[3]{(x^3+1)^2+x} \sqrt[3]{x^3+1+x^2}} =$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3+1-x^3}{\sqrt[3]{(x^3+1)^2+x} \sqrt[3]{x^3+1+x^2}} =$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3+1-x^3}{\sqrt[3]{(x^3+1)^2+x} \sqrt[3]{x^3+1+x^2}} =$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{(x^3+1)^2+x} \sqrt[3]{x^3+1+x^2}} = 0.$$

vi. Si ha

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \left| \frac{5x+3}{x^2-1} \right| = +\infty.$$

Si ha  $\lim_{x \rightarrow 1^-} (5x+3) = 8$ ; per il teorema della permanenza del segno la funzione  $5x+3$  è positiva in un intorno sinistro di 1.

Si ha  $x^2-1 > 0$  se e solo se  $x < -1$  o  $x > 1$  e  $x^2-1 < 0$  se e solo se  $-1 < x < 1$ ; quindi la funzione  $x^2-1$  è negativa in un intorno sinistro di 1.

Quindi la funzione  $\frac{5x+3}{x^2-1}$  è negativa in un intorno sinistro di 1.

Si ha quindi  $\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{5x+3}{x^2-1} = -\infty$ .

vii. Si ha

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} \left| \frac{5x+3}{x^2-1} \right| = +\infty.$$

Si ha  $\lim_{x \rightarrow 1^+} (5x+3) = 8$ ; per il teorema della permanenza del segno la funzione  $5x+3$  è positiva in un intorno destro di 1.

Si ha  $x^2-1 > 0$  se e solo se  $x < -1$  o  $x > 1$  e  $x^2-1 < 0$  se e solo se  $-1 < x < 1$ ; quindi la funzione  $x^2-1$  è positiva in un intorno destro di 1.

Quindi la funzione  $\frac{5x+3}{x^2-1}$  è positiva in un intorno destro di 1.

Si ha quindi  $\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{5x+3}{x^2-1} = +\infty$ .

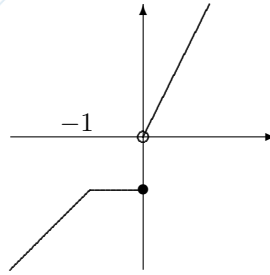
4. **Esercizio.** Sia

$$f : ]-\infty, 1] \longrightarrow \mathbf{R}, x \longrightarrow \begin{cases} x & \text{per } x \leq -1 \\ -1 & \text{per } -1 < x \leq 0 \\ 2x & \text{per } 0 < x \leq 1 \end{cases};$$

- (a) tracciare approssimativamente il grafico di  $f$ ;  
 (b) determinare l'insieme dei punti ove  $f$  è continua.

**Risoluzione.**

- (a) Si ha



- (b) Per il carattere locale della continuità  $f$  è continua su  $] -\infty, -1[ \cup ] -1, 0[ \cup ] 0, 1]$ .

Consideriamo il punto  $-1$ .

Si ha

$$\lim_{x \rightarrow -1-, x \neq -1} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1-, x \in ]-\infty, -1[} x = -1$$

e

$$\lim_{x \rightarrow -1+, x \neq -1} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1+, x \in ]-1, 0]} -1 = -1.$$

Si ha quindi  $\lim_{x \rightarrow -1, x \neq -1} f(x) = -1$ .

Si ha  $f(-1) = -1$ .

Quindi  $f$  è continua in  $-1$ .

Consideriamo il punto  $0$ .

Si ha

$$\lim_{x \rightarrow 0-, x \neq 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0-, x \in ]-1, 0]} -1 = -1$$

e

$$\lim_{x \rightarrow 0+, x \neq 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0+, x \in ]0, 1]} 2x = 0.$$

Quindi  $f$  ( $] -\infty, 1] - \{0\}$ ) non è convergente; Quindi  $f$  non è continua in  $0$ .

L'insieme dei punti ove  $f$  è continua è quindi  $] -\infty, 0[ \cup ] 0, 1]$ .

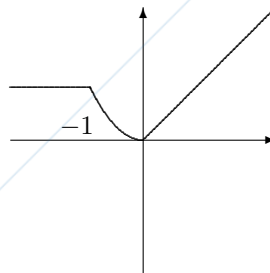
5. **Esercizio.** Assegnata la funzione

$$f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}, x \rightarrow \begin{cases} 1 & \text{per } x \leq -1 \\ x^2 & \text{per } -1 < x < 0 \\ x & \text{per } x \geq 0 \end{cases},$$

- (a) tracciare approssimativamente il grafico di  $f$ ;  
 (b) determinare l'insieme dei punti ove  $f$  è continua.

**Risoluzione.**

- (a) Si ha



## 4.4. LIMITI

37

- (b) Per il carattere locale della continuità  $f$  è continua su  $] -\infty, -1[ \cup ] -1, 0[ \cup ] 0, 1]$ .

Consideriamo il punto  $-1$ .

Si ha

$$\lim_{x \rightarrow -1-, x \neq -1} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1-, x \in ]-\infty, -1[} 1 = 1$$

e

$$\lim_{x \rightarrow -1+, x \neq -1} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1+, x \in ]-1, 0]} x^2 = 1.$$

Si ha quindi  $\lim_{x \rightarrow -1, x \neq -1} f(x) = 1$ .

Si ha  $f(-1) = 1$ .

Quindi  $f$  è continua in  $-1$ .

Consideriamo il punto  $0$ .

Si ha

$$\lim_{x \rightarrow 0-, x \neq 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0-, x \in ]-1, 0[} x^2 = 0$$

e

$$\lim_{x \rightarrow 0+, x \neq 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0+, x \in ]0, +\infty[} x = 0.$$

Si ha quindi  $\lim_{x \rightarrow 0, x \neq 0} f(x) = 0$ .

Si ha  $f(0) = 0$ .

Quindi  $f$  è continua in  $0$ .

L'insieme dei punti ove  $f$  è continua è quindi  $\mathbf{R}$ .



## Capitolo 5

# Confronto asintotico

### 5.1 Confronto asintotico

1. **Esercizio.** Trovare un  $p \in \mathbf{Z}$  tale che:

(a)  $x^3 \ll_{x \rightarrow +\infty} x^{p-4}$ ;

(b)  $\frac{1}{x^{4p+1}} \ll_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^3}$ ;

giustificare il risultato.

**Risoluzione.**

(a) Si ha  $x^3 \ll_{x \rightarrow +\infty} x^{p-4}$  se e solo se  $3 < p - 4$ , cioè se e solo se  $p > 7$ . Si può quindi scegliere  $p = 8$ .

(b) Si ha  $\frac{1}{x^{4p+1}} \ll_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^3}$  se e solo se  $x^{-(4p+1)} \ll_{x \rightarrow 0} x^{-3}$ , cioè se e solo se  $-4p - 1 > -3$ , cioè se e solo se  $-4p > -2$ , cioè se e solo se  $p < \frac{1}{2}$ . Si può quindi scegliere  $p = 0$ .

2. **Esercizio.** Determinare i  $p \in \mathbf{Z}$  tale che:

(a)  $x^5 + 3x^2 \ll_{x \rightarrow +\infty} x^{3p-1}$ ;

(b)  $x^5 + 2x^2 \ll_{x \rightarrow 0} x^{3p-2}$ ;

(c)  $x^4 - 3x \ll_{x \rightarrow -\infty} x^{2p-4}$ ;

giustificare il risultato.

**Risoluzione.**

(a) Si ha  $x^5 + 3x^2 \sim_{x \rightarrow +\infty} x^5$ ; quindi si ha  $x^5 + 3x^2 \ll_{x \rightarrow +\infty} x^{3p-1}$  se e solo se  $x^5 \ll_{x \rightarrow +\infty} x^{3p-1}$ , cioè se e solo se  $5 < 3p - 1$ , cioè se e solo se  $6 < 3p$ , cioè se e solo se  $p > 2$ .

(b) Si ha  $x^5 + 2x^2 \sim_{x \rightarrow 0} 2x^2$ ; quindi si ha  $x^5 + 2x^2 \ll_{x \rightarrow 0} x^{3p-2}$  se e solo se  $x^2 \ll_{x \rightarrow 0} x^{3p-2}$ , cioè se e solo se  $2 > 3p - 2$ , cioè se e solo se  $4 > 3p$ , cioè se e solo se  $p < \frac{4}{3}$ .

- (c) Si ha  $x^4 - 3x \sim_{x \rightarrow -\infty} x^4$ ; quindi si ha  $x^4 - 3x \ll_{x \rightarrow -\infty} x^{2p-4}$  se e solo se  $x^4 \ll_{x \rightarrow -\infty} x^{2p-4}$ , cioè se e solo se  $4 < 2p - 4$ , cioè se e solo se  $2p > 8$ , cioè se e solo se  $p > 4$ .

3. **Esercizio.** Determinare gli  $a \in \mathbf{R}$  e i  $p \in \mathbf{Z}$  tali che

- (a)  $x^3 + x + 1 \sim_{x \rightarrow 0} (a - 2)x^{p+3}$ ,  
 (b)  $x^2 + 3x + 1 \sim_{x \rightarrow +\infty} (a + 1)x^{p-1} + 3ax + 2$ .

**Risoluzione.**

- (a) Si ha  $x^3 + x + 1 \sim_{x \rightarrow 0} 1$ ; quindi si ha  $x^3 + x + 1 \sim_{x \rightarrow 0} (a - 2)x^{p+3}$  se e solo se  $1 \sim_{x \rightarrow 0} (a - 2)x^{p+3}$ , cioè se e solo se  $p + 3 = 0$  e  $a - 2 = 1$ , cioè se e solo se  $p = -3$  e  $a = 3$ .  
 (b) Si ha  $x^2 + 3x + 1 \sim_{x \rightarrow +\infty} x^2$ ; quindi si ha  $x^2 + 3x + 1 \sim_{x \rightarrow +\infty} (a + 1)x^{p-1} + 3ax + 2$  se e solo se  $x^2 \sim_{x \rightarrow +\infty} (a + 1)x^{p-1} + 3ax + 2$ . Perché ciò accada deve essere  $p - 1 = 2$ , cioè  $p = 3$ ; deve inoltre essere  $a + 1 \neq 0$ , cioè  $a \neq -1$ . Supponiamo  $p = 3$  e  $a \neq -1$ ; si ha allora  $(a + 1)x^{p-1} + 3ax + 2 \sim_{x \rightarrow +\infty} (a + 1)x^2$ ; si ha quindi  $x^2 \sim_{x \rightarrow +\infty} (a + 1)x^2$  se e solo se  $x^2 \sim_{x \rightarrow +\infty} (a + 1)x^2$ , cioè se e solo se  $a + 1 = 1$ , cioè se e solo se  $a = 0$ . Si trova dunque  $p = 3$  e  $a = 0$ .

## 5.2 Principio di sostituzione

1. **Esercizio.** Calcolare i seguenti limiti

- (a)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{4x^2+1}+x}{x+\sqrt{x}}$ ;  
 (b)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x+2x}}{2x^2-3\sqrt{x}}$ .

**Risoluzione.**

- (a) Si ha  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{4x^2+1}+x}{x+\sqrt{x}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x}{x} = 3$ .  
 (b) Si ha  $\frac{\sqrt{x+2x}}{2x^2-3\sqrt{x}} \sim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x}}{-3\sqrt{x}} = -\frac{1}{3}$ . Quindi si ha  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x+2x}}{2x^2-3\sqrt{x}} = -\frac{1}{3}$ .

## 5.3 Asintoti

1. **Esercizio.** Dire se le seguenti funzioni ammettono sviluppo asintotico affine per  $x \rightarrow +\infty$ ; in caso affermativo determinare l'asintoto:

- (a)  $f(x) = \frac{2x^2+x+3}{x-3}$ ;  
 (b)  $f(x) = \sqrt{x^2 - x + 2}$ .

**Risoluzione.**

## 5.3. ASINTOTI

41

(a) Si ha

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^2+x+3}{x^2-3x} = 2.$$

Si ha

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) - x = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \frac{2x^2+x+3}{x-3} - 2x \right) =$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^2+x+3-2x^2+6x}{x-3} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{7x+3}{x-3} = 7.$$

Quindi  $f$  ammette sviluppo asintotico affine per  $x \rightarrow +\infty$  e l'asintoto a  $f$  per  $x \rightarrow \infty$  è la retta  $y = 2x + 7$ .

(b) Si ha

$$\frac{\sqrt{x^2-x+2}}{x} \sim_{x \rightarrow +\infty} 1; \text{ quindi si ha}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x^2-x+2}}{x} = 1.$$

Si ha

$$\sqrt{x^2-x+2} - x = \frac{(\sqrt{x^2-x+2}-x)(\sqrt{x^2-x+2}+x)}{\sqrt{x^2-x+2}+x} = \frac{x^2-x+2-x^2}{\sqrt{x^2-x+2}+x} =$$

$$\frac{-x+2}{\sqrt{x^2-x+2}+x} \sim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-x}{2x} = -\frac{1}{2}.$$

Quindi  $f$  ammette sviluppo asintotico affine per  $x \rightarrow +\infty$  e l'asintoto di  $f$  per  $x \rightarrow +\infty$  è la retta

$$y = x - \frac{1}{2}.$$

2. **Esercizio.** Dire se le seguenti funzioni ammettono sviluppo asintotico affine per  $x \rightarrow -\infty$ ; in caso affermativo determinare l'asintoto:

(a)  $f(x) = \sqrt{x^2 - x}$ ;

(b)  $f(x) = \frac{\sqrt{x^6+x^5+1}}{x^2}$ ;

(c)  $f(x) = \sqrt[3]{x^3 + x^2 + x + 1}$ .

**Risoluzione.**

(a) Si ha

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{x^2-x}}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{x^2}}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{|x|}{x} =$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-x}{x} = -1.$$

Si ha

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (f(x) + x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{x^2-x} + x) =$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{(\sqrt{x^2-x}+x)(\sqrt{x^2-x}-x)}{\sqrt{x^2-x}-x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2-x-x^2}{\sqrt{x^2-x}-x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-x}{-2x} =$$

$$\frac{1}{2}.$$

Quindi  $f$  ammette asintoto per  $x \rightarrow -\infty$  e l'asintoto di  $f$  per  $x \rightarrow -\infty$  è la retta di equazione  $y = -x + \frac{1}{2}$ .

(b) Nell'equivalenza che segue possiamo supporre  $x < 0$ ; si ha

$$\frac{\sqrt{x^6+x^5+1}}{x^2} \sim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{x^6}}{x^2} = \frac{\sqrt{(x^3)^2}}{x^2} = \frac{|x^3|}{x^2} = \frac{-x^3}{x^2} = -x$$

e

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) + x = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left( \frac{\sqrt{x^6+x^5+1}}{x^2} + x \right) =$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{x^6+x^5+1}+x^3}{x^2} =$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{x^6+x^5+1+x^3} \sqrt{x^6+x^5+1-x^2}}{x^2 \sqrt{x^6+x^5+1-x^2}} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^6+x^5+1-x^6}{x^2(\sqrt{x^6+x^5+1-x^2})} =$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^5}{x^2(\sqrt{x^6+x^5+1-x^2})} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^5}{-2x^5} = -\frac{1}{2}.$$

Quindi  $f$  ammette asintoto per  $x \rightarrow -\infty$  e l'asintoto di  $f$  per  $x \rightarrow -\infty$  è la retta di equazione  $y = -x - \frac{1}{2}$ .

(c) Si ha

$$\sqrt[3]{x^3 + x^2 + x + 1} \sim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt[3]{x^3} = x$$

e

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) - x = \lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt[3]{x^3 + x^2 + x + 1} - x) =$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{(\sqrt[3]{x^3 + x^2 + x + 1} - x)(\sqrt[3]{(x^3 + x^2 + x + 1)^2 + x \sqrt[3]{x^3 + x^2 + x + 1} + x^2})}{\sqrt[3]{(x^3 + x^2 + x + 1)^2 + x \sqrt[3]{x^3 + x^2 + x + 1} + x^2}} =$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^3 + x^2 + x + 1 - x^3}{\sqrt[3]{(x^3 + x^2 + x + 1)^2 + x \sqrt[3]{x^3 + x^2 + x + 1} + x^2}} =$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2}{3x^2} = \frac{1}{3}.$$

Quindi  $f$  ammette asintoto per  $x \rightarrow -\infty$  e l'asintoto di  $f$  per  $x \rightarrow -\infty$  è la retta di equazione  $y = x + \frac{1}{3}$ .

## Capitolo 6

### Serie

#### 6.1 Serie convergenti

1. **Esercizio.** Data la serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n+3}{n+4},$$

e indicata con  $s$  la successione delle somme parziali, calcolare  $s_2$ , esprimendo tale numero razionale nella forma  $\frac{p}{q}$ .

**Risoluzione.** Indicata con  $a$  la successione dei termini della serie, si ha  $a_0 = \frac{3}{4}$ ,  $a_1 = \frac{4}{5}$ ,  $a_2 = \frac{5}{6}$ ; quindi si ha

$$s_2 = \frac{3}{4} + \frac{4}{5} + \frac{5}{6} = \frac{143}{60}.$$

#### 6.2 Serie geometrica

1. **Esercizio.** Dire se le seguenti serie sono convergenti e in caso affermativo, determinare la loro somma.

(a)  $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{2^{n-1} 3^{n+1}}{3^{2n}};$

(b)  $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{2^{n-2} 3^{n+2}}{3^{2n}};$

(c)  $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{2^{n-3} 3^{n+3}}{3^{2n}};$

(d)  $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{2^{n-4} 3^{n+4}}{3^{2n}};$

giustificare la risposta.

**Risoluzione.**

(a) Si ha

$$(-1)^n \frac{2^{n-1} 3^{n+1}}{3^{2n}} = (-1)^n \frac{2^n 3^n}{9^n} \frac{3}{2} = (-1 \cdot \frac{6}{9})^n \frac{3}{2} = (-\frac{2}{3})^n \frac{3}{2}.$$

Quindi la serie data è una serie geometrica di ragione  $-\frac{2}{3}$ ; quindi la serie è convergente e ha per somma  $\frac{3}{2} \frac{1}{1+\frac{2}{3}} = \frac{9}{10}$ .

(b) Si ha

$$(-1)^n \frac{2^{n-2} 3^{n+2}}{3^{2n}} = (-1)^n \frac{2^n 3^n}{9^n} \frac{9}{4} = (-1 \cdot \frac{6}{9})^n \frac{9}{4} = (-\frac{2}{3})^n \frac{9}{4}.$$

Quindi la serie data è una serie geometrica di ragione  $-\frac{2}{3}$ ; quindi la serie è convergente e ha per somma  $\frac{9}{4} \frac{1}{1+\frac{2}{3}} = \frac{27}{20}$ .

(c) Si ha

$$(-1)^n \frac{2^{n-3} 3^{n+3}}{3^{2n}} = (-1)^n \frac{2^n 3^n}{9^n} \frac{27}{8} = (-1 \cdot \frac{6}{9})^n \frac{27}{8} = (-\frac{2}{3})^n \frac{27}{8}.$$

Quindi la serie data è una serie geometrica di ragione  $-\frac{2}{3}$ ; quindi la serie è convergente e ha per somma  $\frac{27}{8} \frac{1}{1+\frac{2}{3}} = \frac{81}{40}$ .

(d) Si ha

$$(-1)^n \frac{2^{n-4} 3^{n+4}}{3^{2n}} = (-1)^n \frac{2^n 3^n}{9^n} \frac{81}{16} = (-1 \cdot \frac{6}{9})^n \frac{81}{16} = (-\frac{2}{3})^n \frac{81}{16}.$$

Quindi la serie data è una serie geometrica di ragione  $-\frac{2}{3}$ ; quindi la serie è convergente e ha per somma  $\frac{81}{16} \frac{1}{1+\frac{2}{3}} = \frac{243}{80}$ .

2. **Esercizio.** Determinare, attraverso le serie, la frazione generatrice del seguente numero periodico

$$.5\overline{31}.$$

**Risoluzione.** Si ha

$$.5\overline{31} = \frac{5}{10} + \frac{31}{1000} + \frac{31}{100000} + \frac{31}{10000000} + \dots = \frac{5}{10} + \frac{31}{1000} \frac{1}{1-\frac{1}{100}} = \frac{526}{990}.$$

3. **Esercizio.** Determinare (se esiste) la serie geometrica di primo termine 1 e avente per somma 3.

**Risoluzione.** Se  $q$  è la ragione della serie geometrica, deve essere  $\frac{1}{1-q} = 3$ , cioè  $1-q = \frac{1}{3}$ , cioè  $q = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$ ; la serie geometrica è quindi  $\sum_{n=0}^{\infty} (\frac{2}{3})^n$ .

4. **Esercizio.** Determinare gli  $x \in \mathbf{R}^*$  per i quali le seguenti serie sono convergenti:

(a)  $\sum_{n=0}^{\infty} (1 - \frac{1}{x})^n;$

(b)  $\sum_{n=0}^{\infty} (\frac{\sqrt{x^2+1}}{x})^n;$

per tali  $x$  determinare la somma della serie.

**Risoluzione.**

- (a) Si tratta di una serie geometrica di ragione  $1 - \frac{1}{x}$ . La serie è convergente se e solo se  $-1 < 1 - \frac{1}{x} < 1$ , cioè se e solo se  $-2 < -\frac{1}{x} < 0$ , cioè se e solo

$$\text{se } \begin{cases} -\frac{1}{x} < 0 \\ \frac{1}{x} - 2 < 0 \end{cases}; \text{ il sistema è equivalente a}$$

$$\begin{cases} x > 0 \\ \frac{1-2x}{x} < 0 \end{cases}, \text{ cioè a } \begin{cases} x > 0 \\ x < 0 \text{ o } x > \frac{1}{2} \end{cases}, \text{ cioè a } x > \frac{1}{2};$$

## 6.2. SERIE GEOMETRICA

45

quindi la serie è convergente per  $x > \frac{1}{2}$ .

Per  $x > \frac{1}{2}$ , la somma della serie è

$$\frac{1}{1 - (1 - \frac{1}{x})} = \frac{1}{x} = x.$$

- (b) La serie è convergente se e solo se  $\left| \frac{\sqrt{x^2+1}}{x} \right| < 1$ , cioè se e solo se  $\sqrt{x^2+1} < |x|$ , cioè se e solo se  $x^2 + 1 < x^2$ , cioè se e solo se  $1 < 0$ . Quindi la serie non è convergente per alcun  $x$ .

5. **Esercizio.** Dire per quali  $x \in \mathbf{R}$  le seguenti serie sono convergenti:

- (a)  $\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2+|x|}\right)^n$ ;  
 (b)  $\sum_{n=0}^{\infty} (2+|x|)^n$ ;  
 (c)  $\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{|x|}{1+|x|}\right)^n$ ;  
 (d)  $\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1-x}{1+|x|}\right)^n$ ;  
 (e)  $\sum_{n=0}^{\infty} (|x-1| - x^2)^n$ ;  
 (f)  $\sum_{n=0}^{\infty} (|x-1| - x)^n$ ;

per tali  $x$  determinare la somma della serie.

**Risoluzione.**

- (a) Sia  $x \in \mathbf{R}$ ; la serie  $\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2+|x|}\right)^n$  è una serie geometrica di ragione  $\frac{1}{2+|x|}$ . La serie è convergente se e solo se  $\left|\frac{1}{2+|x|}\right| < 1$ , cioè se e solo se  $\frac{1}{2+|x|} < 1$ , cioè se e solo se  $2+|x| > 1$ , cioè se e solo se  $|x| > -1$ ; quindi per ogni  $x \in \mathbf{R}$ .

Per  $x \in \mathbf{R}$  si ha

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2+|x|}\right)^n = \frac{1}{1 - \frac{1}{2+|x|}} = \frac{2+|x|}{1+|x|}.$$

- (b) Sia  $x \in \mathbf{R}$ ; la serie  $\sum_{n=0}^{\infty} (2+|x|)^n$  è una serie geometrica di ragione  $2+|x|$ . Si ha  $2+|x| \geq 1$ ; quindi la serie è divergente positivamente. Quindi per ogni  $x \in \mathbf{R}$  la serie assegnata non è convergente.

- (c) Sia  $x \in \mathbf{R}$ ; la serie  $\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{|x|}{1+|x|}\right)^n$  è una serie geometrica di ragione  $\frac{|x|}{1+|x|}$ . La serie è convergente se e solo se  $\left|\frac{|x|}{1+|x|}\right| < 1$ , cioè se e solo se  $\frac{|x|}{1+|x|} < 1$ , cioè se e solo se  $|x| < 1+|x|$ , cioè se e solo se  $0 < 1$ ; quindi per ogni  $x \in \mathbf{R}$ .

Per  $x \in \mathbf{R}$  si ha

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{|x|}{1+|x|}\right)^n = \frac{1}{1 - \frac{|x|}{1+|x|}} = \frac{1+|x|}{1-|x|+|x|} = 1+|x|.$$

- (d) Sia  $x \in \mathbf{R}$ ; la serie  $\sum_{n=0}^{\infty} (\frac{1-x}{1+|x|})^n$  è una serie geometrica di ragione  $\frac{1-x}{1+|x|}$ .  
 Supponiamo  $x > 0$ ; si ha la serie  $\sum_{n=0}^{\infty} (\frac{1-x}{1+x})^n$ ; tale serie è convergente se e solo se  $-1 < \frac{1-x}{1+x} < 1$ , cioè se e solo se  $\begin{cases} -1 < \frac{1-x}{1+x} \\ \frac{1-x}{1+x} < 1 \end{cases}$ , cioè se e solo se  $\begin{cases} -1-x < 1-x \\ 1-x < 1+x \end{cases}$ , cioè se e solo se  $\begin{cases} -1 < 1 \\ -x < x \end{cases}$ , cioè se e solo se  $-1 < 1$ ; poichè  $-1 < 1$  la serie  $\sum_{n=0}^{\infty} (\frac{1-x}{1+x})^n$  è convergente.  
 Supponiamo  $x \leq 0$ ; si ha la serie  $\sum_{n=0}^{\infty} 1$  che è divergente positivamente.  
 Quindi la serie assegnata è convergente se e solo se  $x > 0$ .  
 Sia  $x > 0$ ; si ha

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1-x}{1+x}\right)^n = \frac{1}{1 - \frac{1-x}{1+x}} = \frac{1+x}{x+x} = \frac{1+x}{2x}.$$

- (e) Si tratta di un serie geometrica di ragione  $|x-1|-x^2$ ; la serie è convergente se e solo se  $-1 < |x-1|-x^2 < 1$ , cioè  $\begin{cases} |x-1|-x^2 < 1 \\ |x-1|-x^2 > -1 \end{cases}$ ; tale sistema

è equivalente a  $\begin{cases} |x-1|-x^2 < 1 \\ |x-1|-x^2 > -1 \\ x-1 \geq 0 \end{cases}$  o  $\begin{cases} |x-1|-x^2 < 1 \\ |x-1|-x^2 > -1 \\ x-1 < 0 \end{cases}$ .

Il sistema  $\begin{cases} |x-1|-x^2 < 1 \\ |x-1|-x^2 > -1 \\ x-1 \geq 0 \end{cases}$  è equivalente a  $\begin{cases} x-1-x^2 < 1 \\ x-1-x^2 > -1 \\ x \geq 1 \end{cases}$ , cioè

a  $\begin{cases} x^2-x+2 > 0 \\ x^2-x < 0 \\ x \geq 1 \end{cases}$ .

Il polinomio  $x^2-x+2$  ha discriminante  $\Delta = 1-8 = -7 < 0$ ; per ogni  $x \in \mathbf{R}$  si ha quindi  $x^2-x+2 > 0$ ; quindi il sistema  $\begin{cases} x^2-x+2 > 0 \\ x^2-x < 0 \\ x \geq 1 \end{cases}$  è equi-

valente a  $\begin{cases} x^2-x < 0 \\ x \geq 1 \end{cases}$ , cioè a  $\begin{cases} 0 < x < 1 \\ x \geq 1 \end{cases}$ ; tale sistema non ammette alcuna soluzione.

Il sistema  $\begin{cases} |x-1|-x^2 < 1 \\ |x-1|-x^2 > -1 \\ x-1 < 0 \end{cases}$  è equivalente a  $\begin{cases} 1-x-x^2 < 1 \\ 1-x-x^2 > -1 \\ x < 1 \end{cases}$ , cioè

a  $\begin{cases} x^2+x > 0 \\ x^2+x-2 < 0 \\ x < 1 \end{cases}$ , cioè a  $\begin{cases} x < -1 \text{ o } x > 0 \\ -2 < x < 1 \\ x < 1 \end{cases}$ , cioè a  $-2 < x < -1$  o  $0 < x < 1$ .

La serie è quindi convergente se e solo se  $-2 < x < -1$  o  $0 < x < 1$ ; per tali  $x$  si ha

$$\sum_{n=0}^{\infty} (|x-1|-x^2)^n = \frac{1}{1-|x-1|-x^2} = \frac{1}{1+x-1-x^2} = \frac{1}{x^2+x}.$$

## 6.2. SERIE GEOMETRICA

47

(f) Si tratta di una serie geometrica di ragione  $|x-1|-x$ . La serie è convergente se e solo se  $-1 < |x-1|-x < 1$ , cioè se e solo se  $\begin{cases} |x-1|-x < 1 \\ |x-1|-x > -1 \end{cases}$ .

Il sistema  $\begin{cases} |x-1|-x < 1 \\ |x-1|-x > -1 \end{cases}$  è equivalente a  $\begin{cases} |x-1|-x < 1 \\ |x-1|-x > -1 \\ x-1 \geq 0 \end{cases}$  o  $\begin{cases} |x-1|-x < 1 \\ |x-1|-x > -1 \\ x-1 < 0 \end{cases}$ .

Il sistema  $\begin{cases} |x-1|-x < 1 \\ |x-1|-x > -1 \\ x-1 \geq 0 \end{cases}$  è equivalente a  $\begin{cases} x-1-x < 1 \\ x-1-x > -1 \\ x \geq 1 \end{cases}$ , cioè

$$\text{a } \begin{cases} -1 < 1 \\ -1 > -1 \\ x \geq 1 \end{cases};$$

poichè  $-1 > -1$  è falsa il sistema non è mai verificato.

Il sistema  $\begin{cases} |x-1|-x < 1 \\ |x-1|-x > -1 \\ x-1 < 0 \end{cases}$  è equivalente a  $\begin{cases} -x+1-x < 1 \\ -x+1-x > -1 \\ x < 1 \end{cases}$ , cioè

$$\text{a } \begin{cases} -2x < 0 \\ -2x > -2 \\ x < 1 \end{cases}, \text{ cioè a } \begin{cases} x > 0 \\ x < 1 \\ x < 1 \end{cases}, \text{ cioè a } 0 < x < 1.$$

Quindi la serie è convergente se e solo se  $0 < x < 1$ ; per tali  $x$  la somma della serie è

$$\frac{1}{1-|x-1|+x} = \frac{1}{1+x-1+x} = \frac{1}{2x}.$$

6. **Esercizio.** Determinare gli  $x$  del dominio naturale per i quali le seguenti serie sono convergenti:

- (a)  $\sum_{n=0}^{\infty} (\sqrt{x-1}-x)^n$ ,  
 (b)  $\sum_{n=0}^{\infty} (\sqrt{2x^2-1}-x)^n$ ,  
 (c)  $\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{|x-1|}-1\right)^n$ ;

per tali  $x$  determinare la somma della serie.

**Risoluzione.**

- (a) La serie è assegnata per  $x-1 \geq 0$ . Si tratta di una serie geometrica di ragione  $\sqrt{x-1}-x$ . La serie è convergente se e solo se  $-1 < \sqrt{x-1}-x < 1$ , cioè se e solo se  $\begin{cases} \sqrt{x-1}-x < 1 \\ \sqrt{x-1}-x > -1 \\ x \geq 1 \end{cases}$ , cioè, se e solo se  $\begin{cases} \sqrt{x-1} < x+1 \\ \sqrt{x-1} > x-1 \\ x \geq 1 \end{cases}$ ,  
 cioè, essendo anche  $x+1 \geq 0$ , se e solo se  $\begin{cases} x-1 < (x+1)^2 \\ x-1 > (x-1)^2 \\ x \geq 1 \end{cases}$

$$\text{solo se } \begin{cases} x-1 < x^2+2x+1 \\ x-1 > x^2-2x+1 \\ x \geq 1 \end{cases}, \text{ cioè se e solo se } \begin{cases} x^2+x+2 > 0 \\ x^2-3x+1 < 0 \\ x \geq 1 \end{cases}, \text{ cioè}$$

$$\text{se e solo se } \begin{cases} x^2-3x+1 < 0 \\ x \geq 1 \end{cases}, \text{ cioè se e solo se } \begin{cases} 1 < x < 2 \\ x \geq 1 \end{cases}, \text{ cioè se e}$$

$$\text{solo se } 1 < x < 2.$$

Quindi la serie è convergente se e solo se  $1 < x < 2$ ; per tali  $x$  la somma della serie è

$$\frac{1}{1-\sqrt{x-1}+x}.$$

- (b) 1° modo Il dominio naturale della funzione definita da  $\sqrt{2x^2-1}-x$  è dato dalle  $x$  soddisfacenti  $2x^2-1 \geq 0$ .

La serie assegnata è una serie geometrica di ragione  $\sqrt{2x^2-1}-x$ ; la serie è quindi convergente se e solo se  $-1 < \sqrt{2x^2-1}-x < 1$ .

Si ottiene quindi il sistema

$$\begin{cases} 2x^2-1 \geq 0 \\ -1 < \sqrt{2x^2-1}-x \\ \sqrt{2x^2-1}-x < 1 \end{cases}.$$

$$\text{Risolviamo } \begin{cases} \sqrt{2x^2-1} > x-1 \\ 2x^2-1 \geq 0 \end{cases}.$$

Il sistema è equivalente a

$$\begin{cases} \sqrt{2x^2-1} > x-1 \\ 2x^2-1 \geq 0 \\ x-1 \geq 0 \end{cases} \quad \text{o} \quad \begin{cases} \sqrt{2x^2-1} > x-1 \\ 2x^2-1 \geq 0 \\ x-1 < 0 \end{cases}.$$

$$\text{Il sistema } \begin{cases} \sqrt{2x^2-1} > x-1 \\ 2x^2-1 \geq 0 \\ x-1 \geq 0 \end{cases} \quad \text{è equivalente a}$$

$$\begin{cases} 2x^2-1 > (x-1)^2 \\ 2x^2-1 \geq 0 \\ x-1 \geq 0 \end{cases}, \text{ cioè a } \begin{cases} 2x^2-1 > (x-1)^2 \\ x-1 \geq 0 \end{cases}, \text{ cioè a}$$

$$\begin{cases} 2x^2-1 > x^2+2x+1 \\ x \geq 1 \end{cases}, \text{ cioè } \begin{cases} x^2+2x-2 > 0 \\ x \geq 1 \end{cases}, \text{ cioè a}$$

$$\begin{cases} x < -1-\sqrt{3} \text{ o } x > -1+\sqrt{3} \\ x \geq 1 \end{cases}, \text{ cioè a } x \geq 1.$$

$$\text{Il sistema } \begin{cases} \sqrt{2x^2-1} > x-1 \\ 2x^2-1 \geq 0 \\ x-1 < 0 \end{cases} \quad \text{è equivalente a } \begin{cases} 2x^2-1 \geq 0 \\ x-1 < 0 \end{cases} \quad \text{cioè a}$$

$$\begin{cases} x \leq -\frac{\sqrt{2}}{2} \text{ o } x \geq \frac{\sqrt{2}}{2} \\ x < 1 \end{cases}, \text{ cioè a } x \leq -\frac{\sqrt{2}}{2} \text{ o } \frac{\sqrt{2}}{2} \leq x < 1.$$

## 6.2. SERIE GEOMETRICA

49

La disequazione  $\begin{cases} \sqrt{2x^2-1} > x-1 \\ 2x^2-1 \geq 0 \end{cases}$  è quindi equivalente a  $x \leq -\frac{\sqrt{2}}{2}$  o  $x \geq \frac{\sqrt{2}}{2}$ .

Risolviamo  $\begin{cases} \sqrt{2x^2-1} < 1+x \\ 2x^2-1 \geq 0 \end{cases}$ .

Il sistema è equivalente a

$$\begin{cases} \sqrt{2x^2-1} < 1+x \\ 2x^2-1 \geq 0 \\ 1+x \geq 0 \end{cases} \quad \text{o} \quad \begin{cases} \sqrt{2x^2-1} < 1+x \\ 2x^2-1 \geq 0 \\ 1+x < 0 \end{cases}.$$

Il sistema  $\begin{cases} \sqrt{2x^2-1} < 1+x \\ 2x^2-1 \geq 0 \\ 1+x \geq 0 \end{cases}$  è equivalente a

$$\begin{cases} 2x^2-1 < 1+2x+x^2 \\ x \leq -\frac{\sqrt{2}}{2} \text{ o } x \geq \frac{\sqrt{2}}{2} \\ x \geq -1 \end{cases}, \text{ cioè a } \begin{cases} x^2-2x-2 < 0 \\ x \leq -\frac{\sqrt{2}}{2} \text{ o } x \geq \frac{\sqrt{2}}{2} \\ x \geq -1 \end{cases}, \text{ cioè a } \begin{cases} 1-\sqrt{3} < x < 1+\sqrt{3} \\ x \leq -\frac{\sqrt{2}}{2} \text{ o } x \geq \frac{\sqrt{2}}{2} \\ x \geq -1 \end{cases}, \text{ cioè a } 1-\sqrt{3} < x \leq -\frac{\sqrt{2}}{0} \frac{\sqrt{2}}{2} < x < 1+\sqrt{3}.$$

Il sistema  $\begin{cases} \sqrt{2x^2-1} < 1+x \\ 2x^2-1 \geq 0 \\ 1+x < 0 \end{cases}$  non ammette soluzioni.

La disequazione  $\begin{cases} \sqrt{2x^2-1} < 1+x \\ 2x^2-1 \geq 0 \end{cases}$  è quindi equivalente a  $1-\sqrt{3} < x \leq -\frac{\sqrt{2}}{2}$  o  $\frac{\sqrt{2}}{2} < x < 1+\sqrt{3}$ .

Il sistema  $\begin{cases} 2x^2-1 \geq 0 \\ -1 < \sqrt{2x^2-1}-x \\ \sqrt{2x^2-1}-x < 1 \end{cases}$  è quindi equivalente a

$$\begin{cases} x \leq -\frac{\sqrt{2}}{2} \text{ o } x \geq \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 1-\sqrt{3} < x \leq -\frac{\sqrt{2}}{0} \frac{\sqrt{2}}{2} < x < 1+\sqrt{3} \end{cases},$$

cioè a  $1-\sqrt{3} < x \leq -\frac{\sqrt{2}}{0} \frac{\sqrt{2}}{2} < x < 1+\sqrt{3}$ .

Quindi la serie è convergente per

$$x \in ]1-\sqrt{3}, -\frac{1}{\sqrt{2}}] \cup [\frac{1}{\sqrt{2}}, 1+\sqrt{3}[;$$

per tali  $x$  si ha

$$\sum_{n=0}^{\infty} (\sqrt{2x^2-1}-x)^n = \frac{1}{1-\sqrt{2x^2-1}+x}.$$

2° modo Il dominio naturale della funzione definita da  $\sqrt{2x^2 - 1} - x$  è dato dalle  $x$  soddisfacenti  $2x^2 - 1 \geq 0$ .

La serie assegnata è una serie geometrica di ragione  $\sqrt{2x^2 - 1} - x$ ; la serie è quindi convergente se e solo se  $-1 < \sqrt{2x^2 - 1} - x < 1$ .

Si ottiene quindi il sistema

$$\begin{cases} 2x^2 - 1 \geq 0 \\ -1 < \sqrt{2x^2 - 1} - x \\ \sqrt{2x^2 - 1} - x < 1 \end{cases} .$$

Il sistema è equivalente a

$$\begin{cases} 2x^2 - 1 \geq 0 \\ \sqrt{2x^2 - 1} > x - 1 \\ \sqrt{2x^2 - 1} < 1 + x \end{cases} ,$$

cioè a

$$\begin{cases} 2x^2 - 1 \geq 0 \\ \sqrt{2x^2 - 1} > x - 1 \\ \sqrt{2x^2 - 1} < 1 + x \\ x < -1 \end{cases} \quad \text{o} \quad \begin{cases} 2x^2 - 1 \geq 0 \\ \sqrt{2x^2 - 1} > x - 1 \\ \sqrt{2x^2 - 1} < 1 + x \\ -1 \leq x \leq 1 \end{cases} \quad \text{o}$$

$$\begin{cases} 2x^2 - 1 \geq 0 \\ \sqrt{2x^2 - 1} > x - 1 \\ \sqrt{2x^2 - 1} < 1 + x \\ x > 1 \end{cases} .$$

Risolviamo il sistema

$$\begin{cases} 2x^2 - 1 \geq 0 \\ \sqrt{2x^2 - 1} > x - 1 \\ \sqrt{2x^2 - 1} < 1 + x \\ x < -1 \end{cases} ;$$

si ha  $1 + x < 0$ ; quindi l'equazione  $\sqrt{2x^2 - 1} < 1 + x$  non è mai soddisfatta; quindi il sistema non ha soluzioni.

Risolviamo il sistema

$$\begin{cases} 2x^2 - 1 \geq 0 \\ \sqrt{2x^2 - 1} - x > x - 1 \\ \sqrt{2x^2 - 1} < 1 + x \\ -1 \leq x \leq 1 \end{cases} ;$$

il sistema è equivalente a

$$\begin{cases} 2x^2 - 1 \geq 0 \\ 2x^2 - 1 < (1 + x)^2 \\ -1 \leq x \leq 1 \end{cases} ,$$

## 6.2. SERIE GEOMETRICA

51

cioè a

$$\begin{cases} x \leq -\frac{1}{\sqrt{2}} \text{ o } x \geq \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 2x^2 - 1 < 1 + 2x + x^2 \\ -1 \leq x \leq 1 \end{cases},$$

cioè a

$$\begin{cases} -1 \leq x \leq -\frac{1}{\sqrt{2}} \text{ o } \frac{1}{\sqrt{2}} \leq x \leq 1 \\ x^2 - 2x - 2 < 0 \end{cases},$$

cioè a

$$\begin{cases} -1 \leq x \leq -\frac{1}{\sqrt{2}} \text{ o } \frac{1}{\sqrt{2}} \leq x \leq 1 \\ 1 - \sqrt{3} < x < 1 + \sqrt{3} \end{cases},$$

cioè a

$$1 - \sqrt{3} < x \leq -\frac{1}{\sqrt{2}} \text{ o } \frac{1}{\sqrt{2}} \leq x \leq 1.$$

Risolviamo il sistema

$$\begin{cases} 2x^2 - 1 \geq 0 \\ \sqrt{2x^2 - 1} > x - 1 \\ \sqrt{2x^2 - 1} < 1 + x \\ x > 1 \end{cases};$$

il sistema è equivalente a

$$\begin{cases} x > 1 \\ 2x^2 - 1 > (x - 1)^2 \\ 2x^2 - 1 < (1 + x)^2 \end{cases},$$

cioè a

$$\begin{cases} x > 1 \\ 2x^2 - 1 > x^2 - 2x + 1 \\ 2x^2 - 1 < 1 + 2x + x^2 \end{cases},$$

cioè a

$$\begin{cases} x > 1 \\ x < -1 - \sqrt{3} \text{ o } x > -1 + \sqrt{3} \\ 1 - \sqrt{3} < x < 1 + \sqrt{3} \end{cases},$$

cioè a

$$1 < x < 1 + \sqrt{3}.$$

Quindi il sistema da cui siamo partiti è equivalente a

$$1 - \sqrt{3} < x \leq -\frac{1}{\sqrt{2}} \text{ o } \frac{1}{\sqrt{2}} \leq x < 1 + \sqrt{3}.$$

Quindi la serie è convergente per

$$x \in ]1 - \sqrt{3}, -\frac{1}{\sqrt{2}}] \cup [\frac{1}{\sqrt{2}}, 1 + \sqrt{3}[;$$

per tali  $x$  si ha

$$\sum_{n=0}^{\infty} (\sqrt{2x^2 - 1} - x)^n = \frac{1}{1 - \sqrt{2x^2 - 1} + x}.$$

- (c) La serie è assegnata per  $x - 1 \neq 0$ , cioè per  $x \neq 1$ . Si tratta di una serie geometrica di ragione  $\frac{1}{|x-1|} - 1$ . La serie è convergente se e solo se  $-1 < \frac{1}{|x-1|} - 1 < 1$ , cioè se e solo se  $0 < \frac{1}{|x-1|} < 2$ , cioè se e solo se  $\frac{1}{|x-1|} < 2$ , cioè se e solo se  $|x - 1| > \frac{1}{2}$ , cioè se e solo se  $x - 1 < -\frac{1}{2}$  o  $x - 1 > \frac{1}{2}$ , cioè se e solo se  $x < \frac{1}{2}$  o  $x > \frac{3}{2}$ .

Per tali  $x$  la somma della serie è

$$\frac{1}{1 - \frac{1}{|x-1|} + 1} = \frac{1}{2 - \frac{1}{|x-1|}} = \frac{|x-1|}{2|x-1| - 1}.$$

### 6.3 Serie a termini positivi

1. **Esercizio.** Studiare la convergenza delle seguenti serie:

- (a)  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{5n^2 + n + 1}{n^3 + 1}$ ;  
 (b)  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^2 + 7n + 3}{n^5 + n + 2}$ ;  
 (c)  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^2 + 5n + 2}{n^3 + 3n + 1}$ ;  
 (d)  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^2 + 3}{2n^2 + 1}$ ;  
 (e)  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sqrt{n^4 + n^3 - 2n}}{n^5 + 1}$ ;  
 (f)  $\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{\frac{n^2 + 1}{n^3 + 2n + 3}}$ ;  
 (g)  $\sum_{n=0}^{\infty} n^2$ ;  
 (h)  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n + \sqrt{n} - n^3}{\sqrt{n^5 + 1}}$ ;

giustificare la risposta.

**Risoluzione.**

- (a) Si ha  $\frac{5n^2 + n + 1}{n^3 + 1} \sim_{n \rightarrow \infty} \frac{5}{n}$ ; quindi la serie data è divergente positivamente.

- (b) Si ha

$$\frac{n^2 + 7n + 3}{n^5 + n + 2} \sim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2}{n^5} = \frac{1}{n^3};$$

quindi la serie è convergente.

- (c) Si ha

$$\frac{n^2 + 5n + 2}{n^3 + 3n + 1} \sim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2}{n^3} = \frac{1}{n};$$

quindi la serie è divergente positivamente.

## 6.3. SERIE A TERMINI POSITIVI

53

- (d) Si ha  $\frac{n^2+3}{2n^2+1} \sim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2}$ ; quindi la serie è divergente positivamente.
- (e) Si ha  $\frac{\sqrt{n^4+n^3-2n}}{n^5+1} \sim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2}{n^5} = \frac{1}{n^3}$ ; quindi la serie è convergente.
- (f) Si ha  

$$\sqrt{\frac{n^2+1}{n^3+2n+3}} \sim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{\frac{n^2}{n^3}} = \frac{1}{\sqrt{n}} \not\sim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n}.$$
 Quindi la serie assegnata è divergente positivamente.
- (g) Si ha  $\lim_{n \rightarrow \infty} n^2 = +\infty$ ; quindi la serie è divergente positivamente.
- (h) Si ha  $\frac{n+\sqrt{n}-n^3}{\sqrt{n^5+1}} \sim_{n \rightarrow \infty} \frac{-n^3}{\sqrt{n^5}} = -\frac{n^3}{n^2\sqrt{n}} = -\frac{n}{\sqrt{n}}$ ; si ha  $\lim_{n \rightarrow \infty} -\frac{n}{\sqrt{n}} = -\infty$ ; quindi la serie è divergente negativamente.

2. **Esercizio.** Studiare la convergenza delle seguenti serie:

- (a)  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^2+2^n}{n^3+3^n}$ ;
- (b)  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{4n+5^n}{4n+4^n}$ ;
- (c)  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^2 2^n + n^3}{3^n + n^4}$ ;
- (d)  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n + 7n + 1}{n! + 3^n + 1}$ ;
- (e)  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n + 3^n}{n! + n}$ ;
- (f)  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^2 - n!}{n^3 + 2n!}$ ;
- (g)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^5 + n + 2}{n! - n + 3}$ ;

giustificare la risposta.

**Risoluzione.**

- (a) Si ha  

$$\frac{n^2+2^n}{n^3+3^n} \sim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^n}{3^n} = \left(\frac{2}{3}\right)^n.$$
 Quindi la serie assegnata è convergente.
- (b) Si ha  $\frac{4n+5^n}{4n+4^n} \sim_{n \rightarrow \infty} \frac{5^n}{4^n} = \left(\frac{5}{4}\right)^n$ ; quindi la serie è divergente positivamente.
- (c) Si ha  $\frac{n^2 2^n + n^3}{3^n + n^4} \sim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2 2^n}{3^n} = n^2 \left(\frac{2}{3}\right)^n$ ; quindi la serie è convergente.
- (d) Si ha  $\frac{2^n + 7n + 1}{n! + 3^n + 1} \sim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^n}{n!}$ ; quindi la serie data è convergente.
- (e) Si ha  

$$\frac{2^n + 3^n}{n! + n} \sim_{n \rightarrow \infty} \frac{3^n}{n!};$$
 quindi la serie è convergente.
- (f) Si ha  $\frac{n^2 - n!}{n^3 + 2n!} \sim_{n \rightarrow \infty} \frac{-n!}{2n!} = -\frac{1}{2}$ .  
 Quindi la serie è divergente negativamente.
- (g) Si ha  

$$\frac{n^5 + n + 2}{n! - n + 3} \sim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^5}{n!};$$
 quindi la serie è convergente.

3. **Esercizio.** Studiare la convergenza delle seguenti serie:

- (a)  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n!}{3n^2}$ ;  
 (b)  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2n^2+n}{2n^3+n^2}$ ;  
 (c)  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n!+2}{(2n)!+3}$ ;  
 (d)  $\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{n+3}{2n+1}\right)^n$ ;  
 (e)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^n}$ ;

giustificare la risposta.

**Risoluzione.**

(a) Si ha:  

$$\frac{\frac{(n+1)!}{3(n+1)^2}}{\frac{n!}{3n^2}} = \frac{n!(n+1)}{3n^2+2n+1} \frac{3n^2}{n!} = \frac{n+1}{3n^2+1} = \frac{n+1}{3 \cdot 9^n} \sim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{3} \frac{n}{9^n} \rightarrow_{n \rightarrow \infty} 0.$$

Quindi la serie data è convergente per il criterio del rapporto.

(b) Si ha  $\frac{2n^2+n}{2n^3+n^2} \sim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n^2}{2n^3}$ . Si ha:  

$$\frac{\frac{2(n+1)^2}{3(n+1)^3}}{\frac{2n^2}{2n^3}} = \frac{2n^2+2n+1}{2n^3+3n^2+3n+1} \frac{2n^3}{2n^2} = 2^{-3n^2-n} \rightarrow_{n \rightarrow \infty} 0.$$

Quindi la serie data è convergente per il criterio del rapporto.

(c) Si ha  $\frac{n!+2}{(2n)!+3} \sim_{n \rightarrow \infty} \frac{n!}{(2n)!}$ ; Si ha:  

$$\frac{\frac{(n+1)!}{(2(n+1))!}}{\frac{n!}{(2n)!}} = \frac{(n+1)!}{(2(n+1))!} \frac{(2n)!}{n!} = \frac{n+1}{(2n+1)(2n+2)} \sim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{4n} \rightarrow_{n \rightarrow \infty} 0.$$

Quindi, per il criterio del rapporto, serie data è convergente.

(d) Si ha  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\left(\frac{n+3}{2n+1}\right)^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+3}{2n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{2n} = 0.$

Quindi, per il criterio della radice, la serie è convergente.

(e) Si ha  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{1}{n^n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0.$

Quindi, per il criterio della radice, la serie è convergente.

## 6.4 Limiti di successioni

1. **Esercizio.** Calcolare i seguenti limiti di successioni

- (a)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^{n+1}+3^n}{n+3^n}$ ;  
 (b)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^3 5^n - n!}{n^5 7^n + 2n!}$ ;  
 (c)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^n + 3^n - n}{7^n - n!}$ ;  
 (d)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5^n + n!}{n^2 + 9^n}$ ;  
 (e)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+2^n+n!}{n^2+3^n+2n!}$ .

**Risoluzione.**

## 6.4. LIMITI DI SUCCESIONI

55

(a) Si ha  $\frac{2^{n+1}+3^n}{n+3^n} \sim_{n \rightarrow \infty} \frac{3^n}{3^n} = 1$ . Quindi si ha  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^{n+1}+3^n}{n+3^n} = 1$ .

(b) Si ha  $\frac{n^3 5^n - n!}{n^5 7^n + 2n!} \sim_{n \rightarrow \infty} \frac{-n!}{2n!} = -\frac{1}{2}$ . Quindi si ha  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^3 5^n - n!}{n^5 7^n + 2n!} = -\frac{1}{2}$ .

(c) Si ha  $\frac{2^n + 3^n - n}{7^n - n!} \sim_{n \rightarrow \infty} \frac{3^n}{n!}$ ; quindi si ha

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^n + 3^n - n}{7^n - n!} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3^n}{n!} = 0.$$

(d) Si ha  $\frac{5^n + n!}{n^2 + 9^n} \sim_{n \rightarrow \infty} \frac{n!}{9^n}$ ; quindi si ha

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5^n + n!}{n^2 + 9^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n!}{9^n} = +\infty.$$

(e) Si ha  $\frac{n+2^n+n!}{n^2+3^n+2n!} \sim_{n \rightarrow \infty} \frac{n!}{2n!} = \frac{1}{2}$ ; quindi si ha

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+2^n+n!}{n^2+3^n+2n!} = \frac{1}{2}.$$

www.unidocs.it

www.unidocs.it

www.unidocs.it



www.unidocs.it

www.unidocs.it



www.unidocs.it

www.unidocs.it



www.unidocs.it

www.unidocs.it

## Capitolo 7

# Serie di potenze

### 7.1 Serie di potenze

1. **Esercizio.** Studiare le seguenti serie di potenze:

(a)  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1+2n}{2^n} z^n;$

(b)  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^2+3^n}{n^4+5^n} z^n;$

(c)  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n+2^n}{n^2+3^n} z^n;$

(d)  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n+2^n}{n!+3^n} z^n;$

(e)  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n!+2^n}{n^2+3^n} z^n;$

(f)  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n+5}{2^n+n} z^n;$

(g)  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^n+n^2+1}{n^2+n+1} z^n;$

(h)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n3^n+n^3}{n^2+1} z^n.$

**Risoluzione.**

(a) Per ogni  $z \in \mathbf{C}$  si ha

$$\left| \frac{1+2n}{2^n} z^n \right| \sim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n}{2^n} |z|^n = 2n \left( \frac{|z|}{2} \right)^n.$$

Quindi la serie di potenze è assolutamente convergente in  $z$  se e solo se  $\frac{|z|}{2} < 1$ , cioè se e solo se  $|z| < 2$ . Quindi il raggio di convergenza della serie di potenze è 2.

Per  $z \in \mathbf{C}$ ,  $|z| = 2$  si ha

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{1+2n}{2^n} z^n \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} 2n \left( \frac{|z|}{2} \right)^n = \lim_{n \rightarrow \infty} 2n = +\infty.$$

Quindi la serie non è convergente in  $z$ .

(b) Per ogni  $z \in \mathbf{C}$  si ha

$$\left| \frac{n^2+3^n}{n^4+5^n} z^n \right| \sim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{3}{5} |z| \right)^n;$$

quindi la serie è assolutamente convergente se e solo se  $\frac{3}{5}|z| < 1$ , cioè se e solo se  $|z| < \frac{5}{3}$ . Quindi il raggio di convergenza è  $\frac{5}{3}$ .

Per  $z \in \mathbf{C}$ ,  $|z| = \frac{5}{3}$  si ha

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{n^2+3^n}{n^4+5^n} z^n \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{3}{5} |z| \right)^n = \lim_{n \rightarrow \infty} 1 = 1.$$

Quindi la serie non è convergente in  $z$ .

(c) Per ogni  $z \in \mathbf{C}$  si ha

$$\left| \frac{n+2^n}{n^2+3^n} z^n \right| \sim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^n}{3^n} |z|^n = \left( \frac{2}{3} |z| \right)^n$$

Quindi la serie  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n+2^n}{n^2+3^n} z^n$  è assolutamente convergente se e solo se  $\frac{2}{3}|z| < 1$ , cioè se e solo se  $|z| < \frac{3}{2}$ . Quindi il raggio di convergenza della serie di potenze è  $\frac{3}{2}$ .

Per  $z \in \mathbf{C}$ ,  $|z| = \frac{3}{2}$  si ha

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{n+2^n}{n^2+3^n} z^n \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{2}{3} |z| \right)^n = \lim_{n \rightarrow \infty} 1 = 1.$$

Quindi la serie non è convergente in  $z$ .

(d) Per ogni  $z \in \mathbf{C}$  si ha

$$\left| \frac{n+2^n}{n!+3^n} z^n \right| \sim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^n}{n!} |z|^n = \frac{(2|z|)^n}{n!}$$

Quindi la serie  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n+2^n}{n!+3^n} z^n$  è assolutamente convergente per ogni  $z \in \mathbf{C}$ . Quindi il raggio di convergenza della serie di potenze è

$$r = +\infty.$$

(e) Per ogni  $z \in \mathbf{C}$  si ha

$$\left| \frac{n!+2^n}{n^2+3^n} z^n \right| \sim_{n \rightarrow \infty} \frac{n!}{3^n} |z|^n = n! \left( \frac{|z|}{3} \right)^n$$

Per  $z \neq 0$  si ha  $\lim_{n \rightarrow \infty} n! \left( \frac{|z|}{3} \right)^n = +\infty$

Quindi la serie  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n!+2^n}{n^2+3^n} z^n$  è assolutamente convergente se e solo se  $z = 0$ . Quindi il raggio di convergenza della serie di potenze è

$$r = 0.$$

(f) Per ogni  $z \in \mathbf{C}$  si ha  $\left| \frac{n+5}{2^n+n} z^n \right| \sim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{2^n} |z|^n = n \left( \frac{|z|}{2} \right)^n$ ;

la serie di potenze è quindi assolutamente convergente in  $z$  se e solo se  $\frac{|z|}{2} < 1$ , cioè se e solo se  $|z| < 2$ ; quindi il raggio di convergenza della serie di potenze è 2.

Per  $z \in \mathbf{C}$ ,  $|z| = 2$  si ha

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{n+5}{2^n+n} z^n \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} n \left( \frac{|z|}{2} \right)^n \lim_{n \rightarrow \infty} n = +\infty.$$

Quindi la serie non è convergente in  $z$ .

(g) Per ogni  $z \in \mathbf{C}$  si ha  $\left| \frac{3^n+n^2+1}{n^2+n+1} z^n \right| \sim_{n \rightarrow \infty} \frac{3^n}{n^2} |z|^n = \frac{1}{n^2} (3|z|)^n$ ;

la serie di potenze è quindi assolutamente convergente in  $z$  se e solo se  $3|z| \leq 1$ , cioè se e solo se  $|z| \leq \frac{1}{3}$ ; quindi il raggio di convergenza della serie di potenze è  $\frac{1}{3}$ .

Supponiamo  $z \in \mathbf{C}$  e  $|z| = \frac{1}{3}$ ; abbiamo visto che per  $|z| = \frac{1}{3}$  la serie è assolutamente convergente; quindi la serie è convergente in  $z$ .

## 7.1. SERIE DI POTENZE

59

(h) Per ogni  $z \in \mathbf{C}$  si ha  $\left| \frac{n3^n + n^3}{n^2 + 1} z^n \right| \sim_{n \rightarrow \infty} \frac{n3^n}{n^2} |z|^n = \frac{1}{n} |3z|^n$ ; la serie di potenze è quindi assolutamente convergente in  $z$  se e solo se  $|3z| < 1$ , cioè se e solo se  $|z| < \frac{1}{3}$ ; quindi il raggio di convergenza della serie di potenze è  $\frac{1}{3}$ . Supponiamo  $z \in \mathbf{C}$  e  $|z| = \frac{1}{3}$ .

Si ha  $\frac{n3^n + n^3}{n^2 + 1} z^n = \left( \frac{n3^n + n^3}{n^2 + 1} z^n - \frac{3^n}{n} z^n \right) + \frac{3^n}{n} z^n = \frac{n^4 - 3^n}{n(n^2 + 1)} z^n + \frac{1}{n} (3z)^n$ .

Si ha  $\left| \frac{n^4 - 3^n}{n(n^2 + 1)} z^n \right| \sim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^3} (3|z|)^n = \frac{1}{n^3}$ ; quindi la serie  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^4 - 3^n}{n(n^2 + 1)} z^n$  è assolutamente convergente.

La serie  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} (3z)^n$  è convergente per  $3z \neq 1$ , non convergente per  $3z = 1$ , cioè è convergente per  $z \neq \frac{1}{3}$ , non convergente per  $z = \frac{1}{3}$ .

Quindi la serie  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n3^n + n^3}{n^2 + 1} z^n$  è convergente per  $z \neq \frac{1}{3}$ , non convergente per  $z = \frac{1}{3}$ .

2. **Esercizio.** Determinare l'insieme degli  $x$  reali per i quali la seguente serie è definita ed è convergente

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^2 + 3}{n^3 + 1} \left( \frac{x+2}{x} \right)^n.$$

**Risoluzione.** La serie è definita per  $x \neq 0$ .

Supponiamo  $x \in \mathbf{R}$ ,  $x \neq 0$ .

Poniamo  $t = \frac{x+2}{x}$ .

Consideriamo la serie di potenze reale  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^2 + 3}{n^3 + 1} t^n$ .

Per ogni  $t \in \mathbf{R}$  si ha

$\left| \frac{n^2 + 3}{n^3 + 1} t^n \right| \sim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} |t|^n$ ; la serie di potenze è quindi assolutamente convergente in  $t$  se e solo se  $|t| < 1$ ; quindi il raggio di convergenza della serie di potenze è 1.

Supponiamo  $t \in \mathbf{R}$  e  $|t| = 1$ , cioè  $t = 1$  o  $t = -1$ .

Per  $t = 1$  si ha la serie  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^2 + 3}{n^3 + 1}$ ; si ha  $\frac{n^2 + 3}{n^3 + 1} \sim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n}$ ; quindi la serie di potenze non è convergente in 1.

Per  $t = -1$  si ha

Si ha  $\frac{n^2 + 3}{n^3 + 1} (-1)^n = \left( \frac{n^2 + 3}{n^3 + 1} (-1)^n - \frac{1}{n} (-1)^n \right) + \frac{1}{n} (-1)^n = \frac{3n-1}{n(n^3+1)} (-1)^n + \frac{1}{n} (-1)^n$ .

Si ha  $\left| \frac{3n-1}{n(n^3+1)} (-1)^n \right| \sim_{n \rightarrow \infty} \frac{3}{n^3}$ ; quindi la serie  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{3n-1}{n(n^3+1)} (-1)^n$  è assolutamente convergente.

La serie  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} (-1)^n$  è convergente per il criterio di Leibniz.

Quindi la serie  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^2 + 3}{n^3 + 1} (-1)^n$  è convergente.

La serie di potenze  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^2 + 3}{n^3 + 1} t^n$  è quindi convergente se e solo se  $-1 \leq t < 1$ .

La serie assegnata è quindi convergente se  $x \in \mathbf{R}^*$  è tale che  $-1 \leq \frac{x+2}{x} < 1$ .

$$\begin{cases} \frac{x+2}{x} \geq -1 \\ \frac{x+2}{x} < 1 \end{cases}, \text{ cioè} \\ \begin{cases} \frac{x+2}{x} + 1 \geq 0 \\ \frac{x+2}{x} - 1 < 0 \end{cases}, \text{ cioè} \\ \begin{cases} \frac{x+1}{x} \geq 0 \\ \frac{1}{x} < 0 \end{cases}, \text{ cioè} \\ \begin{cases} x \leq -1 \text{ o } x > 0 \\ x < 0 \end{cases}, \text{ cioè} \\ x \leq -1.$$

La serie assegnata è quindi assegnata e convergente se e solo se  $x \leq -1$ .

3. **Esercizio.** Dimostrare che la serie di potenze

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{(2n+1)!} z^{2n+1}$$

(la somma della quale è  $\sin z$ ) ha raggio di convergenza  $+\infty$ .

**Risoluzione.** Sia  $z \in \mathbf{C}$ ,  $z \neq 0$ ; studiamo l'assoluta convergenza della serie di potenze in  $z$ , cioè la convergenza della serie  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{|z|^{2n+1}}{(2n+1)!}$ .

Applichiamo il criterio del rapporto; si ha

$$\frac{\frac{|z|^{2(n+1)+1}}{(2(n+1)+1)!}}{\frac{|z|^{2n+1}}{(2n+1)!}} = \frac{|z|^{2n+3} (2n+1)!}{(2n+3)! |z|^{2n+1}} = |z|^2 \frac{1}{(2n+1)(2n+2)(2n+3)} (2n+1)! = \\ \frac{|z|^2}{(2n+2)(2n+3)} \sim \frac{|z|^2}{4n^2} \rightarrow_{n \rightarrow \infty} 0.$$

Quindi la serie è assolutamente convergente in  $z$ . Per l'arbitrarietà di  $z$  la serie di potenze ha raggio di convergenza  $+\infty$ .

## 7.2 Esponenziale, seno, coseno, seno iperbolico, coseno iperbolico

1. **Esercizio.** Dire se la relazione:

$$\cos^2 1 - \sin^2 1 = \cos 2$$

è vera e, in caso affermativo, giustificare la risposta.

**Risoluzione.** La relazione è vera in quanto

$$\cos 2 = \cos(1+1) = \cos 1 \cos 1 - \sin 1 \sin 1 = \cos^2 1 - \sin^2 1.$$

2. **Esercizio.** Calcolare:

$$|i \exp i|.$$

**Risoluzione.** Si ha  $|i \exp i| = |i| \cdot |\exp i| = 1 \cdot |\cos 1 + i \sin 1| = 1 \cdot 1 = 1$ .

## 7.3. LIMITI

## 7.3 Limiti

1. **Esercizio.** Calcolare i seguenti limiti:

$$(a) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1 - \cos x)^3}{(x - \sin x)^2};$$

$$(b) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1 - \exp(5x))^2}{\sin(2x) \operatorname{sh}(7x)};$$

$$(c) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin x}{x(\cos x - 1)};$$

$$(d) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\exp x - 1)^2 \sin^2 x}{1 - \cos x^2}.$$

$$(e) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 - \sin x^2}{\operatorname{sh} x (1 - \cos x)}.$$

**Risoluzione.** Gli esercizi sono risolti utilizzando unicamente le equivalenze asintotiche, senza usare dunque gli sviluppi asintotici.

$$(a) \text{ Si ha } \frac{(1 - \cos x)^3}{(x - \sin x)^2} \sim_{x \rightarrow 0} \frac{\left(\frac{x^2}{2}\right)^3}{\left(\frac{x^3}{6}\right)^2} = \frac{6^2}{2^3} = \frac{9}{2}. \text{ Quindi il limite è } \frac{9}{2}.$$

$$(b) \text{ Si ha } \frac{(1 - \exp(5x))^2}{\sin(2x) \operatorname{sh}(7x)} \sim_{x \rightarrow 0} \frac{(5x)^2}{2x7x} = \frac{25}{14}. \text{ Quindi il limite è } \frac{25}{14}.$$

(c) Si ha

$$\frac{x - \sin x}{x(\cos x - 1)} \sim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{x^3}{6}}{x\left(-\frac{x^2}{2}\right)} = -\frac{1}{3}.$$

Quindi si ha

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin x}{x(\cos x - 1)} = -\frac{1}{3}.$$

$$(d) \text{ Si ha } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\exp x - 1)^2 \sin^2 x}{1 - \cos x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 x^2}{\frac{x^4}{2}} = 2.$$

$$(e) \text{ Si ha } x^2 - \sin x^2 \sim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{6}x^6 \text{ e } \operatorname{sh} x (1 - \cos x) \sim_{x \rightarrow 0} x \frac{1}{2}x^2 = \frac{1}{2}x^3;$$

$$\text{quindi } \frac{x^2 - \sin x^2}{\operatorname{sh} x (1 - \cos x)} \sim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{6}x^6}{\frac{1}{2}x^3} = \frac{1}{3}x^3.$$

Quindi si ha

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 - \sin x^2}{\operatorname{sh} x (1 - \cos x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{3}x^3 = 0.$$

2. **Esercizio.** Calcolare i seguenti limiti:

$$(a) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x^2 + \sin x}{\operatorname{sh} x};$$

$$(b) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \operatorname{sh} x + \sin x}{1 - \cos x + \sin x};$$

$$(c) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 \sin x - \operatorname{sh}(2x)}{1 - \cos x + \sin(5x)};$$

$$(d) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^3 x - \sin(4x)}{\operatorname{ch} x - 1 + x};$$

$$(e) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 x \operatorname{sh} x + 3x}{1 - \cos x + \sin(2x)}.$$

**Risoluzione.** Gli esercizi sono risolti utilizzando le equivalenze asintotiche e la trascurabilità, senza usare dunque gli sviluppi asintotici.

(a) Si ha

$$\frac{\sin x^2 + \sin x}{\operatorname{sh} x} \underset{x \rightarrow 0}{\sim} \frac{\sin x}{\operatorname{sh} x} \underset{x \rightarrow 0}{\sim} 1;$$

quindi si ha

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x^2 + \sin x}{\operatorname{sh} x} = 1.$$

(b) Poichè  $x \sim \operatorname{sh} x \underset{x \rightarrow 0}{\ll} \sin x$  e poichè  $1 - \cos x \underset{x \rightarrow 0}{\ll} \operatorname{sh} x$ , si ha

$$\frac{x - \operatorname{sh} x + \sin x}{1 - \cos x + \operatorname{sh} x} \underset{x \rightarrow 0}{\sim} \frac{\sin x}{\operatorname{sh} x} = \frac{x}{x} = 1. \text{ Quindi il limite è } 1.$$

(c) Si ha  $\frac{x^2 \sin x - \operatorname{sh}(2x)}{1 - \cos x + \sin(5x)} \underset{x \rightarrow 0}{\sim} \frac{-\operatorname{sh}(2x)}{\sin(5x)} \underset{x \rightarrow 0}{\sim} \frac{-2x}{5x} = -\frac{2}{5}$ ; quindi si ha

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 \sin x - \operatorname{sh}(2x)}{1 - \cos x + \sin(5x)} = -\frac{2}{5}.$$

(d) Si ha  $\frac{\sin^3 x - \sin(4x)}{\operatorname{ch} x - 1 + x} \underset{x \rightarrow 0}{\sim} \frac{-\sin(4x)}{x} \underset{x \rightarrow 0}{\sim} \frac{-4x}{x} = -4$ ; quindi si ha

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^3 x - \sin(4x)}{\operatorname{ch} x - 1 + x} = -4.$$

(e) Si ha  $\frac{\sin^2 x \operatorname{sh} x + 3x}{1 - \cos x + \sin(2x)} \underset{x \rightarrow 0}{\sim} \frac{3x}{\sin(2x)} \underset{x \rightarrow 0}{\sim} \frac{3x}{2x} = \frac{3}{2}$ ; quindi si ha

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 x \operatorname{sh} x + 3x}{1 - \cos x + \sin(2x)} = \frac{3}{2}.$$

**3. Esercizio.** Calcolare i seguenti limiti:

(a)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x + \operatorname{sh} x}{\exp(3x) - 1};$

(b)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x^2 + 1 - \cos x}{x(\exp x - 1)}.$

**Risoluzione.** Gli esercizi sono risolti utilizzando il teorema  $f \sim c_1 h, g \sim c_2 h, c_1 + c_2 \neq 0 \Rightarrow f + g \sim (c_1 + c_2)h$ , senza usare dunque gli sviluppi asintotici.(a) Si ha  $\sin x \underset{x \rightarrow 0}{\sim} x, \operatorname{sh} x \underset{x \rightarrow 0}{\sim} x; \exp(3x) - 1 \underset{x \rightarrow 0}{\sim} 3x$ ; quindi si ha

$$\frac{\sin x + \operatorname{sh} x}{\exp(3x) - 1} \underset{x \rightarrow 0}{\sim} \frac{2x}{3x} = \frac{2}{3};$$

quindi si ha

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x + \operatorname{sh} x}{\exp(3x) - 1} = \frac{2}{3}.$$

(b) Si ha  $\sin x^2 \underset{x \rightarrow 0}{\sim} x^2, 1 - \cos x \underset{x \rightarrow 0}{\sim} \frac{x^2}{2}$ ; quindi si ha

$$\frac{\sin x^2 + 1 - \cos x}{x(\exp x - 1)} \underset{x \rightarrow 0}{\sim} \frac{\frac{3}{2}x^2}{x^2} = \frac{3}{2};$$

quindi si ha

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x^2 + 1 - \cos x}{x(\exp x - 1)} = \frac{3}{2}.$$

**4. Esercizio.** Calcolare i seguenti limiti:

(a)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{6(\operatorname{sh} x - x) - x^3}{\operatorname{ch} x - 1};$

(b)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x^3 - \operatorname{sh} x^3}{1 - \cos x};$

## 7.3. LIMITI

63

- (c)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x^3 - \operatorname{sh} x^3}{1 - \cos x}$ ;  
 (d)  $\lim_{x \rightarrow 0} \left| \frac{\sin x}{2(1 - \cos x) - \sin^2 x} \right|$ .

**Risoluzione.** Gli esercizi sono risolti utilizzando il teorema  $f \sim c_1 h$ ,  $g \sim c_2 h$ ,  $c_1 + c_2 = 0 \Rightarrow f - g \ll h$ , senza usare dunque gli sviluppi asintotici.

- (a) Si ha  $6(\operatorname{sh} x - x) \sim_{x \rightarrow 0} x^3$ ; quindi si ha  $6(\operatorname{sh} x - x) - x^3 \ll_{x \rightarrow 0} x^3$ ; si ha  $\operatorname{ch} x - 1 \sim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{2}$ ; quindi si ha  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{6(\operatorname{sh} x - x) - x^3}{\operatorname{ch} x - 1} = 0$ .  
 (b) Si ha  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x^3 - \operatorname{sh} x^3}{1 - \cos x} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{O(x^3)}{\frac{x^2}{2}} = 0$ .  
 (c) Si ha  $\sin x^3 - \operatorname{sh}^3 x \ll_{x \rightarrow 0} x^3 \ll_{x \rightarrow 0} 1 - \cos x$ . Quindi il limite è 0.  
 (d) Si ha  $2(1 - \cos x) - \sin^2 x \ll_{x \rightarrow 0} x^2 \ll x \rightarrow 0 \sin x$ . Quindi il limite è  $+\infty$ .

5. **Esercizio.** Calcolare i seguenti limiti:

- (a)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{4(1 - \cos x)^2 - x^2 \sin^2 x}{\operatorname{sh} x^4 \sin^2 x}$ ;  
 (b)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x(\exp x - 1) - x^2}{x - \sin x}$ ;  
 (c)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \operatorname{sh} x(1 - \cos x) - x^3}{\sin x(\operatorname{ch} x - 1)^2}$ ;  
 (d)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2(1 - \cos x) - \sin^2 x}{(\operatorname{ch} x - 1)^2}$ ;  
 (e)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2(1 - \cos x) - \operatorname{sh}^2 x}{(1 - \cos x)^2}$ ;  
 (f)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2(\operatorname{ch} x - 1) - \sin^2 x}{(1 - \cos x)^2}$ ;  
 (g)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{sh}^2 x - x \sin x}{\sin x(x - \sin x)}$ ;  
 (h)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\exp x - 1) \sin x - 2(\operatorname{ch} x - 1)}{x - \sin x}$ ;  
 (i)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\exp x - 1)^3 - \exp x^3 + 1}{(1 - \cos x)^2}$ ;  
 (j)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{4(1 - \cos x) - \sin x \operatorname{sh}(2x)}{(1 - \cos x)^2}$ .

**Risoluzione.** Gli esercizi sono risolti utilizzando gli sviluppi asintotici.

- (a) Si ha:  
 $\operatorname{sh} x^4 \sin^2 x \sim_{x \rightarrow 0} x^6$ ,  
 $\cos x = 1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{24}x^4 + o(x^4)$ ,  
 $1 - \cos x = \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{24}x^4 + o(x^4)$ ,  
 $(1 - \cos x)^2 = \frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{6}x^6 + o(x^6)$ ,  
 $4(1 - \cos x)^2 = x^4 - \frac{1}{6}x^6 + o(x^6)$ ,  
 $\sin x = x - \frac{1}{6}x^3 + o(x^3)$ ,  
 $\sin^2 x = x^2 - \frac{1}{3}x^4 + o(x^4)$ ,  
 $x^2 \sin^2 x = x^4 - \frac{1}{3}x^6 + o(x^6)$ ,

$$4(1 - \cos x)^2 - x^2 \sin^2 x = -\frac{1}{6}x^6 + \frac{1}{3}x^6 + o(x^6) \sim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{6}x^6,$$

$$\frac{4(1 - \cos x)^2 - x^2 \sin^2 x}{\log(1 + x^4) \sin^2 x} \sim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{6}x^6}{x^6} = \frac{1}{6}.$$

Quindi si ha

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{4(1 - \cos x)^2 - x^2 \sin^2 x}{\log(1 + x^4) \sin^2 x} = \frac{1}{6}.$$

(b) Si ha:

$$x - \sin x \sim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{6}x^3,$$

$$\sin x = x + o(x^2),$$

$$\exp x = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + o(x^2),$$

$$\exp x - 1 = x + \frac{1}{2}x^2 + o(x^2),$$

$$\sin x(\exp x - 1) = (x + o(x^2))(x + \frac{1}{2}x^2 + o(x^2)) = x^2 + \frac{1}{2}x^3 + o(x^3),$$

$$\sin x(\exp x - 1) - x^2 = \frac{1}{2}x^3 + o(x^3) \sim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{2}x^3,$$

$$\frac{\sin x(\exp x - 1) - x^2}{x - \sin x} \sim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{2}x^3}{\frac{1}{6}x^3} = 3.$$

Quindi si ha

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x(\exp x - 1) - x^2}{x - \sin x} = 3.$$

(c) Si ha:

$$\sin x(\operatorname{ch} x - 1) \sim_{x \rightarrow 0} x(\frac{1}{2}x^2)^2 = \frac{1}{4}x^5,$$

$$\operatorname{sh} x = x + \frac{1}{6}x^3 + o(x^3),$$

$$\cos x = 1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{24}x^4 + o(x^4),$$

$$1 - \cos x = \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{24}x^4 + o(x^4),$$

$$\operatorname{sh} x(1 - \cos x) = (x + \frac{1}{6}x^3 + o(x^3))(\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{24}x^4 + o(x^4)) = \frac{1}{2}x^3 - \frac{1}{24}x^5 + \frac{1}{12}x^5 + o(x^5) = \frac{1}{2}x^3 + \frac{1}{24}x^5 + o(x^5),$$

$$2 \operatorname{sh} x(1 - \cos x) = x^3 + \frac{1}{12}x^5 + o(x^5),$$

$$2 \operatorname{sh} x(1 - \cos x) - x^3 = \frac{1}{12}x^5 \sim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{12}x^5,$$

$$\frac{2 \operatorname{sh} x(1 - \cos x) - x^3}{\sin x(\operatorname{ch} x - 1)^2} \sim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{12}x^5}{\frac{1}{4}x^5} = \frac{1}{3}.$$

Quindi si ha

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \operatorname{sh} x(1 - \cos x) - x^3}{\sin x(\operatorname{ch} x - 1)^2} = \frac{1}{3}.$$

(d) Si ha

$$\cos x = 1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{24}x^4 + o(x^4);$$

$$1 - \cos x = \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{24}x^4 + o(x^4);$$

$$2(1 - \cos x) = x^2 - \frac{1}{12}x^4 + o(x^4);$$

$$\sin x = x - \frac{1}{6}x^3 + o(x^3);$$

$$\sin^2 x = x^2 - \frac{1}{3}x^4 + o(x^4);$$

$$2(1 - \cos x) - \sin^2 x = x^2 - \frac{1}{12}x^4 - x^2 + \frac{1}{3}x^4 + o(x^4) = \frac{1}{4}x^4 + o(x^4) \sim \frac{1}{4}x^4;$$

$$(\operatorname{ch} x - 1)^2 \sim (\frac{1}{2}x^2)^2 = \frac{1}{4}x^4$$

$$\frac{2(1 - \cos x) - \sin^2 x}{(\operatorname{ch} x - 1)^2} \sim \frac{\frac{1}{4}x^4}{\frac{1}{4}x^4} = 1.$$

Quindi si ha

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2(1 - \cos x) - \sin^2 x}{(\operatorname{ch} x - 1)^2} = 1.$$

## 7.3. LIMITI

65

(e) Si ha

$$(1 - \cos x)^2 \sim \left(\frac{1}{2}x^2\right)^2 = \frac{1}{4}x^4$$

$$\cos x = 1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{24}x^4 + o(x^4);$$

$$1 - \cos x = \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{24}x^4 + o(x^4);$$

$$2(1 - \cos x) = x^2 - \frac{1}{12}x^4 + o(x^4);$$

$$\operatorname{sh} x = x + \frac{1}{6}x^3 + o(x^3);$$

$$\operatorname{sh}^2 x = x^2 + \frac{1}{3}x^4 + o(x^4);$$

$$2(1 - \cos x) - \operatorname{sh}^2 x = x^2 - \frac{1}{12}x^4 - x^2 - \frac{1}{3}x^4 + o(x^4) = -\frac{5}{12}x^4 + o(x^4) \sim -\frac{5}{12}x^4;$$

$$\frac{2(1 - \cos x) - \operatorname{sh}^2 x}{(1 - \cos x)^2} \sim \frac{-\frac{5}{12}x^4}{\frac{1}{4}x^4} = -\frac{5}{3}.$$

Quindi si ha

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2(1 - \cos x) - \operatorname{sh}^2 x}{(1 - \cos x)^2} = -\frac{5}{3}.$$

(f) Si ha

$$(1 - \cos x)^2 \sim \left(\frac{1}{2}x^2\right)^2 = \frac{1}{4}x^4$$

$$\operatorname{ch} x = 1 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{24}x^4 + o(x^4);$$

$$\operatorname{ch} x - 1 = \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{24}x^4 + o(x^4);$$

$$2(\operatorname{ch} x - 1) = x^2 + \frac{1}{12}x^4 + o(x^4);$$

$$\sin x = x - \frac{1}{6}x^3 + o(x^3);$$

$$\sin^2 x = x^2 - \frac{1}{3}x^4 + o(x^4);$$

$$2(\operatorname{ch} x - 1) - \sin^2 x = x^2 + \frac{1}{12}x^4 - x^2 + \frac{1}{3}x^4 + o(x^4) = \frac{5}{12}x^4 + o(x^4) \sim \frac{5}{12}x^4;$$

$$\frac{2(\operatorname{ch} x - 1) - \sin^2 x}{(1 - \cos x)^2} \sim \frac{\frac{5}{12}x^4}{\frac{1}{4}x^4} = \frac{5}{3}.$$

Quindi si ha

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2(\operatorname{ch} x - 1) - \sin^2 x}{(1 - \cos x)^2} = \frac{5}{3}.$$

(g) Si ha

$$\sin x(x - \sin x) \sim_{x \rightarrow 0} \frac{x^4}{6}.$$

Si ha

$$\operatorname{sh} x = x + \frac{1}{6}x^3 + o(x^3),$$

$$\operatorname{sh}^2 x = x^2 + \frac{1}{3}x^4 + o(x^4),$$

$$\sin x = x - \frac{1}{6}x^3 + o(x^3),$$

$$x \sin x = x^2 - \frac{1}{6}x^4 + o(x^4),$$

$$\operatorname{sh}^2 x - x \sin x = \frac{1}{2}x^4 + o(x^4) \sim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{2}x^4.$$

Quindi si ha

$$\frac{\operatorname{sh}^2 x - x \sin x}{\sin x(x - \sin x)} \sim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{2}x^4}{\frac{1}{6}x^4} = 3.$$

Quindi si ha

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{sh}^2 x - x \sin x}{\sin x(x - \sin x)} = 3.$$

(h) Si ha

$$x - \sin x \sim_{x \rightarrow 0} \frac{x^3}{6};$$

$$\exp x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + o(x^2); \text{ quindi}$$

$$\exp x - 1 = x + \frac{x^2}{2} + o(x^2);$$

$\sin x = x + o(x^2)$ ; quindi

$$(\exp x - 1) \sin x = (x + \frac{x^2}{2} + o(x^2))(x + o(x^2)) = x^2 + \frac{x^3}{2} + o(x^3);$$

$\operatorname{ch} x = 1 + \frac{x^2}{2} + o(x^3)$ ; quindi

$$\operatorname{ch} x - 1 = \frac{x^2}{2} + o(x^3); \text{ quindi}$$

$$2(\operatorname{ch} x - 1) = x^2 + o(x^3); \text{ quindi}$$

$$(\exp x - 1) \sin x - 2(\operatorname{ch} x - 1) = \frac{x^3}{2} + o(x^3) \sim_{x \rightarrow 0} \frac{x^3}{2}; \text{ quindi}$$

$$\frac{(\exp x - 1) \sin x - 2(\operatorname{ch} x - 1)}{x - \sin x} \sim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{x^3}{2}}{\frac{x^3}{6}} = 3.$$

Si ha quindi  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\exp x - 1) \sin x - 2(\operatorname{ch} x - 1)}{x - \sin x} = 3$ .

(i) Si ha

$$(1 - \cos x)^2 \sim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{x^2}{2}\right)^2 = \frac{x^4}{4};$$

$\exp x = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + o(x^2)$ ; quindi

$$\exp x - 1 = x + \frac{1}{2}x^2 + o(x^2); \text{ quindi}$$

$$(\exp x - 1)^3 = x^3 + 3x^2 \frac{1}{2}x^2 + o(x^4);$$

$\exp x = 1 + x^3 + \frac{1}{2}x^6 + o(x^6) = 1 + x^3 + o(x^4)$ ; quindi

$$(\exp x - 1)^3 - \exp x^3 + 1 = x^3 + \frac{3}{2}x^4 - 1 - x^3 + 1 + o(x^4) = \frac{3}{2}x^4 + o(x^4) \sim_{x \rightarrow 0} \frac{3}{2}x^4; \text{ quindi}$$

$$\frac{(\exp x - 1)^3 - \exp x^3 + 1}{(1 - \cos x)^2} \sim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{3}{2}x^4}{\frac{1}{4}x^4} = 6.$$

Quindi si ha  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\exp x - 1)^3 - \exp x^3 + 1}{(1 - \cos x)^2} = 6$ .

(j) Si ha

$$(1 - \cos x)^2 \sim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{x^2}{2}\right)^2 = \frac{x^4}{4};$$

$\cos x = 1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{24}x^4 + o(x^4)$ ; quindi

$$1 - \cos x = \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{24}x^4 + o(x^4); \text{ quindi}$$

$$4(1 - \cos x) = 2x^2 - \frac{1}{6}x^4 + o(x^4);$$

$$\sin x = x - \frac{1}{6}x^3 + o(x^3);$$

$$\operatorname{sh}(2x) = 2x + \frac{1}{6}(2x)^3 + o(x^3) = 2x + \frac{4}{3}x^3 + o(x^3);$$

$$\sin x \operatorname{sh}(2x) = (x - \frac{1}{6}x^3 + o(x^3))(2x + \frac{4}{3}x^3 + o(x^3)) =$$

$$2x^2 + \frac{4}{3}x^4 - \frac{1}{3}x^4 + o(x^4) = 2x^2 + x^4 + o(x^4);$$

$$4(1 - \cos x) - \sin x \operatorname{sh}(2x) = 2x^2 - \frac{1}{6}x^4 - 2x^2 - x^4 + o(x^4) = -\frac{7}{6}x^4 + o(x^4) \sim_{x \rightarrow 0} -\frac{7}{6}x^4; \text{ quindi}$$

$$\frac{4(1 - \cos x) - \sin x \operatorname{sh}(2x)}{(1 - \cos x)^2} \sim_{x \rightarrow 0} \frac{-\frac{7}{6}x^4}{\frac{1}{4}x^4} = -\frac{14}{3}.$$

Quindi si ha  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{4(1 - \cos x) - \sin x \operatorname{sh}(2x)}{(1 - \cos x)^2} = -\frac{14}{3}$ .

## 7.4 Serie

1. **Esercizio.** Studiare la convergenza delle seguenti serie:

(a)  $\sum_{n=0}^{\infty} \sin \frac{n^3 + n + 1}{n^5 + n + 3}$ ;

(b)  $\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{1 - \cos \frac{1}{n}}$ ;

## 7.4. SERIE

67

- (c)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3+1}{n^2+3} \left(\frac{1}{n} - \sin \frac{1}{n}\right)$ ;  
 (d)  $\sum_{n=1}^{\infty} \sin \sqrt{\frac{1}{n}}$ ;  
 (e)  $\sum_{n=0}^{\infty} \operatorname{sh} \frac{1}{\sqrt{n^2+1}}$ ;  
 (f)  $\sum_{n=1}^{\infty} \left(1 - \cos \frac{1}{n}\right)$ ;  
 (g)  $\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{\exp \frac{1}{n^2} - 1}$ ;

**Risoluzione.**

- (a) Si ha  $\sin \frac{n^3+n+1}{n^5+n+3} \sim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^3+n+1}{n^5+n+3} \sim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^2}$ .  
 Quindi la serie è convergente.
- (b) Si ha  $\sqrt{1 - \cos \frac{1}{n}} \sim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{\frac{1}{2} \frac{1}{n^2}} = \sqrt{\frac{1}{2}} \frac{1}{n}$ .  
 Quindi la serie è divergente positivamente.
- (c) Si ha  $\frac{n^3+1}{n^2+3} \left(\frac{1}{n} - \sin \frac{1}{n}\right) \sim_{n \rightarrow \infty} n \frac{1}{6} \frac{1}{n^3} = \frac{1}{6} \frac{1}{n^2}$ .  
 Quindi la serie è convergente.
- (d) Si ha  $\sin \sqrt{\frac{1}{n}} \sim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{\frac{1}{n}} = \frac{1}{n^{\frac{1}{2}}}$ ; quindi la serie è divergente positivamente.
- (e) Si ha  $\operatorname{sh} \frac{1}{\sqrt{n^2+1}} \sim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{n^2+1}} \sim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n}$ .  
 Quindi la serie è divergente positivamente.
- (f) Si ha  $1 - \cos \frac{1}{n} \sim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2} \frac{1}{n^2}$ ; quindi la serie è convergente.
- (g) Si ha  
 $\sqrt{\exp \frac{1}{n^4} - 1} \sim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{\frac{1}{n^4}} = \frac{1}{n^2}$ ;  
 quindi la serie è convergente.



# Capitolo 8

## Derivate

### 8.1 Derivate

1. **Esercizio.** Sia

$$f : \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R}, x \longrightarrow x^3 ;$$

- (a) scrivere il rapporto incrementale  $r(h)$  di  $f$  in 1 applicato ad  $h$ , (semplificando l'espressione).  
 (b) calcolare  $f'(1)$  come limite del rapporto incrementale.

**Risoluzione.**

(a) Si ha  $r(h) = \frac{f(1+h)-f(1)}{h} = \frac{(1+h)^3-1}{h} = \frac{1+3h+3h^2+h^3-1}{h} = \frac{3h+3h^2+h^3}{h} =$

(b) Si ha  $f'(1) = \lim_{h \rightarrow 0} r(h) = \lim_{h \rightarrow 0} (h^2 + 3h + 3) = 3$ .

2. **Esercizio.** Scrivere l'equazione della retta tangente alla curva

$$y = x^3$$

nel punto  $(1, 1)$ .

**Risoluzione.** Posto  $f(x) = x^3$ , si ha  $f(1) = 1$  e  $f'(1) = 3$ ; quindi l'equazione della retta è  $y - 1 = 3(x - 1)$ , cioè  $y = 3x - 2$ .

3. **Esercizio.** Calcolare la derivata delle seguenti funzioni:

- (a)  $f(x) = x^2 \sin x^3$ ;  
 (b)  $f(x) = x^3 \sin x^2$ ;  
 (c)  $f(x) = x^2 \sin \exp(5x^2)$ .

**Risoluzione.**

(a) Si ha

$$f'(x) = 2x \sin x^3 + x^2(\cos x^3)3x^2 = 2x \sin x^3 + 3x^4 \cos x^3.$$

(b) Si ha

$$f'(x) = 3x^2 \sin x^2 + x^3(\cos x^2)2x = 3x^2 \sin x^2 + 2x^4 \cos x^2.$$

(c) Si ha

$$f'(x) = 2x \sin \exp(5x^2) + x^2(\cos \exp(5x^2)) \exp(5x^2)10x.$$

4. **Esercizio.** Calcolare la derivata delle seguenti funzioni in un punto  $x$  del dominio ove le funzioni sono derivabili

(a)  $f(x) = \sqrt[4]{x^2 \sin x^3}$

(b)  $f(x) = \sqrt{\sin \frac{1}{x}}$

**Risoluzione.**

(a) Si ha

$$f'(x) = \frac{1}{4\sqrt[4]{(x^2 \sin x^3)^3}}(2x \sin x^3 + x^2(\cos x^3)3x^2) = \frac{1}{4\sqrt[4]{(x^2 \sin x^3)^3}}(2x \sin x^3 + 3x^4 \cos x^3).$$

(b) Si ha

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{\sin \frac{1}{x}}} \cos \frac{1}{x} \left(-\frac{1}{x^2}\right).$$

5. **Esercizio.** Determinarne il dominio naturale e calcolare la derivata della seguente funzione:

$$f(x) = \exp \frac{1}{x}.$$

**Risoluzione.**Si ha  $\text{dom}(f) = \mathbf{R}^*$  e per ogni  $x \in \mathbf{R}^*$  si ha

$$f'(x) = \left(\exp \frac{1}{x}\right) \left(-\frac{1}{x^2}\right).$$

6. **Esercizio.** Sia

$$f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}, x \rightarrow \frac{1}{x+1};$$

trovare in funzione di  $h$  l'espressione che, attraverso la derivata, approssima l'incremento  $(\Delta f(1))(h)$  della funzione  $f$  in 1, per  $h$  "piccolo".

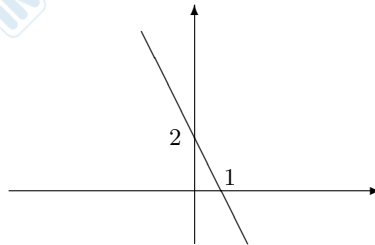
**Risoluzione.** Si ha  $f'(x) = -\frac{1}{(1-x)^2}$ ; quindi si ha  $f'(1) = -\frac{1}{4}$ ; quindi si ha  $(\Delta f(1))(h) = f(1+h) - f(1) = f'(1)h + o(h) = -\frac{1}{4}h + o(h)$ .

## 8.2. MASSIMO, MINIMO

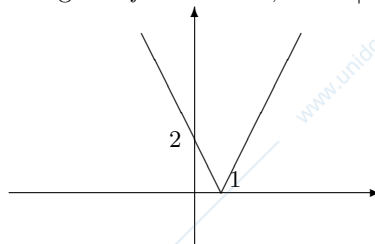
71

7. **Esercizio.** Fare un esempio di una funzione reale di variabile reale, continua in 1, non derivabile in 1 e tale che  $f(0) = 2$ . Si richiede l'espressione esplicita della funzione.

**Risoluzione.** Consideriamo la retta passante per i punti  $(1, 0)$  e  $(0, 2)$ ; essa ha equazione  $x + \frac{y}{2} = 1$ , cioè  $2x + y = 2$ , cioè  $y = 2 - 2x$ .



Come funzione si può scegliere  $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}, x \rightarrow |2 - 2x|$ .



## 8.2 Massimo, minimo

1. **Esercizio.** Dire se le seguenti funzioni

- (a)  $f : [0, 1] \rightarrow \mathbf{R}, x \rightarrow \frac{x-1}{x+1}$ ,  
 (b)  $f : [-1, 1] \rightarrow \mathbf{R}, x \rightarrow x^2 + x + 1$ ,  
 (c)  $f : [0, 1] \rightarrow \mathbf{R}, x \rightarrow \frac{x^2+1}{x+1}$

ammettono massimo e minimo; in caso affermativo determinarli.

**Risoluzione.**

- (a) Essendo  $f$  continua ed essendo  $\text{dom}(f)$  compatto,  $f$  ammette massimo e minimo.

Sia  $x \in ]0, 1[$ ; si ha  $f'(x) = \frac{x+1-(x-1)}{(x+1)^2} = \frac{2}{(x+1)^2} \neq 0$ ; quindi il massimo ed il minimo di  $f$  sono raggiunti in  $\{0, 1\}$ ; si ha  $f(0) = -1$ ,  $f(1) = 0$ ; quindi si ha  $\max(f) = 0$ ,  $\min(f) = -1$ .

- (b) Poichè  $f$  è continua e definita su un compatto,  $f$  ammette massimo e minimo.

Il massimo ed il minimo di  $f$  sono raggiunti nei punti di  $] - 1, 1[$  ove si annulla  $f'$  o su  $\{-1, 1\}$ .

Sia  $x \in ]-1, 1[$ ; si ha  $f'(x) = 2x + 1$ ; quindi si ha  $f'(x) = 0$  se e solo se  $x = -\frac{1}{2}$ .

Si ha

$$f(-\frac{1}{2}) = \frac{1}{4} - \frac{1}{2} + 1 = \frac{1-2+4}{4} = \frac{3}{4}, \quad f(1) = 3, \quad f(-1) = 1.$$

Quindi si ha  $\max(f) = 3$ ,  $\min(f) = \frac{3}{4}$ .

- (c) i. Essendo  $f$  continua ed essendo  $\text{dom} f$  compatto, per il teorema di Weierstrass,  $f$  ammette massimo e minimo.  
 ii. Il massimo ed il minimo di  $f$  sono raggiunti negli estremi di  $[0, 1]$  o nei punti interni di  $[0, 1]$  nei quali  $f'(x) = 0$ .

Sia  $x \in ]0, 1[$ ; si ha

$$f'(x) = \frac{2x(x+1) - (x^2+1)}{(x+1)^2} = \frac{2x^2+2x-x^2-1}{(x+1)^2} = \frac{x^2+2x-1}{(x+1)^2};$$

si ha  $f'(x) = 0$  se e solo se  $x^2 + 2x - 1 = 0$ , cioè se e solo se  $x = -1 \pm \sqrt{2}$ , cioè, essendo  $0 < x < 1$ , se e solo se  $x = \sqrt{2} - 1$ .

Quindi il massimo ed il minimo di  $f$  sono raggiunti su  $\{0, 1, \sqrt{2} - 1\}$ .

$$\text{Si ha } f(0) = 1, \quad f(1) = 1, \quad f(\sqrt{2} - 1) = \frac{(\sqrt{2}-1)^2+1}{\sqrt{2}-1+1} = \frac{2+1-2\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}} = \frac{4-2\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{4\sqrt{2}-4}{2} = 2\sqrt{2} - 2.$$

Si ha  $2\sqrt{2} - 2 < 1$ : infatti ciò equivale a  $2\sqrt{2} < 3$ , cioè a  $\sqrt{2} < \frac{3}{2}$ , cioè a  $2 < \frac{9}{4}$ , cioè a  $8 < 9$ .

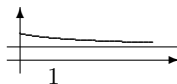
Si ha quindi  $\max(f) = 1$  e  $\min(f) = 2\sqrt{2} - 2$ .

2. **Esercizio.** Sia  $A = \left\{ \frac{x+5}{2x+5}; x \in \mathbf{R}_+ \right\}$ ;

- (a) dire se  $A$  ammette massimo e se  $A$  ammette minimo  
 (b) determinare  $\sup(A)$  e  $\inf(A)$  rispetto allo spazio ordinato  $(\mathbf{R}, \leq)$

**Risoluzione.** Sia  $f : [0, +\infty[ \rightarrow \mathbf{R}$ ,  $x \mapsto \frac{x+5}{2x+5}$ , di modo che  $A = f([0, +\infty[)$ .

Si ha  $f(0) = 1$ ,  $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \frac{1}{2}$ . Per  $x \in ]0, +\infty[$  si ha  $f'(x) = \frac{2x+5-2(x+5)}{(2x+5)^2} = -\frac{5}{(2x+5)^2} < 0$ ; quindi  $f$  è strettamente decrescente.



Si ha quindi  $A = ]\frac{1}{2}, 1]$ . Quindi  $A$  ammette massimo e  $\max(A) = 1$ ;  $A$  non ammette minimo; si ha  $\sup(A) = 1$ ,  $\inf(A) = \frac{1}{2}$ .

### 8.3 Teorema del valor medio

1. **Esercizio.** Dire quale delle seguenti funzioni  $f : [-1, 1] \rightarrow \mathbf{R}$  con

- (a)  $f(x) = x^2 + x + 1$ ,  
 (b)  $f(x) = x^3 + x^2 - x + 1$ ,  
 (c)  $f(x) = |x|$ ,

## 8.4. DERIVABILITÀ E DERIVATA

73

soddisfano le ipotesi del teorema di Rolle; motivare per ciascuna funzione la risposta; per le funzioni che soddisfano tali ipotesi, determinare i punti  $\xi$  l'esistenza dei quali è assicurata dal teorema di Rolle.

**Risoluzione.**

- (a) Si ha  $f(-1) = 1 - 1 + 1 = 1$ ,  $f(1) = 3$ ; quindi  $f$  non soddisfa le condizioni del teorema di Rolle.
- (b) La funzione  $f$  è derivabile e si ha  $f(-1) = 2$  e  $f(1) = 2$ ; quindi  $f$  soddisfa le condizioni del teorema di Rolle; quindi esiste  $\xi \in ]-1, 1[$  tale che  $f'(\xi) = 0$ ; per ogni  $x \in ]-1, 1[$  si ha  $f'(x) = 3x^2 + 2x - 1$ ; si ha  $f'(x) = 0$  se e solo se  $3x^2 + 2x - 1 = 0$ , cioè se e solo se  $x = \frac{-1 \pm \sqrt{4}}{3} = \frac{1 \pm 2}{3}$ , cioè se e solo se  $x = -1$  o  $x = \frac{1}{3}$ , cioè, essendo  $x \in ]-1, 1[$  se e solo se  $x = \frac{1}{3}$ ; si ha quindi  $\xi = \frac{1}{3}$ .
- (c) La funzione  $f$  non è derivabile in 0; quindi non soddisfa le condizioni del teorema di Rolle.
2. **Esercizio.** Sia  $f : [0, 1] \rightarrow \mathbf{R}, x \rightarrow x^2$ ; determinare il punto  $\xi$  di cui viene affermata l'esistenza nel teorema di Lagrange.

**Risoluzione.** Per ogni  $x \in [0, 1]$  si ha  $f'(x) = 2x$ ; il punto  $\xi$  soddisfa  $\frac{f(1)-f(0)}{1-0} = f'(\xi)$ ; si ha quindi  $1 = 2\xi$ ; quindi  $\xi = \frac{1}{2}$ .

## 8.4 Derivabilità e derivata

1. **Esercizio.** Sia

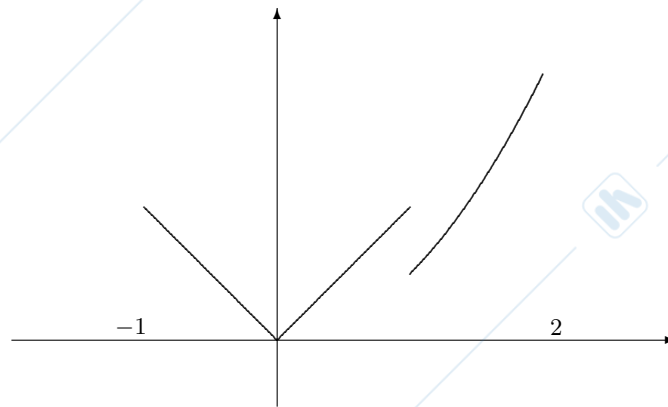
$$f : [-1, 2] \rightarrow \mathbf{R}, x \rightarrow \begin{cases} |x| & \text{per } -1 \leq x \leq 1 \\ \frac{x^2}{2} & \text{per } 1 < x \leq 2 \end{cases} ;$$

- (a) disegnare approssimativamente il grafico di  $f$ ;
- (b) determinare l'insieme dei punti ove  $f$  è continua;
- (c) determinare l'insieme dei punti ove  $f$  è derivabile;

motivare adeguatamente la risposta.

**Risoluzione.**

- (a)



- (b) Per il carattere locale della continuità,  $f$  è continua su  $[-1, 1[$  e su  $]1, 2]$ .

Studiamo la continuità di  $f$  in 1. Si ha

$$\lim_{x \rightarrow 1-, x \neq 1} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1-, x \neq 1} |x| = 1$$

e

$$\lim_{x \rightarrow 1+, x \neq 1} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1+, x \neq 1} \frac{x^2}{2} = \frac{1}{2}.$$

Quindi  $f$  non è continua in 1.

L'insieme dei punti di continuità di  $f$  è quindi

$$[-1, 1[ \cup ]1, 2].$$

- (c) Si ha

$$f(x) = \begin{cases} -x & \text{per } -1 \leq x < 0 \\ x & \text{per } 0 \leq x \leq 1 \\ \frac{1}{2}x^2 & \text{per } 1 < x \leq 2 \end{cases}.$$

Per il carattere locale della derivabilità,  $f$  è derivabile su  $[-1, 0[$ , su  $]0, 1[$  e su  $]1, 2]$ .

In 1  $f$  non è derivabile in quanto non è continua.

Studiamo la continuità di  $f$  in 0. Si ha

$$\lim_{x \rightarrow 0-, x \neq 0} f'(x) = \lim_{x \rightarrow 0-, x \neq 0} -1 = -1$$

quindi  $f$  è derivabile da sinistra in 0 e si ha  $f'_-(0) = -1$ .

Si ha

$$\lim_{x \rightarrow 0+, x \neq 0} f'(x) = \lim_{x \rightarrow 0+, x \neq 0} 1 = 1$$

quindi  $f$  è derivabile da destra in 0 e si ha  $f'_+(0) = 1$ .

Essendo  $f'_-(0) \neq f'_+(0)$ ,  $f$  non è derivabile in 0.

L'insieme dei punti di continuità di  $f$  è quindi

$$[-1, 0[ \cup ]0, 1[ \cup ]1, 2].$$

## 8.5 Studio funzione

1. **Esercizio.** Studiare la seguente funzione

$$f(x) = \frac{x^4}{4} + \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + x + 1$$

rispondendo alle seguenti domande:

- Determinare il dominio di  $f$ ;
- Calcolare i limiti di  $f$  nei punti frontiera del dominio;
- Determinare l'insieme degli intervalli non banali massimali sui quali  $f$  è strettamente crescente (risp. strettamente decrescente);
- Determinare l'insieme degli intervalli non banali massimali sui quali  $f$  è strettamente convessa (risp. strettamente concava).

Disegnare approssimativamente il grafico di  $f$ .

**Risoluzione.**

- Si ha  $\text{dom}(f) = \mathbf{R}$ .
- Si ha  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$ ,  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ .
- Sia  $x \in \mathbf{R}$ . Si ha

$$f'(x) = x^3 + x^2 + x + 1 = (x^2 + 1)(x + 1).$$

Si ha  $f'(x) = 0$  se e solo se  $x = -1$ ; si ha  $f'(x) > 0$  se e solo se  $x > -1$ ; si ha  $f'(x) < 0$  se e solo se  $x < -1$ . Quindi  $f$  è strettamente crescente su  $[-1 + \infty[$ , strettamente decrescente su  $] - \infty, -1]$ .

Si ha quindi

$$\mathcal{M}(\nearrow) = \{[-1, +\infty[), \quad \mathcal{M}(\leftrightarrow) = \emptyset,$$

$$\mathcal{M}(\searrow) = \{] - \infty, -1]\}.$$

- Sia  $x \in \mathbf{R}$ . Si ha

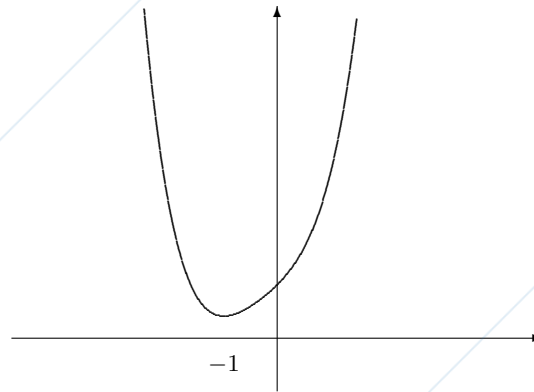
$$f''(x) = 3x^2 + x + 1 > 0.$$

Quindi  $f$  è strettamente convessa su tutto  $\mathbf{R}$ .

Quindi si ha

$$\mathcal{C}(\uparrow) = \{] - \infty, +\infty[), \quad \mathcal{C}(\dagger) = \emptyset \quad \mathcal{C}(\downarrow) = \emptyset\}.$$

Per tracciare il grafico di  $f$  teniamo conto che  $f(-1) = \frac{5}{12} \approx .42$  e  $f(0) = 1$ . Si ha



2. **Esercizio.** Studiare la seguente funzione

$$f(x) = x^3 + 2x^2 - 5x - 6,$$

rispondendo alle seguenti domande:

- determinare il dominio di  $f$ ;
- calcolare i limiti di  $f$  nei punti frontiera del dominio;
- determinare l'insieme degli intervalli non banali massimali sui quali  $f$  è strettamente crescente (risp. strettamente decrescente);
- determinare l'insieme degli intervalli non banali massimali sui quali  $f$  è strettamente convessa (risp. strettamente concava).

Disegnare approssimativamente il grafico di  $f$ .

**Risoluzione.**

- Si ha  $\text{dom}(f) = \mathbf{R}$ .
- Si ha  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$ ,  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ .
- Sia  $x \in \mathbf{R}$ ; si ha  $f'(x) = 3x^2 + 4x - 5$ .

Si ha  $f'(x) = 0$  se e solo se  $x = \frac{-2 \pm \sqrt{19}}{3}$ ,  $f'(x) > 0$  se e solo se  $x < \frac{-2 - \sqrt{19}}{3}$  o  $x > \frac{-2 + \sqrt{19}}{3}$ ,  $f'(x) < 0$  se e solo se  $\frac{-2 - \sqrt{19}}{3} < x < \frac{-2 + \sqrt{19}}{3}$ ; quindi  $f$  è strettamente crescente su  $]-\infty, \frac{-2 - \sqrt{19}}{3}]$  e su  $[\frac{-2 + \sqrt{19}}{3}, +\infty[$ ,  $f$  è strettamente decrescente su  $[\frac{-2 - \sqrt{19}}{3}, \frac{-2 + \sqrt{19}}{3}]$ ; quindi di ha

$$\mathcal{M}(\nearrow) = \{ ]-\infty, \frac{-2 - \sqrt{19}}{3}], [\frac{-2 + \sqrt{19}}{3}, +\infty[ \},$$

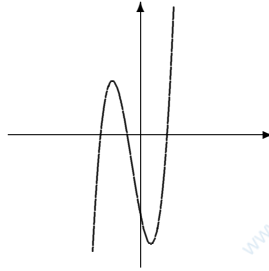
$$\mathcal{M}(\searrow) = \{ [\frac{-2 - \sqrt{19}}{3}, \frac{-2 + \sqrt{19}}{3}] \}, \quad \mathcal{M}(\leftrightarrow) = \emptyset.$$

(d) Sia  $x \in \mathbf{R}$ ; si ha  $f''(x) = 6x + 4$ .

Si ha  $f''(x) = 0$  se e solo se  $x = -\frac{2}{3}$ ;  $f''(x) > 0$  se e solo se  $x > -\frac{2}{3}$ ,  
 $f''(x) < 0$  se e solo se  $x < -\frac{2}{3}$ ; quindi  $f$  è strettamente convessa su  
 $[-\frac{2}{3}, +\infty[$ , strettamente concava su  $] -\infty, -\frac{2}{3}]$ ; quindi si ha

$$\mathcal{C}(\uparrow) = \{[-\frac{2}{3}, +\infty[ \}, \quad \mathcal{C}(\downarrow) = \{] -\infty, -\frac{2}{3}] \}, \quad \mathcal{C}(\dagger) = \emptyset.$$

Si ha  $\frac{-2-\sqrt{19}}{3} \approx -2.12$ ,  $f(\frac{-2-\sqrt{19}}{3}) \approx 4.06$ ,  $\frac{-2+\sqrt{19}}{3} \approx .79$ ,  $f(\frac{-2+\sqrt{19}}{3}) \approx -8.21$ .  
 Si ottiene il seguente grafico.



3. **Esercizio.** Studiare la seguente funzione (reale di variabile reale)

$$f(x) = x - \frac{1}{x}.$$

Si chiede:

- Determinare il dominio di  $f$ ;
- Calcolare i limiti di  $f$  nei punti frontiera del dominio;
- Determinare l'insieme degli intervalli (non vuoti e non ridotti ad un punto) massimali sui quali  $f$  è strettamente crescente (risp. strettamente decrescente);
- Determinare l'insieme degli intervalli (non vuoti e non ridotti ad un punto) massimali sui quali  $f$  è strettamente convessa (risp. strettamente concava).

Disegnare approssimativamente il grafico di  $f$ .

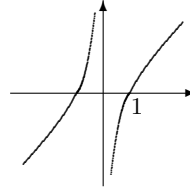
**Risoluzione.**

- Si ha  $\text{dom}(f) = \mathbf{R}^*$ .
- Si ha  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$ ,  $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = +\infty$ ,  $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = -\infty$ ,  
 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ .
- Sia  $x \in \mathbf{R}^*$ ; si ha  $f'(x) = 1 + \frac{1}{x^2} > 0$ ; quindi  $f$  è strettamente crescente su  
 $] -\infty, 0[$  e su  $]0, +\infty[$ ; quindi si ha

$$\mathcal{M}(\nearrow) = \{] -\infty, 0[, ]0, +\infty[ \}, \quad \mathcal{M}(\searrow) = \emptyset \quad \mathcal{M}(\leftrightarrow) = \emptyset.$$

- (d) Sia  $x \in \mathbf{R}^*$ ; si ha  $f''(x) = -2x^{-3}$ ; si ha quindi  $f''(x) > 0$  per  $x < 0$ ,  $f''(x) < 0$  per  $x > 0$ ; quindi  $f$  è strettamente convessa su  $] -\infty, 0[$ , strettamente concava su  $]0, +\infty[$ ; quindi si ha

$$\mathcal{C}(\uparrow) = \{] -\infty, 0[, ]0, +\infty[\}, \quad \mathcal{C}(\downarrow) = \{]0, +\infty[\} \quad \mathcal{C}(\dagger) = \emptyset.$$



4. **Esercizio.** Studiare la seguente funzione

$$f(x) = x^4 - 5x^2 + 6,$$

rispondendo alle seguenti domande:

- Determinare il dominio di  $f$ ;
- determinare gli zeri di  $f$ ;
- studiare il segno di  $f$ ;
- calcolare i limiti di  $f$  nei punti frontiera del dominio;
- Determinare l'insieme degli intervalli non banali massimali sui quali  $f$  è strettamente crescente (risp. strettamente decrescente);
- determinare l'insieme degli intervalli non banali massimali sui quali  $f$  è strettamente convessa (risp. strettamente concava).

Disegnare approssimativamente il grafico di  $f$ .

**Risoluzione.**

- Si ha  $\text{dom}(f) = \mathbf{R}$ .
- Si ha  $f(x) = 0$  se e solo se  $x^4 - 5x^2 + 6 = 0$ , cioè se e solo se  $x^2 = 2$  o  $x^2 = 3$ , cioè se e solo se  $x = \pm\sqrt{2}$  o  $x = \pm\sqrt{3}$ . Quindi gli zeri di  $f$  sono  $\sqrt{2}, -\sqrt{2}, \sqrt{3}, -\sqrt{3}$ .
- Si ha  $f(x) > 0$  se e solo se  $x^2 < 2$  o  $x^2 > 3$ , cioè se e solo se  $-\sqrt{2} < x < \sqrt{2}$  o  $x < -\sqrt{3}$  o  $x > \sqrt{3}$ . Si ha quindi  $f(x) < 0$  se e solo se  $-\sqrt{3} < x < -\sqrt{2}$  o  $\sqrt{2} < x < \sqrt{3}$ .
- Si ha  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$ ,  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ .
- Sia  $x \in \text{dom}(f)$ ; si ha  $f'(x) = 4x^3 - 10x$ .  
Si ha  $f'(x) = 0$  se e solo se  $4x^3 - 10x = 0$ , cioè se e solo se  $x(4x^2 - 10) = 0$ , cioè se e solo se  $x = 0$  o  $x = \pm\sqrt{\frac{5}{2}}$ . Si ha  $f'(x) > 0$  se e solo se  $-\sqrt{\frac{5}{2}} < x < 0$  o  $x > \sqrt{\frac{5}{2}}$ . Si ha  $f'(x) < 0$  se e solo se  $x < -\sqrt{\frac{5}{2}}$  o  $0 < x < \sqrt{\frac{5}{2}}$ .

## 8.5. STUDIO FUNZIONE

79

Quindi  $f$  è strettamente crescente su  $[-\sqrt{\frac{5}{2}}, 0]$  e su  $[\sqrt{\frac{5}{2}}, +\infty[$ ;  $f$  è strettamente decrescente su  $] -\infty, -\sqrt{\frac{5}{2}}]$  e su  $[0, \sqrt{\frac{5}{2}}]$ .

Si ha quindi

$$\mathcal{M}(\nearrow) = \left\{ [-\sqrt{\frac{5}{2}}, 0], [\sqrt{\frac{5}{2}}, +\infty[ \right\}, \mathcal{M}(\leftrightarrow) = \emptyset,$$

$$\mathcal{M}(\searrow) = \left\{ ] -\infty, -\sqrt{\frac{5}{2}}], [0, \sqrt{\frac{5}{2}}] \right\}.$$

(f) Sia  $x \in \text{dom}(f)$ ; si ha  $f''(x) = 12x^2 - 10$ .

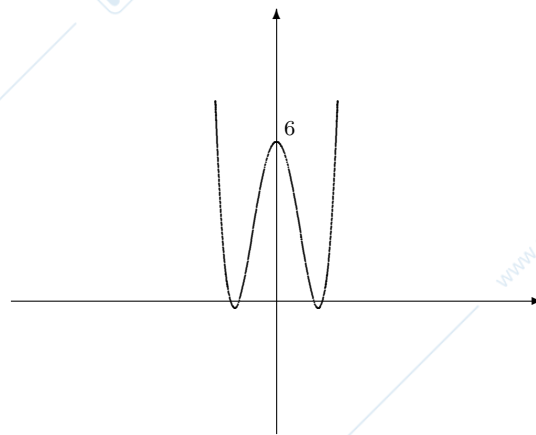
Si ha  $f''(x) > 0$  se e solo se  $x < -\sqrt{\frac{5}{6}}$  o  $x > \sqrt{\frac{5}{6}}$  e  $f''(x) < 0$  se e solo se  $-\sqrt{\frac{5}{6}} < x < \sqrt{\frac{5}{6}}$ .

Quindi  $f$  è strettamente convessa su  $] -\infty, -\sqrt{\frac{5}{6}}]$  e su  $[\sqrt{\frac{5}{6}}, +\infty[$  strettamente concava su  $[-\sqrt{\frac{5}{6}}, \sqrt{\frac{5}{6}}]$ .

Quindi si ha

$$\mathcal{C}(\uparrow) = \left\{ ] -\infty, -\sqrt{\frac{5}{6}}], [\sqrt{\frac{5}{6}}, +\infty[ \right\}, \mathcal{C}(\updownarrow) = \emptyset, \mathcal{C}(\downarrow) = \left\{ [-\sqrt{\frac{5}{6}}, \sqrt{\frac{5}{6}}] \right\}.$$

Si ha:  $f(0) = 6$ ,  $\sqrt{\frac{5}{6}} \approx .91$ ,  $f(\pm\sqrt{\frac{5}{6}}) = \frac{91}{36} \approx 2.53$ ,  $\sqrt{\frac{5}{2}} \approx 1.58$ ,  $f(\pm\sqrt{\frac{5}{2}}) = -\frac{1}{4} = -.25$ .



5. **Esercizio.** Studiare la seguente funzione (reale di variabile reale)

$$f(x) = \frac{2 + x^2}{1 - x^2}.$$

Si chiede:

- Determinare il dominio di  $f$ ;
- Calcolare i limiti di  $f$  nei punti frontiera del dominio;
- Determinare l'insieme degli intervalli non banali massimali sui quali  $f$  è strettamente crescente (risp. strettamente decrescente);
- Determinare l'insieme degli intervalli non banali massimali sui quali  $f$  è strettamente convessa (risp. strettamente concava).

Disegnare approssimativamente il grafico di  $f$ .

**Risoluzione.**

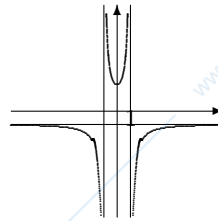
- Si ha  $\text{dom}(f) = \mathbf{R} - \{1, -1\}$ .
- Si ha  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -1$ ,  $\lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = -\infty$ ,  $\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = +\infty$ ,  $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = +\infty$ ,  $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = -\infty$ ,  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -1$ .
- Sia  $x \in \text{dom}(f)$ ; si ha  $f'(x) = \frac{2x(1-x^2) - (-2x)(2+x^2)}{(1-x^2)^2} = \frac{2x-2x^3+4x+2x^3}{(1-x^2)^2} = \frac{6x}{(1-x^2)^2}$ .  
Si ha  $f'(x) = 0$  se e solo se  $x = 0$ ,  $f'(x) > 0$  se e solo se  $x > 0$ ,  $f'(x) < 0$  se e solo se  $x < 0$ ; quindi  $f$  è strettamente crescente su  $[0, 1[$  e su  $]1, +\infty[$  e strettamente decrescente su  $] - \infty, -1[$  e su  $] - 1, 0]$ ; quindi si ha

$$\mathcal{M}(\nearrow) = \{[0, 1[, ]1, +\infty[\}, \quad \mathcal{M}(\searrow) = \{] - \infty, -1[, ] - 1, 0]\},$$

$$\mathcal{M}(\leftrightarrow) = \emptyset.$$

- Sia  $x \in \text{dom}(f)$ ; si ha  $f''(x) = 6 \frac{(1-x^2)^2 - 2(1-x^2)(-2x)x}{(1-x^2)^4} = 6 \frac{(1-x^2)(1-x^2+4x^2)}{(1-x^2)^4} = 6 \frac{1+3x^2}{(1-x^2)^3}$ . si ha quindi  $f''(x) > 0$  se e solo se  $-1 < x < 1 > 0$ ,  $f''(x) < 0$  se e solo se  $x < -1$  o  $x > 1$ ; quindi  $f$  è strettamente convessa su  $] - 1, 1[$ , strettamente concava su  $] - \infty, -1]$  e su  $]1, +\infty[$ ; quindi si ha

$$\mathcal{C}(\uparrow) = \{] - 1, 1[\}, \quad \mathcal{C}(\downarrow) = \{] - \infty, -1[, ]1, +\infty[\}, \quad \mathcal{C}(\dagger) = \emptyset.$$



6. **Esercizio.** Studiare la seguente funzione

$$f(x) = \frac{x^3 + 5}{x}$$

rispondendo alle seguenti domande:

## 8.5. STUDIO FUNZIONE

81

- (a) determinare il dominio di  $f$ ;  
 (b) calcolare i limiti di  $f$  nei punti frontiera del dominio  
 (c) determinare l'insieme degli intervalli non banali massimali sui quali  $f$  è strettamente crescente (risp. strettamente decrescente)  
 (d) determinare l'insieme degli intervalli non banali massimali sui quali  $f$  è strettamente convessa (risp. strettamente concava).

**Risoluzione.**

- (a) Si ha  $\text{dom}(f) = \mathbf{R}^*$ .  
 (b) Si ha  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$ ,  $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = -\infty$ ,  $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = +\infty$ ,  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ .  
 (c) Sia  $x \in \text{dom}(f)$ ; si ha  $f'(x) = 2x - 5x^{-2} = \frac{2x^3 - 5}{x^2}$ .

Si ha  $f'(x) = 0$  se e solo se  $x = \sqrt[3]{\frac{5}{2}}$ ,  $f'(x) > 0$  se e solo se  $x > \sqrt[3]{\frac{5}{2}}$ ,  
 $f'(x) < 0$  se e solo se  $x < \sqrt[3]{\frac{5}{2}}$ ; quindi  $f$  è strettamente crescente su  $[\sqrt[3]{\frac{5}{2}}, +\infty[$ ,  $f$  è strettamente decrescente su  $] -\infty, 0[$  e su  $]0, \sqrt[3]{\frac{5}{2}}]$ ; quindi si ha

$$\mathcal{M}(\nearrow) = \{[\sqrt[3]{\frac{5}{2}}, +\infty[), \quad \mathcal{M}(\searrow) = \{] -\infty, -0[, ]0, \sqrt[3]{\frac{5}{2}}]\},$$

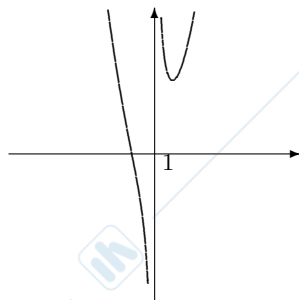
$$\mathcal{M}(\leftrightarrow) = \emptyset.$$

- (d) Sia  $x \in \text{dom}(f)$ ; si ha  $f''(x) = 2 + 10x^{-3} = \frac{2x^3 + 10}{x^3}$ .  
 Si ha  $f''(x) = 0$  se e solo se  $x = \sqrt[3]{-5}$ ,  $f''(x) > 0$  se e solo se  $x < -\sqrt[3]{5}$  o  $x > 0$ ,  $f''(x) < 0$  se e solo se  $-\sqrt[3]{5} < x < 0$ ; quindi  $f$  è strettamente convessa su  $] -\infty, -\sqrt[3]{5}]$  e su  $]0, +\infty[$ , strettamente concava su  $[-\sqrt[3]{5}, 0[$ ; quindi si ha

$$\mathcal{C}(\uparrow) = \{] -\infty, -\sqrt[3]{5}], ]0, +\infty[), \quad \mathcal{C}(\downarrow) = \{[-\sqrt[3]{5}, 0[),$$

$$\mathcal{C}(\updownarrow) = \emptyset.$$

Si ha  $\sqrt[3]{\frac{5}{2}} \approx 1.36$ ,  $f(\sqrt[3]{\frac{5}{2}}) \approx 5.53$ ,  $-\sqrt[3]{5} \approx -1.71$ ,  $f(-\sqrt[3]{5}) = 0$ . Si ottiene il seguente grafico.



7. **Esercizio.** Studiare la seguente funzione

$$f(x) = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x-1}},$$

rispondendo alle seguenti domande:

- determinare il dominio di  $f$ ;
- calcolare i limiti o i valori di  $f$  nei punti frontiera del dominio;
- determinare l'insieme degli intervalli non banali massimali sui quali  $f$  è strettamente crescente (risp. strettamente decrescente);
- studiare la derivabilità di  $f$  rispetto a  $\overline{\mathbf{R}}$  in 0;
- determinare l'insieme degli intervalli non banali massimali sui quali  $f$  è strettamente convessa (risp. strettamente concava).

Disegnare approssimativamente il grafico di  $f$ .

**Risoluzione.**

- (a) Il dominio di  $f$  è dato dalle  $x$  tali che  $\begin{cases} x \geq 0 \\ \sqrt{x-1} \neq 0 \end{cases}$  cioè tali che  $\begin{cases} x \geq 0 \\ \sqrt{x} \neq 1 \end{cases}$ , cioè tali che  $\begin{cases} x \geq 0 \\ x \neq 1 \end{cases}$ ; si ha quindi  $\text{dom}(f) = [0, 1[ \cup ]1, +\infty[$ .

- (b) Si ha  $f(0) = 0$ ,  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 1$ ,  $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = -\infty$ ,  $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = +\infty$ .

- (c) Sia  $x \in \text{dom}(f)$ ,  $x \neq 0$ ; si ha

$$f'(x) = \frac{\frac{1}{2\sqrt{x}}(\sqrt{x-1}) - \frac{1}{2\sqrt{x}}\sqrt{x}}{(\sqrt{x-1})^2} = \frac{\frac{\sqrt{x-1}-1}{\sqrt{x}}}{2(\sqrt{x-1})^2} = \frac{\sqrt{x-1}-1}{2\sqrt{x}(\sqrt{x-1})^2} = -\frac{1}{2\sqrt{x}(\sqrt{x-1})^2} < 0.$$

Quindi  $f$  è strettamente crescente su  $[0, 1[$  e su  $]1, +\infty[$ .

Si ha quindi

$$\mathcal{M}(\nearrow) = \emptyset, \mathcal{M}(\leftrightarrow) = \emptyset, \mathcal{M}(\searrow) = \{[0, 1[, ]1, +\infty[ \}.$$

- (d) Si ha

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x}}{x(\sqrt{x-1})} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt{x}(\sqrt{x-1})} = -\infty.$$

Quindi  $f$  è derivabile rispetto ad  $\overline{\mathbf{R}}$  in 0 e si ha  $f'(0) = -\infty$ .

- (e) Sia  $x \in \text{dom}(f)$ ,  $x \neq 0$ ; si ha

$$f''(x) = \frac{\frac{1}{2} \frac{\frac{1}{2\sqrt{x}}(\sqrt{x-1})^2 + \sqrt{x}2(\sqrt{x-1})\frac{1}{2\sqrt{x}}}{x(\sqrt{x-1})^4}}{(\sqrt{x-1})^2 + \sqrt{x-1}} = \frac{\frac{1}{2} \frac{\frac{\sqrt{x-1}-1}{\sqrt{x}} + \sqrt{x-1}}{x(\sqrt{x-1})^4}}{(\sqrt{x-1})^2 + \sqrt{x-1}} = \frac{\frac{1}{2} \frac{\frac{\sqrt{x-1}-1}{\sqrt{x}} + 1}{x(\sqrt{x-1})^3}}{\frac{1}{2} \frac{\sqrt{x-1} + 2\sqrt{x}}{x\sqrt{x}(\sqrt{x-1})^3}} = \frac{1}{2} \frac{3\sqrt{x}-1}{x\sqrt{x}(\sqrt{x-1})^3}.$$

Si ha  $f''(x) = 0$  se e solo se  $3\sqrt{x} - 1 = 0$ , cioè se e solo se  $\sqrt{x} = \frac{1}{3}$ , cioè se e solo se  $x = \frac{1}{9}$ . Si ha  $f''(x) > 0$  se e solo se  $0 < x < \frac{1}{9}$  o  $x > 1$ . Si ha  $f''(x) < 0$  se e solo se  $\frac{1}{9} < x < 1$ .

## 8.6. POLINOMIO DI TAYLOR

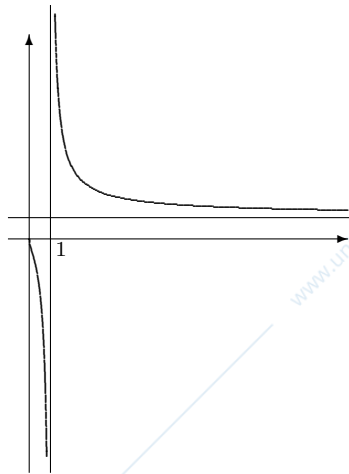
83

Quindi  $f$  è strettamente convessa su  $[0, \frac{1}{9}]$  e su  $]1, +\infty[$ ,  $f$  è strettamente concava su  $[\frac{1}{9}, 1[$ .

Quindi si ha

$$\mathcal{C}(\uparrow) = \left\{ \left[0, \frac{1}{9}\right], ]1, +\infty[ \right\}, \mathcal{C}(\updownarrow) = \emptyset, \mathcal{C}(\downarrow) = \left\{ \left[\frac{1}{9}, 1[ \right\}.$$

Si ha:  $\frac{1}{9} \approx .11$ ,  $f\left(\frac{1}{9}\right) = -\frac{1}{2} = -.5$ .



## 8.6 Polinomio di Taylor

1. **Esercizio.** Determinare il polinomio di Taylor di ordine 3 di punto iniziale 0 della seguente funzione

$$f(x) = e^x \sin x.$$

**Risoluzione.** Si ha

$$f'(x) = e^x \sin x + e^x \cos x,$$

$$f''(x) = e^x \sin x + e^x \cos x + e^x \cos x - e^x \sin x = 2e^x \cos x;$$

$$f'''(x) = 2e^x \cos x - 2e^x \sin x;$$

quindi si ha  $f(0) = 0$ ,  $f'(0) = 1$ ,  $f''(0) = 2$ ,  $f'''(0) = 2$ ; si ha quindi

$$T(h) = f(0) + f'(0)h + \frac{f''(0)}{2}h^2 + \frac{f'''(0)}{6}h^3 = h + h^2 + \frac{1}{3}h^3.$$

2. **Esercizio.** Determinare il polinomio di Taylor di  $f(x) = \sin x$  di ordine 4 e di punto iniziale  $\frac{\pi}{2}$ .

**Risoluzione.** Si ha  $f'(x) = \cos x$ ,  $f''(x) = -\sin x$ ,  $f'''(x) = -\cos x$ ,  $f^{(4)}(x) = \sin x$ ; quindi si ha  $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$ ,  $f'\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$ ,  $f''\left(\frac{\pi}{2}\right) = -1$ ,  $f'''\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$ ,  $f^{(4)}\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$ ; quindi, indicando con  $T(h)$  il polinomio di Taylor cercato, si ha

$$T(h) = f\left(\frac{\pi}{2}\right) + f'\left(\frac{\pi}{2}\right)h + \frac{1}{2}f''\left(\frac{\pi}{2}\right)h^2 + \frac{1}{6}f'''\left(\frac{\pi}{2}\right)h^3 + \frac{1}{24}f^{(4)}\left(\frac{\pi}{2}\right)h^4 = 1 - \frac{1}{2}h^2 + \frac{1}{24}h^4.$$

3. **Esercizio.** A partire dalla definizione, determinare il polinomio di Taylor di ordine 2 di punto iniziale 0 della funzione

$$f(x) = e^x + \sin x ;$$

verificare che tale polinomio soddisfa la proprietà di approssimabilità espressa dal teorema sulle proprietà del polinomio di Taylor.

**Risoluzione.** Si ha

$$f'(x) = e^x + \cos x, \quad f''(x) = e^x - \sin x;$$

quindi si ha  $f(0) = 1$ ,  $f'(0) = 2$ ,  $f''(0) = 1$ ; quindi, indicando con  $T(h)$  il polinomio di Taylor, si ha

$$T(h) = f(0) + f'(0)h + \frac{f''(0)}{2}h^2 = 1 + 2h + \frac{1}{2}h^2.$$

Il teorema sul polinomio di Taylor, applicato a questo caso, afferma che  $f(h) - T(h) \ll_{h \rightarrow 0} h^2$ . Applicando il teorema di de Hospital, si ha infatti

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h) - T(h)}{h^2} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^h + \sin h - 1 - 2h - \frac{1}{2}h^2}{h^2} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^h + \cos h - 2 - h}{2h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^h - \sin h - 1}{2} = 0.$$

## Capitolo 9

# Funzioni elementari reali

### 9.1 Funzione esponenziale reale

1. **Esercizio.** Sia  $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}, x \rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ ; dire quanto vale  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ .

**Risoluzione.** Per ogni  $x \in \mathbf{R}$  si ha  $f(x) = e^x$ ; quindi si ha  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$ .

2. **Esercizio.** Determinare gli  $a \in \mathbf{R}$  tali che

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \exp((2a + 1)x) = +\infty .$$

**Risoluzione.** Il limite è uguale a  $+\infty$  se e solo se  $2a + 1 > 0$ , cioè se e solo se  $a > -\frac{1}{2}$ .

3. **Esercizio.** Calcolare i seguenti limiti:

- (a)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3}{x^2+1} \log(1 - \frac{1}{x})$ ;  
 (b)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 \log \frac{1+x^2}{3+x^2}$ ;  
 (c)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} x \log \frac{2-x}{3-x}$ ;  
 (d)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x^2(1-\cos x) - 6x(x-\sin x)}{\sin x \operatorname{sh} x \log(1+x^4)}$ .

**Risoluzione.**

- (a) Si ha  $\frac{x^3}{x^2+1} \log(1 - \frac{1}{x}) \sim_{x \rightarrow +\infty} x(-\frac{1}{x}) = -\frac{1}{x^2} \rightarrow_{x \rightarrow +\infty} 0$ .  
 Quindi il limite è 0.

- (b) Si ha  
 $x^2 \log \frac{1+x^2}{3+x^2} = x^2 \log(1 + \frac{1+x^2}{3+x^2} - 1) = x^2 \log(1 + \frac{1+x^2-3-x^2}{3+x^2}) =$   
 $x^2 \log(1 + \frac{-2}{3+x^2}) \sim_{x \rightarrow +\infty} x^2(\frac{-2}{3+x^2}) = x^2 \frac{-2}{x^2} \sim_{x \rightarrow +\infty} -2$ .  
 Quindi si ha

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 \log \frac{1+x^2}{3+x^2} = -2 .$$

(c) Si ha

$$x \log \frac{2-x}{3-x} = x \log \left( 1 + \frac{2-x}{3-x} - 1 \right) = x \log \left( 1 + \frac{2-x-3+x}{3-x} \right) =$$

$$x \log \left( 1 + \frac{-1}{2-x} \right) \sim_{x \rightarrow +\infty} x \left( \frac{-1}{2-x} \right) = x \frac{-1}{x} \sim_{x \rightarrow +\infty} -1.$$

Quindi si ha

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x \log \frac{2-x}{3-x} = -1.$$

(d) Si ha

$$\sin x \operatorname{sh} x \log(1+x^4) \sim_{x \rightarrow 0} x^6.$$

Si ha

$$\cos x = 1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{24}x^4 + o(x^4),$$

$$1 - \cos x = \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{24}x^4 + o(x^4),$$

$$2x^2(1 - \cos x) = x^4 - \frac{1}{12}x^6 + o(x^6),$$

$$\sin x = x - \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{120}x^5 + o(x^5),$$

$$x - \sin x = \frac{1}{6}x^3 - \frac{1}{120}x^5 + o(x^5),$$

$$6x(x - \sin x) = x^4 - \frac{1}{20}x^6 + o(x^6),$$

$$2x^2(1 - \cos x) - 6x(x - \sin x) = -\frac{1}{12}x^6 + \frac{1}{20}x^6 + o(x^6) = \frac{-5+3}{60}x^6 + o(x^6) =$$

$$-\frac{1}{30}x^6 + o(x^6) \sim_{x \rightarrow 0} -\frac{1}{30}x^6.$$

Si ha quindi

$$\frac{2x^2(1 - \cos x) - 6x(x - \sin x)}{\sin x \operatorname{sh} x \log(1+x^4)} \sim_{x \rightarrow 0} -\frac{1}{30}.$$

Si ha quindi

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x^2(1 - \cos x) - 6x(x - \sin x)}{\sin x \operatorname{sh} x \log(1+x^4)} = -\frac{1}{30}.$$

4. **Esercizio.** Studiare la convergenza della seguente serie:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \log \frac{n^2 + 3}{n^2 + 1}.$$

**Risoluzione.** Si ha

$$\log \frac{n^2+3}{n^2+1} = \log \left( 1 + \frac{n^2+3}{n^2+1} - 1 \right) = \log \left( 1 + \frac{2}{n^2+1} \right) \sim_{n \rightarrow \infty} \frac{2}{n^2+1} \sim_{n \rightarrow \infty} \frac{2}{n^2}.$$

Quindi la serie è convergente.

## 9.2 Potenze di esponente reale

1. **Esercizio.** Calcolare i seguenti limiti:

(a)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \frac{x}{x^2+1} \right)^{\frac{x^2+1}{x}};$

(b)  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \left( \frac{x^2+1}{x} \right)^{\frac{x+1}{x}};$

(c)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \frac{1}{x} \right)^x;$

(d)  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left( \frac{3x+2}{2x+1} \right)^x.$

**Risoluzione.**

## 9.2. POTENZE DI ESPONENTE REALE

87

(a) Si ha  $\left(\frac{x}{x^2+1}\right)^{\frac{x^2+1}{x}} = e^{\frac{x^2+1}{x} \log \frac{x}{x^2+1}}$ .

Si ha  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x^2+1}{x} \log \frac{x}{x^2+1}\right) = -\infty$ .

Quindi il limite è 0.

(b) Si ha  $\left(\frac{x^2+1}{x}\right)^{\frac{x+1}{x}} = e^{\frac{x+1}{x} \log \frac{x^2+1}{x}}$ .

Si ha  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{x+1}{x} \log \frac{x^2+1}{x}\right) = +\infty$ .

Quindi il limite è  $+\infty$ .

(c) Si ha

$$\left(\frac{1}{x}\right)^x = e^{x \log \frac{1}{x}}$$

Si ha

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x \log \frac{1}{x} = -\infty.$$

Quindi si ha

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{x}\right)^x = 0.$$

(d) Si ha  $\left(\frac{3x+2}{2x+3}\right)^x = e^{\log \frac{3x+2}{2x+3}}$ .

Si ha

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} x \log \frac{3x+2}{2x+3} = -\infty.$$

Quindi si ha  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{3x+2}{2x+3}\right)^x = 0$ .

2. **Esercizio.** Calcolare i seguenti limiti:

(a)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x^2+1}{x^2-1}\right)^{\frac{x^2+1}{x}}$ ;

(b)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x+1}{x-1}\right)^x$ ;

(c)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x^2+3}{x^2-2}\right)^{x^2+x+1}$ .

**Risoluzione.**

(a) Si ha  $\left(\frac{x^2+1}{x^2-1}\right)^{\frac{x^2+1}{x}} = e^{\frac{x^2+1}{x} \log \frac{x^2+1}{x^2-1}}$ .

Si ha

$$\left(\frac{x^2+1}{x} \log \frac{x^2+1}{x^2-1}\right) \sim_{x \rightarrow +\infty} x \log\left(1 + \frac{x^2+1}{x^2-1} - 1\right) =$$

$$x \log\left(1 + \frac{2}{x^2-1}\right) \sim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x}{x^2-1} \sim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2}{x} \rightarrow_{x \rightarrow +\infty} 0.$$

Quindi il limite è 1.

(b) Per  $x$  appartenente al dominio della funzione, si ha  $\left(\frac{x+1}{x-1}\right)^x = e^{x \log \frac{x+1}{x-1}}$ .

Si ha

$$x \log \frac{x+1}{x-1} = x \log\left(1 + \frac{x+1}{x-1} - 1\right) =$$

$$x \log\left(1 + \frac{2}{x-1}\right) \sim_{x \rightarrow +\infty} x \frac{2}{x-1} \sim_{x \rightarrow +\infty} 2.$$

Quindi si ha

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x \log \frac{x+1}{x-1} = 2.$$

Quindi si ha

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{x \log \frac{x+1}{x-1}} = e^2.$$

(c) Si ha

$$\left(\frac{x^2+3}{x^2-2}\right)^{x^2+x+1} = e^{(x^2+x+1) \log \frac{x^2+3}{x^2-2}}.$$

Si ha

$$(x^2+x+1) \log \frac{x^2+3}{x^2-2} = (x^2+x+1) \log\left(1 + \frac{x^2+3}{x^2-2} - 1\right) =$$

$$(x^2+x+1) \log\left(1 + \frac{5}{x^2-2} - 1\right) \sim_{x \rightarrow +\infty} x^2 \frac{5}{x^2-2} \sim_{x \rightarrow +\infty} 5.$$

Quindi si ha

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x^2+3}{x^2-2}\right)^{x^2+x+1} = e^5.$$

**3. Esercizio.** Calcolare i seguenti limiti:

(a)  $\lim_{x \rightarrow 0} (\sin x)^x;$

(b)  $\lim_{x \rightarrow 0} x^{\log(1+x)};$

(c)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{\sqrt{x+1}}{\sqrt{x-1}}\right)^x.$

(d)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log(1+x^3) - \sin x^3}{\operatorname{ch} x - 1}.$

**Risoluzione.**(a) Si ha  $(\sin x)^x = e^{x \log \sin x}$ ; si ha  $\lim_{x \rightarrow 0} x \log \sin x = \lim_{x \rightarrow 0} x \log x = 0$ ; quindi si ha  $\lim_{x \rightarrow 0} (\sin x)^x = e^0 = 1$ .(b) Per  $x$  appartenente al dominio della funzione, si ha  $x^{\log(1+x)} = e^{\log(1+x) \log x}$ .

Si ha

$$\log(1+x) \log x \sim_{x \rightarrow 0} x \log x \rightarrow_{x \rightarrow 0} 0.$$

Quindi si ha

$$\lim_{x \rightarrow 0} x^{\log(1+x)} = e^0 = 1.$$

(c) Si ha

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{\sqrt{x+1}}{\sqrt{x-1}}\right)^x = \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{x \log \frac{\sqrt{x+1}}{\sqrt{x-1}}}.$$

Si ha

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x \log \frac{\sqrt{x+1}}{\sqrt{x-1}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} x \log \left(1 + \frac{\sqrt{x+1}}{\sqrt{x-1}} - 1\right) =$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x \log \left(1 + \frac{2}{\sqrt{x-1}}\right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x \frac{2}{\sqrt{x-1}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x}{\sqrt{x}} =$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} 2\sqrt{x} = +\infty.$$

Quindi si ha

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{x \log \frac{\sqrt{x+1}}{\sqrt{x-1}}} = +\infty.$$

## 9.3. FUNZIONI ESPONENZIALI DI BASE A

89

(d) Si ha  $\log(1+x^3) \sim_{x \rightarrow 0} x^3$ ,  $\sin x^3 \sim_{x \rightarrow 0} x^3$ ; quindi si ha  

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log(1+x^3) - \sin x^3}{\operatorname{ch} x - 1} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{O(x^3)}{\frac{x^2}{2}} = 0.$$

4. **Esercizio.** Studiare la convergenza della seguente serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sqrt{n}}{n^2 + 1}.$$

**Risoluzione.** Si ha  $\frac{\sqrt{n}}{n^2+1} \sim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n}}{n^2} = \frac{1}{n^{3/2}}$ .

9.3 Funzioni esponenziali di base  $a$ 

1. **Esercizio.** Determinare l'estremo superiore e l'estremo inferiore in  $\overline{\mathbf{R}}$  della seguente funzione:

$$f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}, x \rightarrow \left(\frac{1}{2}\right)^x.$$

**Risoluzione.** Si ha  $f(\mathbf{R}) = ]0, +\infty[$ ; quindi si ha  $\sup(f) = +\infty$ ,  $\inf f = 0$ .

2. **Esercizio.** Calcolare i seguenti limiti:

(a)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^{1000000} - 2^x}{x^{1000000} + 2^x};$

(b)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt[3]{x} - 5^x}{x^3 + 2^x};$

(c)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 + 3^x}{\log x - 3^x};$

(d)  $\lim_{x \rightarrow -\infty} (x^4 - x^2)2^x.$

**Risoluzione.**

(a) Si ha  $\frac{x^{1000000} - 2^x}{x^{1000000} + 2^x} \sim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-2^x}{2^x} = -1$ .

Quindi il limite è  $-1$ .

(b) Si ha  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt[3]{x} - 5^x}{x^3 + 2^x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-5^x}{2^x} = -\infty$ .

(c) Si ha  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 + 3^x}{\log x - 3^x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3^x}{-3^x} = -1$ .

(d) Si ha  $\lim_{x \rightarrow -\infty} (x^4 - x^2)2^x \lim_{x \rightarrow -\infty} x^4 2^x = 0$ .

3. **Esercizio.** Dare un esempio di una funzione  $f$  (non dipendente da  $n$ ) tale che

$$(\forall n \in \mathbf{N}^*) x^n \ll_{x \rightarrow +\infty} f(x) \ll_{x \rightarrow +\infty} 2^x;$$

motivare la risposta.

**Risoluzione.** Basta prendere  $f(x) = \left(\frac{3}{2}\right)^x$ . Per ogni  $n \in \mathbf{N}^*$  si ha infatti  $x^n \ll_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{3}{2}\right)^x$  in quanto ogni potenza di esponente strettamente positivo è trascurabile per  $x \rightarrow +\infty$  rispetto ad un esponenziale di base strettamente maggiore di 1 e si ha  $\left(\frac{3}{2}\right)^x \ll_{x \rightarrow +\infty} 2^x$  in quanto  $\frac{3}{2} < 1$ .

4. **Esercizio.** Dare un esempio di una funzione  $f$  (non dipendente da  $a$ ) tale che

$$(\forall a \in ]1, +\infty[) x^5 \ll_{x \rightarrow +\infty} f(x) \ll_{x \rightarrow +\infty} a^x ;$$

motivare la risposta.

**Risoluzione.** Basta prendere  $f(x) = x^6$ . Si ha infatti  $x^5 \ll_{x \rightarrow +\infty} x^6$  in quanto  $5 < 6$ ; per ogni  $a > 1$  si ha poi  $x^6 \ll_{x \rightarrow +\infty} a^x$  in quanto ogni potenza di esponente strettamente positivo è trascurabile per  $x \rightarrow +\infty$  rispetto ad un esponenziale di base strettamente maggiore di 1.

## 9.4 Funzioni circolari

1. **Esercizio.** Sia  $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}, x \rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$ ; dire quanto vale  $f(\frac{\pi}{2})$ .

**Risoluzione.** Per ogni  $x \in \mathbf{R}$  si ha  $f(x) = \sin x$ ; quindi si ha  $f(\frac{\pi}{2}) = \sin \frac{\pi}{2} = 1$ .

2. **Esercizio.** Sia  $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}, x \rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}$ ; che cosa si può dire sulla convergenza di  $f(x)$  per  $x \rightarrow +\infty$ ?

**Risoluzione.** Per ogni  $x \in \mathbf{R}$  si ha  $f(x) = \cos x$ ; quindi non esiste  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ .

3. **Esercizio.** Determinare  $\cos^2 \alpha$  sapendo che  $\operatorname{tg} \alpha = 3$ .

**Risoluzione.** Si ha  $\cos^2 \alpha = \frac{1}{1+\operatorname{tg}^2 \alpha} = \frac{1}{1+9} = \frac{1}{10}$ .

4. **Esercizio.** Calcolare i seguenti limiti:

(a)  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\operatorname{tg}^2 x}{x - \sin x}$ ;

(b)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\operatorname{Arctg} x + x}{\sqrt{x - \sin x}}$ .

**Risoluzione.**

(a) Si ha  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\operatorname{tg}^2 x}{x - \sin x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x^2}{\frac{1}{6}x^3} = \lim_{x \rightarrow 0^+} 6 \frac{1}{x} = +\infty$ .

(b) Si ha  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\operatorname{Arctg} x + x}{\sqrt{x - \sin x}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{\sqrt{x}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} x^{\frac{1}{2}} = +\infty$ .

5. **Esercizio.** Determinare l'estremo superiore e l'estremo inferiore in  $\overline{\mathbf{R}}$  della seguente funzione:

$$f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}, x \rightarrow \operatorname{Arctg} x .$$

**Risoluzione.** Si ha  $f(\mathbf{R}) = ] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} [$ ; quindi si ha  $\sup(f) = \frac{\pi}{2}$ ,  $\inf f = -\frac{\pi}{2}$ .

## 9.5 Funzioni elementari reali

1. **Esercizio.** Determinare il dominio naturale della seguente funzione

$$f(x) = \operatorname{Arcsin} \sqrt{\frac{x-1}{x+1}}.$$

**Risoluzione.** Il dominio naturale di  $f$  è dato dalle soluzioni del sistema

$$\begin{cases} x \neq -1 \\ \frac{x-1}{x+1} \geq 0 \\ -1 \leq \sqrt{\frac{x-1}{x+1}} \leq 1 \end{cases}.$$

Il sistema è equivalente a

$$\begin{cases} x < -1 \text{ o } x \geq 1 \\ \sqrt{\frac{x-1}{x+1}} \leq 1 \end{cases}, \text{ cioè a } \begin{cases} x < -1 \text{ o } x \geq 1 \\ \frac{x-1}{x+1} \leq 1 \end{cases}, \text{ cioè a } \begin{cases} x < -1 \text{ o } x \geq 1 \\ \frac{x-1}{x+1} - 1 \leq 0 \end{cases}, \text{ cioè} \\ \text{a } \begin{cases} x < -1 \text{ o } x \geq 1 \\ \frac{-2}{x+1} \leq 0 \end{cases}, \text{ cioè a } \begin{cases} x < -1 \text{ o } x \geq 1 \\ \frac{1}{x+1} \geq 0 \end{cases}, \text{ cioè a } \begin{cases} x < -1 \text{ o } x \geq 1 \\ x > -1 \end{cases}, \\ \text{cioè a } x \geq 1.$$

Quindi si ha  $\operatorname{dom}(f) = [1, +\infty[$ .

## 9.6 Massimi e minimi di funzioni

1. **Esercizio.** Dire se la seguente funzione ammette massimo e minimo e in caso affermativo determinarli:

$$f : [0, 1] \longrightarrow \mathbf{R}, x \longrightarrow \operatorname{Arcsin} x - x.$$

**Risoluzione.** Poichè  $f$  è continua e definita su un compatto,  $f$  ammette massimo e minimo.

Il massimo ed il minimo di  $f$  sono raggiunti nei punti di  $]0, 1[$  ove si annulla  $f'$  o su  $\{0, 1\}$ .

Sia  $x \in ]0, 1[$ ; si ha

$$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} - 1;$$

la relazione  $f'(x) = 0$  è equivalente a

$$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} - 1 = 0, \text{ cioè a } \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = 1, \text{ cioè a } 1 = \sqrt{1-x^2}, \text{ cioè a } 1 = 1 - x^2, \text{ cioè a } x = 0;$$

essendo  $x \in ]0, 1[$  si ha  $f'(x) \neq 0$ .

Quindi il massimo ed il minimo di  $f$  sono raggiunti su  $\{0, 1\}$ .

Si ha

$$f(0) = 0, f(1) = \frac{\pi}{2} - 1.$$

Quindi si ha  $\max(f) = \frac{\pi}{2} - 1$ ,  $\min(f) = 0$ .

2. **Esercizio.** Sia

$$f : \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \rightarrow \mathbf{R}, x \rightarrow \sin x + 2 \cos x ;$$

- (a) dire se  $f$  ammette massimo e se  $f$  ammette minimo;  
 (b) in caso affermativo, determinarli (risultato semplificato).

**Risoluzione.**

- (a) Poichè  $f$  è continua e definita su un compatto,  $f$  ammette massimo e minimo.  
 (b) Sia  $E$  l'insieme dei punti di massimo o di minimo di  $f$ .  
 Sia  $x \in ]0, \frac{\pi}{2}[$ ; si ha

$$f'(x) = \cos x - 2 \sin x ;$$

Si ha  $f'(x) = 0$  se e solo se  $\cos x - 2 \sin x = 0$ , cioè se e solo se  $\operatorname{tg} x = \frac{1}{2}$ ,  
 cioè, essendo  $x \in ]0, \frac{\pi}{2}[$ , se e solo se  $x = \operatorname{Arctg} \frac{1}{2}$ .

Si ha quindi

$$E \subset \left\{ \operatorname{Arctg} \frac{1}{2}, 0, \frac{\pi}{2} \right\} .$$

Si ha  $f(0) = 2$ ,  $f(\frac{\pi}{2}) = 1$ .

Si ha  $f(\operatorname{Arctg} \frac{1}{2}) = \sin \operatorname{Arctg} \frac{1}{2} + 2 \operatorname{Arctg} \frac{1}{2}$ .

Essendo  $0 < \operatorname{Arctg} \frac{1}{2} < \frac{\pi}{2}$ , si ha

$$\sin \operatorname{Arctg} \frac{1}{2} = \frac{\operatorname{tg} \operatorname{Arctg} \frac{1}{2}}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \operatorname{Arctg} \frac{1}{2}}} = \frac{\frac{1}{2}}{\sqrt{1 + \frac{1}{4}}} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{5}}{2}} = \frac{1}{\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}}{5}$$

$$\text{e } \cos \operatorname{Arctg} \frac{1}{2} = \frac{1}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \operatorname{Arctg} \frac{1}{2}}} = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{1}{4}}} = \frac{1}{\frac{\sqrt{5}}{2}} = \frac{2}{\sqrt{5}} = \frac{2\sqrt{5}}{5} .$$

Si ha quindi  $f(\operatorname{Arctg} \frac{1}{2}) = \frac{\sqrt{5}}{5} + \frac{4}{5}\sqrt{5} = \sqrt{5}$ .

Quindi si ha  $\max(f) = \sqrt{5}$ ,  $\min(f) = 1$ .

3. **Esercizio.** Sia  $f : \mathbf{R}^* \rightarrow \mathbf{R}, x \rightarrow \sin \frac{1}{x^2}$ ;

- (a) dire se  $f$  ammette massimo e se  $f$  ammette minimo;  
 (b) in caso affermativo determinarli.

**Risoluzione.** Posto  $g : \mathbf{R}^* \rightarrow \mathbf{R}, x \rightarrow \frac{1}{x^2}$  e  $h : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}, y \rightarrow \sin y$ , si ha  $f = h \circ g$ . Quindi si ha  $f(\mathbf{R}^*) = h(g(\mathbf{R}^*)) = h(]0, +\infty[) = [-1, 1]$ . Quindi  $f$  ammette massimo e minimo e si ha  $\max(f) = 1$  e  $\min(f) = -1$ .

4. **Esercizio.** Sia

$$A = \{2^x; x \in ]-\infty, 0]\} ;$$

dire se  $A$  ammette massimo e se  $A$  ammette minimo; determinare l'estremo superiore e l'estremo inferiore di  $A$  rispetto a  $\mathbf{R}$ .

**Risoluzione.** Posto

$$f : ]-\infty, 0] \rightarrow \mathbf{R}, x \rightarrow 2^x ,$$

si ha  $A = f(]-\infty, 0])$ . Quindi si ha  $A = ]0, 1]$ . Quindi  $A$  ammette massimo e si ha  $\max(A) = 1$ ;  $A$  non ammette minimo; si ha  $\sup(A) = 1$ ,  $\inf(A) = 0$ .

## 9.7 Equazioni reali

1. **Esercizio.** Assegnate le funzioni

(a)  $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}, x \rightarrow x + e^x,$

(b)  $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}, x \rightarrow e^x + \sin x,$

dire se l'equazione di incognita  $x$

$$f(x) = 0$$

ammette almeno una soluzione; in tal caso determinare  $a, b \in \mathbf{R}$ , con  $a < b$  tali che nell'intervallo  $]a, b[$  vi sia almeno una soluzione dell'equazione.

**Risoluzione.**

(a) Si ha  $f(0) = 1 > 0$  e  $f(-1) = -1 + e^{-1} < 0$ ; per il teorema degli zeri di una funzione continua, esiste  $x \in ]-1, 0[$  tale che  $f(x) = 0$ .

(b) Si ha  $f(0) = 1 > 0$  e  $f(-\frac{\pi}{4}) = e^{-\frac{\pi}{4}} - 1 < 0$ ; per il teorema degli zeri di una funzione continua, esiste  $x \in ]-\frac{\pi}{2}, 0[$  tale che  $f(x) = 0$ .

## 9.8 Limiti

1. **Esercizio.** Calcolare i seguenti limiti:

(a)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sin^2 x}{x};$

(b)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin x}{x^2 \operatorname{tg} x};$

(c)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x + \sin x}{2x - \cos x};$

(d)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\log x + x}{\sin x + 2x};$

(e)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\log x + \operatorname{sh} x}{\operatorname{Arctg} x - x};$

(f)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \operatorname{sh} x}{\log(1+x)(\operatorname{ch} x - 1)};$

(g)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\log x + \operatorname{ch} x}{e^x + \operatorname{Arctg} x};$

(h)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1000\sqrt{x} - \log x}{1000\sqrt{x} + \log x};$

(i)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 x - 2 + 2 \cos x}{\operatorname{Arctg} x(x - \sin x)};$

(j)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \sin x + 2 \cos x - 2}{\log^2(1 + \sin^2 x)};$

(k)  $\lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\operatorname{tg} x}{e^x - e^\pi};$

(l)  $\lim_{x \rightarrow -\infty} (|x|^{\frac{5}{2}} + x^3) \operatorname{Arctg} \frac{x^2 - x^3}{x^2 + 5};$

(m)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\log \sqrt{x} + \sin x^2 + x^2 e^{-x}}{\log(x^2 + 1) + \cos x};$

(n)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x + e^{2x} - e^{3x}}{3 \log \cos x}.$

**Risoluzione.**

(a) Si ha  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sin^2 x}{x} = 0$  in quanto la funzione  $\sin^2 x$  è limitata e la funzione  $x$  tende a  $+\infty$  per  $x \rightarrow +\infty$ .

(b) Si ha  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin x}{x^2 \operatorname{tg} x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{x^3}{6}}{x^3} = \frac{1}{6}$

(c) Si ha  
 $\frac{x + \sin x}{2x - \cos x} \sim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{2x} = \frac{1}{2}$ .  
 Quindi si ha

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x + \sin x}{2x - \cos x} = \frac{1}{2}.$$

(d) Si ha  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\log x + x}{\sin x + 2x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{2x} = \frac{1}{2}$ .

(e) Si ha  
 $\frac{\log x + \operatorname{sh} x}{\operatorname{Arctg} x - x} \sim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\operatorname{sh} x}{-x} = -\frac{e^x - e^{-x}}{2} \sim_{x \rightarrow +\infty} -\frac{1}{2} \frac{e^x}{x}$ .  
 Si ha quindi  
 $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\log x + \operatorname{sh} x}{\operatorname{Arctg} x - x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(-\frac{1}{2} \frac{e^x}{x}\right) = -\infty$ .

(f) Si ha  
 $\frac{x - \operatorname{sh} x}{\log(1+x)(\operatorname{ch} x - 1)} \sim_{x \rightarrow 0} \frac{-\frac{x^3}{6}}{x \left(\frac{x^2}{2}\right)} = -\frac{1}{3}$ .  
 Quindi si ha

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \operatorname{sh} x}{\log(1+x)(\operatorname{ch} x - 1)} = -\frac{1}{3}.$$

(g) Si ha  
 $\frac{\log x + \operatorname{ch} x}{e^x + \operatorname{Arctg} x} \sim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\operatorname{ch} x}{e^x} = \frac{\frac{1}{2} e^x}{e^x} = \frac{1}{2}$ .  
 Quindi si ha

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log x + \operatorname{ch} x}{e^x - \operatorname{Arctg} x} = \frac{1}{2}.$$

(h) Si ha

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1000\sqrt{x} - \log x}{1000\sqrt{x} + \log x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^{\frac{1}{1000}} - \log x}{x^{\frac{1}{1000}} + \log x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^{\frac{1}{1000}}}{x^{\frac{1}{1000}}} = 1.$$

(i) Si ha  
 $\operatorname{Arctg} x(x - \sin x) \sim_{x \rightarrow 0} x \frac{1}{6} x^3 = \frac{1}{6} x^4$ ,

$$\sin x = x - \frac{1}{6} x^3 + o(x^3),$$

$$\sin^2 = x^2 - \frac{1}{3} x^4 + o(x^4),$$

$$\cos x = 1 - \frac{1}{2} x^2 + \frac{1}{24} x^4 + o(x^4),$$

$$2 \cos x = 2 - x^2 + \frac{1}{12} x^4 + o(x^4),$$

$$\sin^2 x - 2 - 2 \cos x = x^2 - \frac{1}{3} x^4 - 2 + 2 - x^2 + \frac{1}{12} x^4 + o(x^4) = -\frac{1}{4} x^4 + o(x^4) \sim_{x \rightarrow 0} -\frac{1}{4} x^4,$$

$$\frac{\sin^2 x - 2 + 2 \cos x}{\operatorname{Arctg} x(x - \sin x)} \sim_{x \rightarrow 0} \frac{-\frac{1}{4} x^4}{\frac{1}{6} x^4} = -\frac{3}{2}.$$

Quindi si ha

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 x - 2 + 2 \cos x}{\operatorname{Arctg} x(x - \sin x)} = -\frac{5}{2}.$$

(j) Si ha

$$\log^2(1 + \sin^2 x) \sim_{x \rightarrow 0} (\sin^2 x)^2 \sim_{x \rightarrow 0} x^4.$$

Si ha

$$\sin x = x - \frac{1}{6}x^3 + o(x^3),$$

$$x \sin x = x^2 - \frac{1}{6}x^4 + o(x^4),$$

$$\cos x = 1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{24}x^4 + o(x^4),$$

$$2 \cos x = 2 - x^2 + \frac{1}{12}x^4 + o(x^4),$$

$$x \sin x + 2 \cos x - 2 = x^2 - \frac{1}{6}x^4 + 2 - x^2 + \frac{1}{12}x^4 - 2 + o(x^4) =$$

$$-\frac{1}{12}x^4 + o(x^4) \sim_{x \rightarrow 0} -\frac{1}{12}x^4.$$

Quindi si ha

$$\frac{x \sin x + 2 \cos x - 2}{\log^2(1 + \sin^2 x)} \sim_{x \rightarrow 0} \frac{-\frac{1}{12}x^4}{x^4} = -\frac{1}{12}.$$

Quindi si ha

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \sin x + 2 \cos x - 2}{\log^2(1 + \sin^2 x)} = -\frac{1}{12}.$$

(k) Risolviamo l'esercizio in due modi.

i. Primo modo.

Poniamo  $y = \pi - x$ ; si ha  $x = y + \pi$ ; si ha  $\lim_{x \rightarrow \pi} (x - \pi) = 0$ ; si ha quindi

$$\lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\operatorname{tg} x}{e^x - e^\pi} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg}(y + \pi)}{e^{y+\pi} - e^\pi} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} y}{e^y e^\pi - e^\pi} =$$

$$\lim_{y \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} y}{e^\pi (e^y - 1)} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{y}{e^\pi y} = \frac{1}{e^\pi} = e^{-\pi}.$$

ii. Secondo modo.

Il limite è della forma  $\frac{0}{0}$ . Per il teorema di De l'Hospital si ha

$$\lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\operatorname{tg} x}{e^x - e^\pi} = \lim_{x \rightarrow \pi} \frac{1 + \operatorname{tg}^2 x}{e^x} = \frac{1}{e^\pi} = e^{-\pi}.$$

(l) Si ha

$$|x|^{\frac{5}{2}} + x^3 \sim_{x \rightarrow -\infty} x^3.$$

Si ha

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2 - x^3}{x^2 + 5} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-x^3}{x^2} = \lim_{x \rightarrow -\infty} (-x) = +\infty.$$

Si ha quindi

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \operatorname{Arctg} \frac{x^2 - x^3}{x^2 + 5} = \frac{\pi}{2}.$$

$$\text{Si ha quindi } \operatorname{Arctg} \frac{x^2 - x^3}{x^2 + 5} \sim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\pi}{2}.$$

$$\text{Si ha quindi } \lim_{x \rightarrow -\infty} (|x|^{\frac{5}{2}} + x^3) \operatorname{Arctg} \frac{x^2 - x^3}{x^2 + 5} = \lim_{x \rightarrow -\infty} x^3 \frac{\pi}{2} = -\infty.$$

(m) Si ha

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\log \sqrt{x + \sin x^2 + x^2} e^{-x}}{\log(x^2 + 1) + \cos x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\log \sqrt{x}}{\log(x^2 + 1)} =$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\log \sqrt{x}}{\log x^2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{1}{2} \log \sqrt{x}}{2 \log x} = \frac{1}{4}.$$

(n) Si ha  
 $3 \log \cos x = 3 \log(1 + \cos x - 1) \sim_{x \rightarrow 0} 3(\cos x - 1) \sim_{x \rightarrow 0} 3(-\frac{x^2}{2}) = -\frac{3}{2}x^2$ .  
 Per  $y \rightarrow 0$  si ha  
 $e^y = 1 + y + \frac{1}{2}y^2 + o(y^2)$ .  
 Si ha quindi  
 $e^{2x} = 1 + 2x + \frac{1}{2}(2x)^2 + o(x^2) = 1 + 2x + 2x^2 + o(x^2)$   
 e  
 $e^{3x} = 1 + 3x + \frac{1}{2}(3x)^2 + o(x^2) = 1 + 3x + \frac{9}{2}x^2 + o(x^2)$ .  
 Si ha quindi  
 $x + e^{2x} - e^{3x} = x + 1 + 2x + 2x^2 + o(x^2) - 1 - 3x - \frac{9}{2}x^2 = -\frac{5}{2}x^2 + o(x^2) \sim_{x \rightarrow 0} -\frac{5}{2}x^2$ .  
 Si ha quindi  
 $\frac{x + e^{2x} - e^{3x}}{3 \log \cos x} \sim_{x \rightarrow 0} \frac{-\frac{5}{2}x^2}{-\frac{3}{2}x^2} = \frac{5}{3}$ .  
 Si ha quindi  
 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x + e^{2x} - e^{3x}}{3 \log \cos x} = \frac{5}{3}$

2. **Esercizio.** Calcolare il seguente limite:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{n^2 - 1}{n^2 + 3n} \right)^n.$$

**Risoluzione.** Si ha  
 $\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{n^2 - 1}{n^2 + 3n} \right)^n = \lim_{n \rightarrow \infty} e^{n \log \frac{n^2 - 1}{n^2 + 3n}}$ .

Si ha  
 $\lim_{n \rightarrow \infty} n \log \frac{n^2 - 1}{n^2 + 3n} = \lim_{n \rightarrow \infty} n \log \left( 1 + \frac{n^2 - 1}{n^2 + 3n} - 1 \right) =$   
 $\lim_{n \rightarrow \infty} n \log \left( 1 + \frac{-1 - 3n}{n^2 + 3n} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} n \frac{-1 - 3n}{n^2 + 3n} = \lim_{n \rightarrow \infty} n \frac{-3n}{n^2} = -3$ .

Si ha quindi  
 $\lim_{n \rightarrow \infty} e^{n \log \frac{n^2 - 1}{n^2 + 3n}} = e^{-3} = \frac{1}{e^3}$ .

3. **Esercizio.** Sia  $\alpha \in \mathbf{R}$ ; calcolare, in funzione di  $\alpha$ , il seguente limite:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{2x(e^x - 1) - 2 \operatorname{Arctg} x^2 - x^3}{x^\alpha}.$$

**Risoluzione.** Per  $x \rightarrow 0^+$ , si ha  
 $e^x = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3 + o(x^3)$ ; quindi  
 $e^x - 1 = x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3 + o(x^3)$ ; quindi  
 $2x(e^x - 1) = 2x^2 + x^3 + \frac{1}{3}x^4 + o(x^4)$ .

Per  $y \rightarrow 0^+$ , si ha  
 $\operatorname{Arctg} y = y + o(y^2)$ ; quindi per  $x \rightarrow 0^+$  si ha  
 $\operatorname{Arctg} x^2 = x^2 + o(x^4)$ ; quindi  $2 \operatorname{Arctg} x^2 = 2x^2 + o(x^4)$ .

## 9.9. SERIE

97

Quindi per  $x \rightarrow 0+$  si ha

$$2x(e^x - 1) - 2 \operatorname{Arctg} x^2 - x^3 = 2x^2 + x^3 + \frac{1}{3}x^4 o(x^4) - 2x^2 - x^3 = \frac{1}{3}x^4 + o(x^4) \sim_{x \rightarrow 0+} \frac{1}{3}x^4.$$

Si ha quindi

$$\lim_{x \rightarrow 0+} \frac{2x(e^x - 1) - 2 \operatorname{Arctg} x^2 - x^3}{x^\alpha} = \lim_{x \rightarrow 0+} \frac{\frac{1}{3}x^4}{x^\alpha} = \lim_{x \rightarrow 0+} \frac{1}{3}x^{4-\alpha} = \begin{cases} \frac{1}{3} & \text{per } \alpha = 4 \\ 0 & \text{per } \alpha < 4 \\ +\infty & \text{per } \alpha > 4 \end{cases}.$$

4. **Esercizio.** Dire se esiste il seguente limite (cioè se la funzione è convergente per  $x \rightarrow 0$ ) e, in caso affermativo, determinarlo:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{2x} - \cos x}{\sin |x|}.$$

**Risoluzione.** Si ha

$$\sin |x| \sim_{x \rightarrow 0} |x|.$$

Per  $y \rightarrow 0$  si ha

$$e^y = 1 + y + o(y).$$

Si ha quindi

$$e^{2x} = 1 + 2x + o(x).$$

Si ha

$$\cos x = 1 + o(x).$$

Si ha quindi

$$e^{2x} - \cos x = 1 + 2x + o(x) - 1 = 2x + o(x) \sim_{x \rightarrow 0} 2x.$$

Si ha quindi

$$\frac{e^{2x} - \cos x}{\sin |x|} \sim_{x \rightarrow 0} \frac{2x}{|x|}.$$

Le due funzioni sono equivalenti anche per  $x \rightarrow 0+$  e per  $x \rightarrow 0-$

Si ha quindi

$$\lim_{x \rightarrow 0+} \frac{e^{2x} - \cos x}{\sin |x|} = \lim_{x \rightarrow 0+} \frac{2x}{|x|} = \lim_{x \rightarrow 0+, x > 0} \frac{2x}{x} = 2$$

e

$$\lim_{x \rightarrow 0-} \frac{e^{2x} - \cos x}{\sin |x|} = \lim_{x \rightarrow 0-} \frac{2x}{|x|} = \lim_{x \rightarrow 0-, x < 0} \frac{2x}{-x} = -2.$$

Essendo il limite destro diverso dal limite sinistro, la funzione non è convergente per  $x \rightarrow 0$ .

## 9.9 Serie

1. Studiare la convergenza delle seguenti serie:

(a)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n - n}{n^2};$

(b)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n - \sqrt{n}}{n + \operatorname{Arctg} n}.$

- (c)  $\sum_{n=1}^{\infty} \left( \sqrt{\frac{1}{n}} - \sin \sqrt{\frac{1}{n}} \right)$ .
- (d)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \sqrt{\sin \frac{1}{n}}$ ;
- (e)  $\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{\operatorname{sh} \frac{1}{n} - \frac{1}{n}}$ ;
- (f)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\log n)^n}{e^{n^2}}$ ;
- (g)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n + 3n}{(n+1)^2 + 3} e^{\frac{1}{n}}$ ;
- (h)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2 + (-1)^n + n}{n^3 + n \log^2 n}$ ;
- (i)  $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\log^n n}$ ;
- (j)  $\sum_{n=1}^{\infty} \left( e^{\frac{1}{n^2}} - \cos \frac{1}{n} \right)$ .

**Risoluzione.**

- (a) Si ha  $\frac{\sin n - n}{n^2} \sim_{n \rightarrow \infty} \frac{-n}{n^2} = -\frac{1}{n}$ .  
Quindi la serie assegnata è divergente negativamente.
- (b) Si ha  $\frac{n - \sqrt{n}}{n + \operatorname{Arctg} n} \sim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n} = 1$ ; quindi la serie è divergente positivamente.
- (c) Si ha  $\sqrt{\frac{1}{n}} - \sin \sqrt{\frac{1}{n}} \sim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{6} \left( \sqrt{\frac{1}{n}} \right)^3 = \frac{1}{6n^{\frac{3}{2}}}$ ; quindi la serie è convergente.
- (d) Si ha  $\frac{1}{n} \sqrt{\sin \frac{1}{n}} \sim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sqrt{\frac{1}{n}} = \frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$ ; quindi la serie è convergente.
- (e) Si ha  $\sqrt{\operatorname{sh} \frac{1}{n} - \frac{1}{n}} \sim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{\frac{1}{6} \frac{1}{n^3}} = \frac{1}{\sqrt{6}} \frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$ .  
Quindi la serie è convergente.
- (f) Si ha

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{(\log n)^n}{e^{n^2}}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\left( \frac{\log n}{e^n} \right)^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log n}{e^n} = 0.$$

Quindi per il criterio della radice, la serie è convergente.

- (g) Si ha  $\frac{(-1)^n + 3n}{(n+1)^2 + 3} e^{\frac{1}{n}} \sim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n}{(n+1)^2} \cdot 1 = \frac{3n}{n^2} = \frac{3}{n}$ .  
Quindi la serie è divergente positivamente.
- (h) Si ha  $\frac{n^2 + (-1)^n + n}{n^3 + n \log^2 n} \sim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2}{n^3} = \frac{1}{n}$ .  
Quindi la serie è divergente positivamente.
- (i) Si ha  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{1}{\log^n n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\log^n n} = 0$ .  
Quindi per il criterio della radice la serie è convergente.

## 9.9. SERIE

99

(j) Per  $x \rightarrow 0$ , si ha  
 $e^x = 1 + x + o(x)$

e  
 $\cos x = 1 - \frac{1}{2}x^2 + o(x^2)$ .

Si ha quindi  $e^{\frac{1}{n^2}} = 1 + \frac{1}{n^2} + o(\frac{1}{n^2})$

e  
 $\cos \frac{1}{n} = 1 - \frac{1}{2} \frac{1}{n^2} + o(\frac{1}{n^2})$ .

Si ha quindi

$e^{\frac{1}{n^2}} - \cos \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{n^2} + o(\frac{1}{n^2}) - 1 + \frac{1}{2n^2} = \frac{3}{2} \frac{1}{n^2} + o(\frac{1}{n^2}) \sim_{n \rightarrow \infty} \frac{3}{2} \frac{1}{n^2}$ .

Essendo  $2 > 1$ , la serie è convergente.

2. **Esercizio.** Studiare la convergenza della seguente serie:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n n + \log n}{n^2 + 3 \log n}.$$

**Suggerimento.** Non essendo la serie a termini positivi, non si può usare il criterio del confronto; ci si può ricondurre in altra maniera ad una serie nota. ]

**Risoluzione.** Si ha

$$\frac{(-1)^n n + \log n}{n^2 + 3 \log n} = (-1)^n \frac{1}{n} + \frac{(-1)^n n + \log n}{n^2 + 3 \log n} - (-1)^n \frac{1}{n} =$$

$$(-1)^n \frac{1}{n} + \frac{(-1)^n n^2 + n \log n - (-1)^n n^2 - 3(-1)^n \log n}{n(n^2 + 3 \log n)} =$$

$$(-1)^n \frac{1}{n} + \frac{n \log n - 3(-1)^n \log n}{n(n^2 + 3 \log n)}.$$

Si ha

$$\left| \frac{n \log n - 3(-1)^n \log n}{n(n^2 + 3 \log n)} \right| \sim_{n \rightarrow \infty} \frac{n \log n}{n^3} = \frac{\log n}{n^2} \ll_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}.$$

Quindi la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n \log n - 3(-1)^n \log n}{n(n^2 + 3 \log n)}$$

è assolutamente convergente.

La serie  $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n}$  è convergente per il criterio di Leibniz; quindi la serie assegnata è convergente.

## 9.10 Derivabilità e derivate

1. **Esercizio.** Calcolare la derivata delle seguenti funzioni

(a)  $f(x) = x^3 \operatorname{Arctg} \frac{1}{x}$ ;

(b)  $f(x) = x^{\cos x}$ ;

(c)  $f(x) = \frac{\log \operatorname{Arctg}(5x)}{\sin \sqrt{\log x}}$ ,

(d)  $f(x) = \log \cos \operatorname{Arcsin} \sqrt{\frac{1}{x}}$ ;

(e)  $f(x) = x^{\frac{1}{x}}$ ;

(f)  $f(x) = \operatorname{Arctg} \sqrt{\operatorname{sh} x}$ ;

(g)  $f(x) = \sqrt[3]{\operatorname{Arctg} \log^2(2^x + \operatorname{sh} x)}$ ;

(h)  $f(x) = (\sin x)^{\operatorname{Arctg} x}$ ;

(i)  $f(x) = 2^x \log x \operatorname{ch} x$ ;

(j)  $f(x) = \sin \log(x^3 + 1)$ ;

(k)  $f(x) = \log_5(x^2 \operatorname{tg}^3 x)$ .

**Risoluzione.**

(a) Si ha

$$f'(x) = 3x^2 \operatorname{Arctg} \frac{1}{x} + x^3 \frac{1}{1 + (\frac{1}{x})^2} \left(-\frac{1}{x^2}\right).$$

(b) Si ha  $f(x) = e^{\cos x \log x}$ ; quindi si ha

$$f'(x) = e^{\cos x \log x} \left(-\sin x \log x + \cos x \frac{1}{x}\right).$$

(c) Si ha

$$f'(x) = \frac{\frac{1}{\operatorname{Arctg}(5x)} \frac{1}{1+(5x)^2} 5 \sin \sqrt{\log x} - \log \operatorname{Arctg}(5x) \cos \sqrt{\log x} \frac{1}{2\sqrt{\log x}} \frac{1}{x}}{\sin^2 \sqrt{\log x}}.$$

(d) Si ha

$$f'(x) = \frac{1}{\cos \operatorname{Arcsin} \sqrt{\frac{1}{x}}} \left(-\sin \operatorname{Arcsin} \sqrt{\frac{1}{x}}\right) \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{1}{x}}} \frac{1}{2\sqrt{\frac{1}{x}}} \left(-\frac{1}{x^2}\right).$$

(e) Si ha  $f(x) = e^{\frac{1}{x} \log x}$ ; quindi si ha

$$f'(x) = e^{\frac{1}{x} \log x} \frac{\frac{1}{x} x - \log x}{x^2} = x^{\frac{1}{x}} \frac{1 - \log x}{x^2}.$$

## 9.10. DERIVABILITÀ E DERIVATE

101

(f) Si ha

$$f'(x) = \frac{1}{1 + \operatorname{sh} x} \frac{1}{2\sqrt{\operatorname{sh} x}} \operatorname{ch} x.$$

(g) Si ha

$$f'(x) = \frac{1}{3 \sqrt{(\operatorname{Arctg} \log^2(2^x + \operatorname{sh} x))^2}} \frac{1}{1 + \log^4(2^x + \operatorname{sh} x)} 2 \log(2^x + \operatorname{sh} x) \frac{1}{2^x + \operatorname{sh} x} (2^x \log 2 + \operatorname{ch} x).$$

(h) Si ha  $f(x) = e^{\operatorname{Arctg} x \log \sin x}$ ; quindi si ha

$$f'(x) = e^{\operatorname{Arctg} x \log \sin x} \left( \frac{1}{1+x^2} \log \sin x + \operatorname{Arctg} x \frac{1}{\sin x} \cos x \right) = (\sin x)^{\operatorname{Arctg} x} \left( \frac{\log \sin x}{1+x^2} + \operatorname{Arctg} x \frac{\cos x}{\sin x} \right).$$

(i) Si ha

$$f'(x) = 2^x \log 2 \log x \operatorname{ch} x + 2^x \frac{1}{x} \operatorname{ch} x + 2^x \log x \operatorname{sh} x.$$

(j) Si ha  $f'(x) = \cos \log(x^3 + 1) \frac{1}{x^3+1} 3x^2$ .

(k) Si ha

$$f'(x) = \frac{1}{x^2 \operatorname{tg}^3 x} \frac{1}{\log 5} (2x \operatorname{tg}^3 x + x^2 3 \operatorname{tg}^2 x \frac{1}{\cos^2 x}).$$

2. **Esercizio.** Determinare il dominio naturale delle seguenti funzioni  $f$  reali di variabile reale definite naturalmente; determinare l'insieme degli  $x \in \operatorname{dom}(f)$  nei quali  $f$  è derivabile rispetto a  $\overline{\mathbf{R}}$  e in tali  $x$  calcolare la derivata rispetto a  $\overline{\mathbf{R}}$ .

(a)  $f(x) = 2^x \operatorname{Arctg} \sqrt{x}$ ;

(b)  $f(x) = 3^x \operatorname{Arcsin}(\log x + 1)$ ;

(c)  $f(x) = \sqrt[6]{\operatorname{Arctg} x^2}$ ;

(d)  $f(x) = \sin(x^2 \sqrt{\cos x})$ ;

(e)  $f(x) = \cos(x^2 \sqrt{\cos(5x)})$ ;

(f)  $f(x) = \operatorname{Arcsin} \frac{x^2-1}{x^2+1}$ .

**Risoluzione.**(a) Si ha  $\operatorname{dom}(f) = [0, +\infty[$ .Per  $x > 0$  si ha

$$f'(x) = 2^x \log 2 \operatorname{Arctg} \sqrt{x} + 2^x \frac{1}{1+x} \frac{1}{2\sqrt{x}}.$$

Si ha  $\lim_{x \rightarrow 0, x > 0} f'(x) = +\infty$ ; quindi  $f$  è derivabile rispetto a  $\overline{\mathbf{R}}$  in 0 e  $f'(0) = +\infty$

- (b) Il dominio di  $f$  è dato dagli  $x \in \mathbf{R}$  tali che  $\begin{cases} x > 0 \\ -1 \leq \log x + 1 \leq 1 \end{cases}$ , cioè tali che  $\begin{cases} x > 0 \\ -2 \leq \log x \leq 0 \end{cases}$ , cioè tali che  $\begin{cases} x > 0 \\ e^{-2} \leq x \leq 1 \end{cases}$ , cioè tali che  $e^{-2} \leq x \leq 1$ ; si ha quindi

$$\text{dom}(f) = [e^{-2}, 1].$$

Per  $x \in ]e^{-2}, 1[$  si ha

$$f'(x) = 3^x \log 3 \operatorname{Arcsin}(\log x + 1) + 3^x \frac{1}{\sqrt{1 - (\log x + 1)^2}} \frac{1}{x}.$$

Si ha  $\lim_{x \rightarrow e^{-2}} f'(x) = +\infty$ ; quindi  $f$  è derivabile rispetto a  $\overline{\mathbf{R}}$  in  $e^{-2}$  e  $f'(e^{-2}) = +\infty$ .

Si ha  $\lim_{x \rightarrow 1} f'(x) = +\infty$ ; quindi  $f$  è derivabile rispetto a  $\overline{\mathbf{R}}$  in 1 e  $f'(1) = +\infty$ .

- (c) Si ha  $\text{dom}(f) = \mathbf{R}$ .

Per  $x \in \mathbf{R}$ ,  $x \neq 0$ ;  $f$  è derivabile in  $x$  e si ha

$$f'(x) = \frac{1}{6 \sqrt[6]{\operatorname{Arctg}^5 x^2}} \frac{1}{1 + x^4} 2x = \frac{x}{3(1 + x^4) \sqrt[6]{\operatorname{Arctg}^5 x^2}}.$$

Consideriamo la derivabilità di  $f$  in 0; si ha

$$\lim_{x \rightarrow 0, x \neq 0} f'(x) = \lim_{x \rightarrow 0, x \neq 0} \frac{x}{3(1 + x^4) \sqrt[6]{\operatorname{Arctg}^5 x^2}} = \lim_{x \rightarrow 0, x \neq 0} \frac{x}{3x^{\frac{5}{3}}} = \lim_{x \rightarrow 0, x \neq 0} \frac{1}{3} x^{-\frac{2}{3}} = +\infty.$$

Quindi  $f$  è derivabile rispetto a  $\overline{\mathbf{R}}$  in 0 e  $f'(0) = +\infty$ .

- (d) Il dominio di  $f$  è dato dagli  $x \in \mathbf{R}$  tali che  $\cos x \geq 0$ , quindi dagli  $x \in \mathbf{R}$  per i quali esiste  $k \in \mathbf{Z}$  tale che

$$-\frac{\pi}{2} + 2k\pi \leq x \leq \frac{\pi}{2} + 2k\pi.$$

Si ha quindi

$$\text{dom}(f) = \bigcup_{k \in \mathbf{Z}} \left[ -\frac{\pi}{2} + 2k\pi, \frac{\pi}{2} + 2k\pi \right].$$

Sia  $k \in \mathbf{Z}$  e sia  $-\frac{\pi}{2} + 2k\pi < x < \frac{\pi}{2} + 2k\pi$ ; la funzione  $f$  è derivabile in  $x$  e si ha

$$f'(x) = \cos(x^2 \sqrt{\cos x}) \left( 2x \sqrt{\cos x} + x^2 \frac{1}{2\sqrt{\cos x}} (-\sin x) \right) =$$

$$\cos(x^2\sqrt{\cos x}) \left( 2x\sqrt{\cos x} - x^2 \frac{\sin x}{2\sqrt{\cos x}} \right).$$

Sia  $k \in \mathbf{Z}$  e sia  $a = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$ .

Si ha

$$\lim_{x \rightarrow a} \cos(x^2\sqrt{\cos x}) = \cos 0 = 1,$$

$$\lim_{x \rightarrow a} 2x\sqrt{\cos x} = 0,$$

$$\lim_{x \rightarrow a} -x^2 \frac{\sin x}{2\sqrt{\cos x}} = -\infty.$$

Si ha quindi  $\lim_{x \rightarrow a} f'(x) = -\infty$ .

Quindi  $f$  è derivabile in  $a$  rispetto a  $\overline{\mathbf{R}}$  e si ha  $f'(a) = -\infty$ .

Sia  $k \in \mathbf{Z}$  e sia  $a = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi$ .

Si ha

$$\lim_{x \rightarrow a} \cos(x^2\sqrt{\cos x}) = \cos 0 = 1,$$

$$\lim_{x \rightarrow a} 2x\sqrt{\cos x} = 0,$$

$$\lim_{x \rightarrow a} -x^2 \frac{\sin x}{2\sqrt{\cos x}} = +\infty.$$

Si ha quindi  $\lim_{x \rightarrow a} f'(x) = +\infty$ .

Quindi  $f$  è derivabile in  $a$  rispetto a  $\overline{\mathbf{R}}$  e si ha  $f'(a) = +\infty$ .

- (e) Il dominio di  $f$  è dato dagli  $x \in \mathbf{R}$  tali che  $\cos(5x) \geq 0$ , quindi dagli  $x \in \mathbf{R}$  per i quali esiste  $k \in \mathbf{Z}$  tale che

$$-\frac{\pi}{2} + 2k\pi \leq 5x \leq \frac{\pi}{2} + 2k\pi,$$

cioè tali che

$$-\frac{\pi}{10} + k\frac{2\pi}{5} \leq x \leq \frac{\pi}{10} + k\frac{2\pi}{5}.$$

Si ha quindi

$$\text{dom}(f) = \bigcup_{k \in \mathbf{Z}} \left[ -\frac{\pi}{10} + k\frac{2\pi}{5}, \frac{\pi}{10} + k\frac{2\pi}{5} \right].$$

Sia  $k \in \mathbf{Z}$  e sia  $-\frac{\pi}{10} + k\frac{2\pi}{5} < x < \frac{\pi}{10} + k\frac{2\pi}{5}$ ; la funzione  $f$  è derivabile in  $x$  e si ha

$$f'(x) = -\sin(x^2\sqrt{\cos(5x)}) \left( 2x\sqrt{\cos(5x)} + x^2 \frac{1}{2\sqrt{\cos(5x)}} (-\sin(5x))5 \right) =$$

$$\sin(x^2\sqrt{\cos(5x)}) \left( \frac{5}{2}x^2 \frac{\sin(5x)}{\sqrt{\cos(5x)}} - 2x\sqrt{\cos(5x)} \right).$$

Sia  $k \in \mathbf{Z}$  e sia  $a = \frac{\pi}{10} + k\frac{2\pi}{5}$ .

Si ha

$$\sin(5a) = \sin\left(\frac{\pi}{2} + 2k\pi\right) = 1,$$

$$\cos(5a) = \cos\left(\frac{\pi}{2} + 2k\pi\right) = 0.$$

Si ha quindi

$$\sin(x^2 \sqrt{\cos(5x)}) \sim_{x \rightarrow a} x^2 \sqrt{\cos(5x)} \sim_{x \rightarrow a} a^2 \sqrt{\cos(5x)}.$$

$$\text{Si ha } \frac{5}{2}x^2 \frac{\sin(5x)}{\sqrt{\cos(5x)}} - 2x\sqrt{\cos(5x)} \sim_{x \rightarrow a} \frac{5}{2}x^2 \frac{\sin(5x)}{\sqrt{\cos(5x)}} \sim_{x \rightarrow a} \frac{5}{2}a^2 \frac{1}{\sqrt{\cos(5x)}}.$$

Quindi si ha

$$\begin{aligned} \sin(x^2 \sqrt{\cos(5x)}) \left( \frac{5}{2}x^2 \frac{\sin(5x)}{\sqrt{\cos(5x)}} - 2x\sqrt{\cos(5x)} \right) &\sim_{x \rightarrow a} \\ a^2 \sqrt{\cos(5x)} \frac{5}{2}a^2 \frac{1}{\sqrt{\cos(5x)}} &= \frac{5}{2}a^4. \end{aligned}$$

Si ha quindi

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow a} \sin(x^2 \sqrt{\cos(5x)}) \left( \frac{5}{2}x^2 \frac{\sin(5x)}{\sqrt{\cos(5x)}} - 2x\sqrt{\cos(5x)} \right) &= \\ \frac{5}{2}a^4 = \frac{5}{3} \left( \frac{\pi}{10} + k\frac{2\pi}{5} \right)^4. \end{aligned}$$

Quindi  $f$  è derivabile in  $a$  e si ha

$$f'(a) = \frac{5}{2} \left( \frac{\pi}{10} + k\frac{2\pi}{5} \right)^4.$$

Sia  $k \in \mathbf{Z}$  e sia  $a = -\frac{\pi}{10} + k\frac{2\pi}{5}$ .

Si ha

$$\begin{aligned} \sin(5a) &= \sin\left(-\frac{\pi}{2} + 2k\pi\right) = -1, \\ \cos(5a) &= \cos\left(\frac{\pi}{2} + 2k\pi\right) = 0. \end{aligned}$$

Si ha quindi

$$\sin(x^2 \sqrt{\cos(5x)}) \sim_{x \rightarrow a} x^2 \sqrt{\cos(5x)} \sim_{x \rightarrow a} a^2 \sqrt{\cos(5x)}.$$

$$\text{Si ha } \frac{5}{2}x^2 \frac{\sin(5x)}{\sqrt{\cos(5x)}} - 2x\sqrt{\cos(5x)} \sim_{x \rightarrow a} \frac{5}{2}x^2 \frac{\sin(5x)}{\sqrt{\cos(5x)}} \sim_{x \rightarrow a} -\frac{5}{2}a^2 \frac{1}{\sqrt{\cos(5x)}}.$$

Quindi si ha

$$\begin{aligned} \sin(x^2 \sqrt{\cos(5x)}) \left( \frac{5}{2}x^2 \frac{\sin(5x)}{\sqrt{\cos(5x)}} - 2x\sqrt{\cos(5x)} \right) &\sim_{x \rightarrow a} \\ a^2 \sqrt{\cos(5x)} \left( -\frac{5}{2}a^2 \frac{1}{\sqrt{\cos(5x)}} \right) &= -\frac{5}{2}a^4. \end{aligned}$$

Si ha quindi

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow a} \sin(x^2 \sqrt{\cos(5x)}) \left( \frac{5}{2}x^2 \frac{\sin(5x)}{\sqrt{\cos(5x)}} - 2x\sqrt{\cos(5x)} \right) &= \\ -\frac{5}{2}a^4 = -\frac{5}{3} \left( \frac{\pi}{10} + k\frac{2\pi}{5} \right)^4. \end{aligned}$$

Quindi  $f$  è derivabile in  $a$  e si ha

$$f'(a) = -\frac{5}{2} \left( \frac{\pi}{10} + k\frac{2\pi}{5} \right)^4.$$

(f) Il dominio di  $f$  è dato dagli  $x \in \mathbf{R}$  tali che  $-1 \leq \frac{x^2-1}{x^2+1} \leq 1$ , cioè tali che

$$\begin{cases} -x^2 - 1 \leq x^2 - 1 \\ x^2 - 1 \leq x^2 + 1 \end{cases}, \text{ cioè tali che}$$

## 9.10. DERIVABILITÀ E DERIVATE

105

$$\begin{cases} -x^2 \leq x^2 \\ -1 \leq 1 \end{cases}, \text{ cioè tali che} \\ -1 \leq 1; \text{ si ha quindi } \text{dom}(f) = \mathbf{R}.$$

Si ha  $\frac{x^2-1}{x^2+1} = 1$  se e solo se  $x^2 - 1 = x^2 + 1$ , cioè se e solo se  $-1 = 1$ ; quindi mai.

Si ha  $\frac{x^2-1}{x^2+1} = -1$  se e solo se  $x^2 - 1 = -x^2 - 1$ , cioè se e solo se  $-x^2 = x^2$ ; cioè se e solo se  $2x^2 = 0$ , cioè se e solo se  $x = 0$ .

Supponiamo  $x \neq 0$ ; allora  $f$  è derivabile in  $x$  e si ha

$$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{x^2-1}{x^2+1}\right)^2}} \frac{2x(x^2+1) - 2x(x^2-1)}{(x^2+1)^2} = \frac{1}{\sqrt{\frac{(x^2+1)^2 - (x^2-1)^2}{(x^2+1)^2}}} \frac{4x}{(x^2+1)^2} = \\ \frac{x^2+1}{\sqrt{x^4+2x^2+1 - (x^4-2x^2+1)}} \frac{4x}{(x^2+1)^2} = \frac{4x}{\sqrt{4x^2(x^2+1)}} = \frac{4x}{2|x|(x^2+1)} = \frac{4x}{2x \operatorname{sgn} x (x^2+1)} = \\ \frac{2}{\operatorname{sgn} x (x^2+1)} = \frac{2 \operatorname{sgn} x}{x^2+1}.$$

Si ha

$$\lim_{x \rightarrow 0+, n \neq 0} f'(x) = \lim_{x \rightarrow 0+, x > 0} \frac{2 \operatorname{sgn} x}{x^2+1} = \lim_{x \rightarrow 0+, x > 0} \frac{2}{x^2+1} = 2.$$

Quindi  $f$  è derivabile da destra in 0 e si ha  $f'_+(0) = 2$ .

Si ha

$$\lim_{x \rightarrow 0-, n \neq 0} f'(x) = \lim_{x \rightarrow 0-, x < 0} \frac{2 \operatorname{sgn} x}{x^2+1} = \lim_{x \rightarrow 0-, x < 0} -\frac{2}{x^2+1} = -2.$$

Quindi  $f$  è derivabile da sinistra in 0 e si ha  $f'_-(0) = -2$ .

Quindi  $f$  non è derivabile in 0.

3. **Esercizio.** Calcolare la derivata della seguente funzione

$$f(x) = (\operatorname{Arctg} \sqrt[3]{x}) \operatorname{tg}^2 x$$

in un punto  $x \in \text{dom}(f)$ ,  $x \neq 0$ .

**Risoluzione.** Per  $x \in \text{dom}(f)$ ,  $x \neq 0$  si ha

$$f'(x) = \frac{1}{1 + (\sqrt[3]{x})^2} \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}} \operatorname{tg}^2 x + (\operatorname{Arctg} \sqrt[3]{x}) 2(\operatorname{tg} x) \frac{1}{\cos^2 x}.$$

4. Sia  $f$  la funzione reale di variabile reale definita naturalmente dalla relazione

$$f(x) = \operatorname{Arcsin} \left( 2 - \frac{3}{2}|x| \right)$$

- (a) determinare il dominio naturale di  $f$ ;  
 (b) determinare la retta tangente al grafico della funzione  $f$  nel punto  $(-1, f(-1))$ .

**Risoluzione.**

- (a) Il dominio di  $f$  è dato dagli  $x \in \mathbf{R}$  tali che  $-1 \leq 2 - \frac{3}{2}|x| \leq 1$ , cioè tali che
- $$\begin{cases} -1 \leq 2 - \frac{3}{2}|x| \\ 2 - \frac{3}{2}|x| \leq 1 \end{cases}, \text{ cioè tali che}$$

$$\begin{cases} \frac{3}{2}|x| \leq 3 \\ \frac{3}{2}|x| \geq 1 \end{cases}, \text{ cioè tali che}$$

$$\begin{cases} |x| \leq 2 \\ |x| \geq \frac{2}{3} \end{cases}, \text{ cioè tali che}$$

$$\begin{cases} -2 \leq x \leq 2 \\ x \leq -\frac{2}{3} \text{ o } x \geq \frac{2}{3} \end{cases}, \text{ cioè tali che}$$

$$-2 \leq x \leq -\frac{2}{3} \text{ o } \frac{2}{3} \leq x \leq 2.$$

Si ha quindi

$$\text{dom}(f) = [-2, -\frac{2}{3}] \cup [\frac{2}{3}, 2].$$

(b) Si ha

$$f(-1) = \text{Arcsin}(2 - \frac{3}{2}) = \text{Arcsin} \frac{1}{2} = \frac{\pi}{6}.$$

Per  $x \in ]-2, -\frac{2}{3}[$ , si ha  $f(x) = \text{Arcsin}(2 + \frac{3}{2}x)$ ; quindi si ha

$$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1 - (2 + \frac{3}{2}x)^2}} \cdot \frac{3}{2}.$$

$$\text{Si ha quindi } f'(1) = \frac{3}{2} \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{1}{4}}} = \frac{3}{2} \frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{3}{\sqrt{3}} = \sqrt{3}.$$

L'equazione della retta tangente al grafico di  $f$  in  $(-1, f(-1))$  è quindi

$$y - \frac{\pi}{6} = \sqrt{3}(x + 1).$$

5. Sia  $a \in \mathbf{R}$ ; determinare  $a$  in modo che la funzione

$$f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}, x \rightarrow \begin{cases} a + ex & \text{per } x \leq -1 \\ (x + 1)e^{|x|} & \text{per } x > -1 \end{cases}$$

sia continua; per tale valore di  $a$ , determinare l'insieme degli  $x \in \mathbf{R}$  tali che  $f$  derivabile in  $x$ .

**Risoluzione.** Per il carattere locale della continuità,  $f$  è continua su  $\mathbf{R} - \{-1\}$ .

Si ha

$$\lim_{x \rightarrow -1-, x \neq -1} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1-, x < -1} a + ex = a - e.$$

Si ha

$$f(-1) = a - e.$$

Si ha

$$\lim_{x \rightarrow -1+, x \neq -1} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1-, x > -1} (x + 1)e^{|x|} = 0.$$

Quindi  $f$  è continua in  $-1$  se e solo se  $a - e = 0$ , cioè se e solo se  $a = e$ .

Supponiamo dunque  $a = e$ . Si ha

$$f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}, x \rightarrow \begin{cases} e + ex & \text{per } x \leq -1 \\ (x + 1)e^{|x|} & \text{per } x > -1 \end{cases}$$

La funzione  $|x|$  è derivabile su  $\mathbf{R} - \{0\}$ . Quindi per il carattere locale della derivabilità,  $f$  è derivabile su  $\mathbf{R} - \{-1, 0\}$ .

## 9.11. STUDIO DI FUNZIONE

107

Per ogni  $x \in \mathbf{R}$  si ha

$$f(x) = \begin{cases} e + ex & \text{per } x \leq -1 \\ (1+x)e^{-x} & \text{per } -1 < x \leq 0 \\ (1+x)e^x & \text{per } x > 0 \end{cases} .$$

Per il carattere locale della derivata per  $x < -1$  si ha

$$f'(x) = e.$$

Per il carattere locale della derivata per  $-1 < x < 0$  si ha

$$f'(x) = e^{-x} + (1+x)e^{-x}(-1) = e^{-x}(1-1-x) = -xe^{-x}.$$

Per il carattere locale della derivata per  $x > 0$  si ha

$$f'(x) = e^x + (1+x)e^x = e^x(1+1+x) = (2+x)e^x.$$

Si ha

$$\lim_{x \rightarrow -1-, x \neq -1} f'(x) = \lim_{x \rightarrow -1-, x < -1} e = e.$$

Quindi  $f$  è derivabile da sinistra in  $-1$  e si ha  $f'_-(-1) = e$ .

Si ha

$$\lim_{x \rightarrow -1+, x \neq -1} f'(x) = \lim_{x \rightarrow -1-, -1 < x < 0} -xe^{-x} = e.$$

Quindi  $f$  è derivabile da destra in  $-1$  e si ha  $f'_+(-1) = e$ .

Essendo  $f'_+(-1) = f'_-(-1)$ ,  $f$  è derivabile in  $-1$ .

Si ha

$$\lim_{x \rightarrow 0-, x \neq 0} f'(x) = \lim_{x \rightarrow 0-, -1 < x < 0} -xe^{-x} = 0.$$

Quindi  $f$  è derivabile da sinistra in  $0$  e si ha  $f'_-(0) = 0$ .

Si ha

$$\lim_{x \rightarrow 0+, x \neq 0} f'(x) = \lim_{x \rightarrow 0-, x > 0} (2+x)e^x = 2.$$

Quindi  $f$  è derivabile da destra in  $0$  e si ha  $f'_+(0) = 2$ .

Essendo  $f'_+(0) \neq f'_-(0)$ ,  $f$  non è derivabile in  $0$ .

L'insieme degli  $x \in \mathbf{R}$  tali che  $f$  è derivabile in  $x$  è quindi  $\mathbf{R} - \{0\}$ .

## 9.11 Studio di funzione

1. **Esercizio.** Studiare la seguente funzione (reale di variabile reale)

$$f(x) = x - \operatorname{Arctg} x .$$

Si chiede:

- determinare il dominio di  $f$ ;
- calcolare i limiti di  $f$  nei punti frontiera del dominio;
- dire se  $f$  ammette asintoti obliqui e, in caso affermativo, determinarli;
- determinare l'insieme degli intervalli non banali massimali sui quali  $f$  è strettamente crescente (resp. strettamente decrescente);

- (e) determinare l'insieme degli intervalli non banali massimali sui quali  $f$  è strettamente convessa (risp. strettamente concava).

Disegnare approssimativamente il grafico di  $f$ .

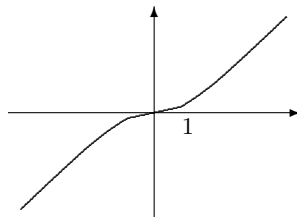
**Risoluzione.**

- (a) Si ha  $\text{dom}(f) = \mathbf{R}$ .  
 (b) Si ha  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$ ,  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ .  
 (c) Si ha  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x - \text{Arctg } x}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{x} = 1$  e  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) - x = \lim_{x \rightarrow +\infty} -\text{Arctg } x = -\frac{\pi}{2}$ ; quindi  $f$  ammette asintoto per  $x \rightarrow +\infty$  e la retta di equazione  $y = x - \frac{\pi}{2}$  è l'asintoto. Analogamente si vede che  $f$  ammette asintoto per  $x \rightarrow -\infty$  e che la retta di equazione  $y = x + \frac{\pi}{2}$  è l'asintoto.  
 (d) Sia  $x \in \mathbf{R}$ ; si ha  $f'(x) = 1 - \frac{1}{1+x^2} = \frac{1+x^2-1}{1+x^2} = \frac{x^2}{1+x^2}$ ; si ha  $f'(x) > 0$  se e solo se  $x \neq 0$  e quindi  $f$  è strettamente crescente su  $] -\infty, 0]$  e su  $[0, +\infty[$ ; quindi  $f$  è strettamente crescente su tutto  $\mathbf{R}$ ; quindi di ha

$$\mathcal{M}(\nearrow) = \{\mathbf{R}\}, \quad \mathcal{M}(\searrow) = \emptyset \quad \mathcal{M}(\leftrightarrow) = \emptyset.$$

- (e) Sia  $x \in \mathbf{R}$ ; si ha  $f''(x) = \frac{2x}{(1+x^2)^2}$ ; si ha quindi  $f''(x) > 0$  per  $x > 0$ ,  $f''(x) < 0$  per  $x < 0$ ; quindi  $f$  è strettamente convessa su  $[0, +\infty[$ , strettamente concava su  $] -\infty, 0]$ ; quindi si ha

$$\mathcal{C}(\uparrow) = \{[0, +\infty[ \}, \quad \mathcal{C}(\downarrow) = \{] -\infty, 0] \} \quad \mathcal{C}(\updownarrow) = \emptyset.$$



2. **Esercizio.** Studiare la seguente funzione (reale di variabile reale)

$$f(x) = \log \frac{x-1}{x+1}.$$

Si chiede:

- (a) determinare il dominio di  $f$ ;  
 (b) calcolare i limiti di  $f$  nei punti frontiera del dominio;  
 (c) determinare l'insieme degli intervalli non banali massimali sui quali  $f$  è strettamente crescente (risp. strettamente decrescente);  
 (d) determinare l'insieme degli intervalli non banali massimali sui quali  $f$  è strettamente convessa (risp. strettamente concava).

## 9.11. STUDIO DI FUNZIONE

109

Disegnare approssimativamente il grafico di  $f$ .

**Risoluzione.**

- (a) Il dominio di  $f$  è dato dagli  $x \in \mathbf{R}$  tali che  $\begin{cases} x+1 \neq 0 \\ \frac{x-1}{x+1} > 0 \end{cases}$ , cioè tali che  $\begin{cases} x \neq -1 \\ x < -1 \text{ o } x > 1 \end{cases}$ , cioè tali che  $x < -1$  o  $x > 1$ . Si ha quindi

$$\text{dom}(f) = ]-\infty, -1[ \cup ]1, +\infty[.$$

- (b) Si ha  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$ ,  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$ ,  $\lim_{x \rightarrow -1} f(x) = +\infty$ ,  $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = -\infty$ .

- (c) Sia  $x \in \text{dom}(f)$ ; si ha

$$f'(x) = \frac{x+1}{x-1} \frac{x+1-(x-1)}{(x+1)^2} = \frac{2}{x^2-1} > 0.$$

Quindi  $f$  è strettamente crescente su  $]-\infty, -1[$  e su  $]1, +\infty[$ . Si ha quindi

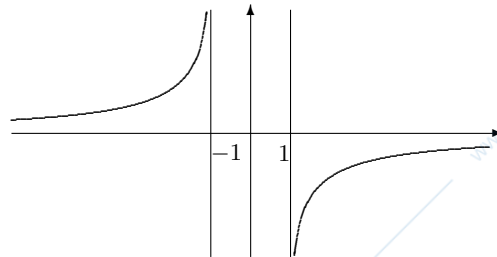
$$\mathcal{M}(\nearrow) = \{ ]-\infty, -1[, ]1, +\infty[ \}, \quad \mathcal{M}(\leftrightarrow) = \emptyset \quad \mathcal{M}(\searrow) = \emptyset.$$

- (d) Sia  $x \in \text{dom}(f)$ ; si ha

$$f''(x) = -\frac{4x}{(x^2-1)^2}.$$

Si ha  $f''(x) = 0$  se e solo se  $x = 0$ , quindi mai; si ha  $f''(x) > 0$  se e solo se  $x < 0$ , quindi se e solo se  $x < -1$ ; si ha  $f''(x) < 0$  se e solo se  $x > 0$ , quindi se e solo se  $x > 1$ . Quindi  $f$  è strettamente convessa su  $]-\infty, -1[$ , strettamente concava su  $]1, +\infty[$ . Quindi si ha

$$\mathcal{C}(\uparrow) = \{ ]-\infty, -1[ \}, \quad \mathcal{C}(\downarrow) = \emptyset \quad \mathcal{C}(\downarrow) = \{ ]1, +\infty[ \}.$$



**3. Esercizio.** Studiare la seguente funzione

$$f(x) = e^{\frac{1}{|x-1|-1}},$$

rispondendo alle seguenti domande:

- (a) Determinare il dominio di  $f$ ;
- (b) Calcolare i limiti di  $f$  nei punti frontiera del dominio;
- (c) Determinare l'insieme degli intervalli non banali massimali sui quali  $f$  è strettamente crescente (risp. strettamente decrescente);
- (d) Studiare la derivabilità di  $f$  in 1;
- (e) Determinato il prolungamento continuo di  $f$ ]0, 2[ a  $[0, 2]$ , se ne studi la derivabilità rispetto a  $\mathbf{R}$  in 0 e 2;
- (f) Determinare l'insieme degli intervalli non banali massimali sui quali  $f$  è strettamente convessa (risp. strettamente concava).

Disegnare approssimativamente il grafico di  $f$ .

**Risoluzione.**

- (a) Il dominio di  $f$  è dato dagli  $x \in \mathbf{R}$  tali che  $|x - 1| - 1 \neq 0$ , cioè tali che  $|x - 1| \neq 1$ , cioè tali che  $x - 1 \neq 1$  e  $x - 1 \neq -1$ , cioè tali che  $x \neq 2$  e  $x \neq 0$ . Si ha quindi

$$\text{dom}(f) = ]-\infty, 0[ \cup ]0, 2[ \cup ]2, +\infty[.$$

- (b) Si ha  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 1$ ,  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 1$ ,  $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = +\infty$ ,  $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 0$ ,  $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = 0$ ,  $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = +\infty$ .
- (c) Sia  $x \in \text{dom}(f)$ .

Si ha

$$f(x) = \begin{cases} e^{\frac{1}{x-2}} & \text{per } x \geq 1 \\ e^{-\frac{1}{x}} & \text{per } x < 1 \end{cases}.$$

Per  $x > 1$  si ha

$$f'(x) = e^{\frac{1}{x-2}} \left( -\frac{1}{(x-2)^2} \right) < 0.$$

Quindi  $f$  è strettamente decrescente su  $[1, 2[$  e su  $]2, +\infty[$ .

Per  $x < 1$  si ha

$$f'(x) = e^{-\frac{1}{x}} \left( \frac{1}{x^2} \right) > 0.$$

Quindi  $f$  è strettamente crescente su  $] -\infty, 0[$  e su  $]0, 1[$ .

Si ha quindi

$$\mathcal{M}(\nearrow) = \{ ]-\infty, 0[, ]0, 1] \}, \quad \mathcal{M}(\leftrightarrow) = \emptyset,$$

$$\mathcal{M}(\searrow) = \{ [1, 2[, ]2, +\infty[ \}.$$

- (d) Si ha  $\lim_{x \rightarrow 1^+, x > 1} f'(x) = -e^{-1}$ ; quindi  $f$  è derivabile da destra in 1 e si ha  $f'_+(1) = -e^{-1}$ .

Si ha  $\lim_{x \rightarrow 1^-, x < 1} f'(x) = e^{-1}$ ; quindi  $f$  è derivabile da sinistra in 1 e si ha  $f'_-(1) = e^{-1}$ .

Poichè  $f'_+(1) \neq f'_-(1)$ ,  $f$  non è derivabile in 1.

(e) Il prolungamento continuo di  $f]$ 0, 2[ a  $[0, 2]$  è la funzione

$$g : [0, 2] \rightarrow \mathbf{R}, x \rightarrow \begin{cases} f(x) & \text{per } x \in ]0, 2[ \\ 0 & \text{per } x \in \{0, 2\} \end{cases} .$$

Si ha

$$\lim_{x \rightarrow 0, x \in ]0, 2[} g'(x) = \lim_{x \rightarrow 0, x > 0} f'(x) =$$

$$\lim_{x \rightarrow 0, x > 0} e^{-\frac{1}{x}} \frac{1}{x^2} = \lim_{y \rightarrow -\infty} e^y y^2 = 0.$$

Quindi  $g$  è derivabile in 0 e si ha  $g'(0) = 0$ .

Si ha

$$\lim_{x \rightarrow 2, x \in ]0, 2[} g'(x) = \lim_{x \rightarrow 2, x < 2} f'(x) =$$

$$\lim_{x \rightarrow 2, x < 2} e^{\frac{1}{x-2}} \left(-\frac{1}{(x-2)^2}\right) = \lim_{y \rightarrow -\infty} (-e^y y^2) = 0.$$

Quindi  $g$  è derivabile in 2 e si ha  $g'(2) = 0$ .

(f) Sia  $x \in \text{dom}(f)$ .

Per  $x > 1$  si ha

$$f''(x) = e^{\frac{1}{x-2}} \left(-\frac{1}{(x-2)^2}\right)^2 + e^{\frac{1}{x-2}} \frac{2(x-2)}{(x-2)^4} =$$

$$e^{\frac{1}{x-2}} \frac{1+2x-4}{(x-2)^4} = e^{\frac{1}{x-2}} \frac{2x-3}{(x-2)^4} .$$

Si ha  $f''(x) = 0$  se e solo se  $x = \frac{3}{2}$ ; si ha  $f''(x) > 0$  se e solo se  $x > \frac{3}{2}$ ; si ha  $f''(x) < 0$  se e solo se  $x < \frac{3}{2}$ . Quindi  $f$  è strettamente convessa su  $]\frac{3}{2}, 2[$  e su  $]2, +\infty[$ , strettamente concava su  $[1, \frac{3}{2}]$ .

Per  $x < 1$  si ha

$$f''(x) = e^{-\frac{1}{x}} \frac{1}{x^4} + e^{-\frac{1}{x}} \frac{2x}{x^4} = e^{-\frac{1}{x}} \frac{1-2x}{x^4} .$$

Si ha  $f''(x) = 0$  se e solo se  $x = \frac{1}{2}$ ; si ha  $f''(x) > 0$  se e solo se  $x < \frac{1}{2}$ ; si ha  $f''(x) < 0$  se e solo se  $x > \frac{1}{2}$ . Quindi  $f$  è strettamente convessa su  $] -\infty, 0[$  e su  $]0, \frac{1}{2}]$ , strettamente concava su  $[\frac{1}{2}, 1]$ .

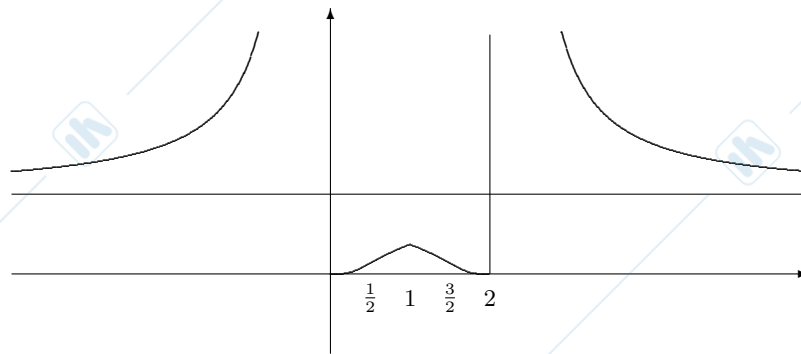
Poichè  $f$  è strettamente concava su  $[\frac{1}{2}, 1]$  e su  $[1, \frac{3}{2}]$  e poichè  $f'_-(1) \leq f'_+(1)$ ,  $f$  è strettamente concava su  $[\frac{1}{2}, \frac{3}{2}]$ .

Quindi si ha

$$\mathcal{C}(\uparrow) = \{ ] -\infty, 0[, ]0, \frac{1}{2}], [\frac{3}{2}, 2[, ]2, +\infty[ \} ,$$

$$\mathcal{C}(\downarrow) = \emptyset \quad \mathcal{C}(\downarrow) = \{ [\frac{1}{2}, \frac{3}{2}] \} .$$

Per tracciare il grafico di  $f$  teniamo conto che  $f(1) = e^{-1} \approx .37$ ,  $\frac{1}{2} = .5$ ,  $\frac{3}{2} = 1.5$ ,  $f(\frac{1}{2}) = f(\frac{3}{2}) = e^{-2} \approx .14$ . Si ha



4. **Esercizio.** Studiare la seguente funzione

$$f(x) = \sqrt{x-1} e^{-x},$$

rispondendo alle seguenti domande:

- determinare il dominio di  $f$ ;
- calcolare i limiti o i valori di  $f$  nei punti frontiera del dominio;
- determinare l'insieme degli intervalli non banali massimali sui quali  $f$  è strettamente crescente (risp. strettamente decrescente);
- studiare la derivabilità di  $f$  rispetto a  $\mathbf{R}$  in 1;
- determinare l'insieme degli intervalli non banali massimali sui quali  $f$  è strettamente convessa (risp. strettamente concava).

Disegnare approssimativamente il grafico di  $f$ .

**Risoluzione.**

- Si ha  $\text{dom}(f) = [1, +\infty[$ .
- Si ha  $f(1) = 0$ ,  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x-1} e^{-x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x} e^{-x} = 0$ .
- Sia  $x \in ]1, +\infty[$ ; si ha
 
$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x-1}} e^{-x} + \sqrt{x-1} e^{-x}(-1) = e^{-x} \left( \frac{1}{2\sqrt{x-1}} - \sqrt{x-1} \right) = e^{-x} \frac{1-2(x-1)}{2\sqrt{x-1}} = e^{-x} \frac{1-2x+2}{2\sqrt{x-1}} = e^{-x} \frac{3-2x}{2\sqrt{x-1}}.$$

Si ha  $f'(x) = 0$  se e solo se  $3 - 2x = 0$ , cioè se e solo se  $2x = 3$ , cioè se e solo se  $x = \frac{3}{2}$ . Si ha  $f'(x) > 0$  se e solo se  $3 - 2x > 0$ , cioè se e solo se  $2x < 3$ , cioè se e solo se  $x < \frac{3}{2}$ . Si ha  $f'(x) < 0$  se e solo se  $x > \frac{3}{2}$ .

Quindi  $f$  è strettamente crescente su  $[1, \frac{3}{2}]$ , strettamente decrescente su  $[\frac{3}{2}, +\infty[$ .

## 9.11. STUDIO DI FUNZIONE

113

Si ha quindi

$$\mathcal{M}(\nearrow) = \left\{ \left[ 1, \frac{3}{2} \right] \right\}, \mathcal{M}(\leftrightarrow) = \emptyset, \mathcal{M}(\searrow) = \left\{ \left[ \frac{3}{2}, +\infty[ \right\}.$$

(d) Si ha

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x-1}e^{-x}}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{e^{-x}}{\sqrt{x-1}} = +\infty.$$

Quindi  $f$  è derivabile rispetto ad  $\overline{\mathbf{R}}$  in 1 e si ha  $f'(1) = +\infty$ .

(e) Sia  $x \in ]1, +\infty[$ ; si ha

$$\begin{aligned} f''(x) &= -\frac{e^{-x}}{2} \frac{3-2x}{\sqrt{x-1}} + \frac{e^{-x}}{2} \frac{-\sqrt{x-1} - \frac{1}{2\sqrt{x-1}}(3-2x)}{x-1} = \\ &= \frac{e^{-x}}{2} \left( -\frac{3-2x}{\sqrt{x-1}} + \frac{-4(x-1) - 3 + 2x}{2(x-1)\sqrt{x-1}} \right) = \\ &= \frac{e^{-x}}{2} \left( \frac{2x-3}{\sqrt{x-1}} + \frac{-4x+4-3+2x}{2(x-1)\sqrt{x-1}} \right) = \\ &= \frac{e^{-x}}{2} \frac{2(x-1)(2x-3) - 2x + 1}{2(x-1)\sqrt{x-1}} = \\ &= \frac{e^{-x}}{2} \frac{4x^2 - 6x - 4x + 6 - 2x + 1}{2(x-1)\sqrt{x-1}} = \\ &= \frac{e^{-x}}{2} \frac{4x^2 - 12x + 7}{2(x-1)\sqrt{x-1}}. \end{aligned}$$

Si ha  $f''(x) = 0$  se e solo se  $4x^2 - 12x + 7 = 0$ , cioè se e solo se

$$x = \frac{6 \pm \sqrt{36 - 28}}{4} = \frac{6 \pm \sqrt{8}}{4} = \frac{3 \pm \sqrt{2}}{2},$$

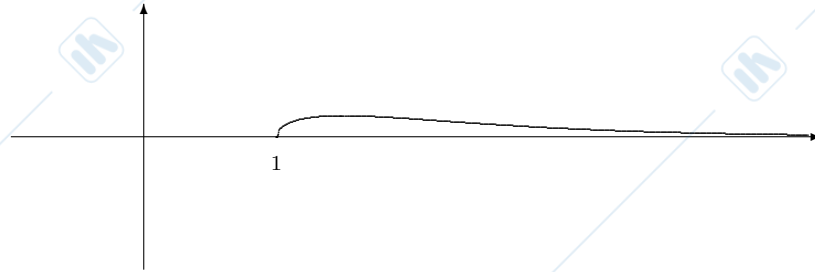
cioè, essendo  $x > 1$ , se e solo se  $x = \frac{3 + \sqrt{2}}{2}$ . Si ha  $f''(x) > 0$  se e solo se  $4x^2 - 12x + 7 > 0$ , cioè se e solo se  $x < \frac{3 - \sqrt{2}}{2}$  o  $x > \frac{3 + \sqrt{2}}{2}$ , cioè se e solo se  $x > \frac{3 + \sqrt{2}}{2}$ . Si ha  $f''(x) < 0$  se e solo se  $1 < x < \frac{3 + \sqrt{2}}{2}$ .

Quindi  $f$  è strettamente convessa su  $\left[ \frac{3 + \sqrt{2}}{2}, +\infty[ \right]$ , strettamente concava su  $\left[ 1, \frac{3 + \sqrt{2}}{2} \right]$ .

Quindi si ha

$$\mathcal{C}(\uparrow) = \left\{ \left[ \frac{3 + \sqrt{2}}{2}, +\infty[ \right] \right\}, \mathcal{C}(\downarrow) = \emptyset, \mathcal{C}(\downarrow) = \left\{ \left[ 1, \frac{3 + \sqrt{2}}{2} \right] \right\}.$$

Per disegnare il grafico osserviamo che  $\frac{3}{2} = 1.5$ ,  $f\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}e^{-\frac{1}{2}} \approx .15$ ,  $\frac{3 + \sqrt{2}}{2} \approx 2.21$ ,  $f\left(\frac{3 + \sqrt{2}}{2}\right) \approx .12$ .



5. **Esercizio.** Studiare la seguente funzione

$$f(x) = \log|x| - x^2 + 1,$$

rispondendo alle seguenti domande:

- determinare il dominio di  $f$ ;
- calcolare i limiti di  $f$  nei punti frontiera del dominio;
- determinare l'insieme degli intervalli non banali massimali sui quali  $f$  è strettamente crescente (risp. strettamente decrescente);
- dire se  $f$  ammette massimo e se  $f$  ammette minimo; in caso affermativo determinarli;
- determinare l'insieme degli intervalli non banali massimali sui quali  $f$  è strettamente convessa (risp. strettamente concava).

Disegnare approssimativamente il grafico di  $f$ .

**Risoluzione.**

- Si ha  $\text{dom}(f) = \mathbf{R}^*$ .
- Si ha  $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = -\infty$ ,  $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = -\infty$ ,  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$ ,  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$ .
- Sia  $x \in \mathbf{R}^*$ ; si ha  $f'(x) = \frac{1}{x} - 2x$ .

Si ha  $f'(x) = 0$  se e solo se  $\frac{1}{x} - 2x = 0$ , cioè se e solo se  $\frac{1-2x^2}{x} = 0$ , cioè se e solo se  $1 - 2x^2 = 0$ , cioè se e solo se  $x = \pm \frac{\sqrt{2}}{2}$ . Si ha  $1 - 2x^2 > 0$  se e solo se  $-\frac{\sqrt{2}}{2} < x < \frac{\sqrt{2}}{2}$ . Quindi si ha  $f'(x) > 0$  se e solo se  $x < -\frac{\sqrt{2}}{2}$  o  $0 < x < \frac{\sqrt{2}}{2}$  e  $f'(x) < 0$  se e solo se  $-\frac{\sqrt{2}}{2} < x < 0$  o  $x > \frac{\sqrt{2}}{2}$ .

Quindi  $f$  è strettamente crescente su  $]-\infty, \frac{\sqrt{2}}{2}]$  e su  $]0, \frac{\sqrt{2}}{2}]$ ;  $f$  è strettamente decrescente su  $[-\frac{\sqrt{2}}{2}, 0[$  e su  $[\frac{\sqrt{2}}{2}, +\infty[$ . Si ha quindi

$$\mathcal{M}(\nearrow) = \{ ]-\infty, \frac{\sqrt{2}}{2}], ]0, \frac{\sqrt{2}}{2}] \}, \mathcal{M}(\rightarrow) = \emptyset,$$

$$\mathcal{M}(\searrow) = \{ [-\frac{\sqrt{2}}{2}, 0[, [\frac{\sqrt{2}}{2}, +\infty[ \}.$$

## 9.11. STUDIO DI FUNZIONE

115

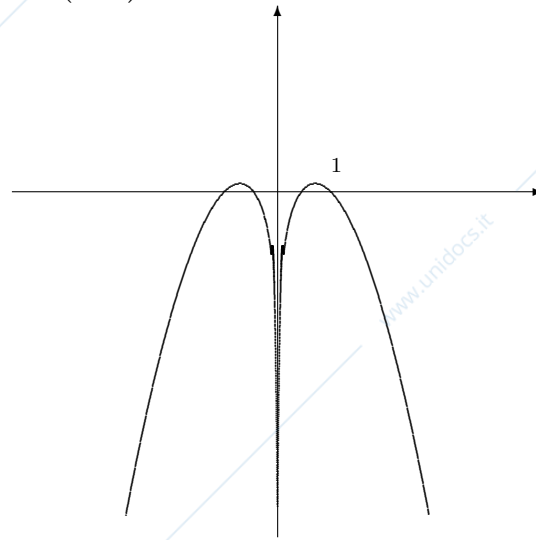
(d) Si ha  $f(\mathbf{R}^*) = ]-\infty, \frac{1}{2}(1 - \log 2)]$ . Quindi  $f$  ammette massimo e si ha  $\max(f) = \frac{1}{2}(1 - \log 2)$ ;  $f$  non ammette minimo.

(e) Sia  $x \in \mathbf{R}^*$ ; si ha  $f''(x) = -\frac{1}{x^2} - 2 < 0$ .

Quindi  $f$  è strettamente concava su  $] -\infty, 0[$  e su  $]0, +\infty[$ . Si ha quindi

$\mathcal{C}(\uparrow) = \emptyset, \mathcal{C}(\downarrow) = \emptyset, \mathcal{C}(\downarrow) = \{ ]-\infty, 0[, ]0, +\infty[ \}$ .

Si ha  $\frac{\sqrt{2}}{2} \approx .71$ ,  $f\left(\pm\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{1}{2} * 1 - \log 2 \approx .15$ .



6. **Esercizio.** Studiare la seguente funzione

$$f(x) = x^4 \log^3 x,$$

rispondendo alle seguenti domande:

- determinare il dominio di  $f$ ;
- calcolare i limiti di  $f$  nei punti frontiera del dominio;
- determinare l'insieme degli intervalli non banali massimali sui quali  $f$  è strettamente crescente (risp. strettamente decrescente);
- determinato il prolungamento continuo di  $f$  a  $[0, +\infty[$ , studiarne la derivabilità rispetto a  $\mathbf{R}$  in  $0$ ;
- determinare l'insieme degli intervalli non banali massimali sui quali  $f$  è strettamente convessa (risp. strettamente concava).

Disegnare approssimativamente il grafico di  $f$ .

**Risoluzione.**

- Si ha  $\text{dom}(f) = ]0, +\infty[$ .

(b) Si ha  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ ,  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$ .

(c) Sia  $x \in ]0, +\infty[$ ; si ha

$$f'(x) = 4x^3 \log^3 x + 3x^4 \log^2 x \frac{1}{x} = 4x^3 \log^3 x + 3x^3 \log^2 x = x^3 \log^2 x (4 \log x + 3).$$

Si ha  $f'(x) = 0$  se e solo se  $\log x = 0$  o  $4 \log x + 3 = 0$ , cioè se e solo se  $\log x = 0$  o  $\log x = -\frac{3}{4}$ , cioè se e solo se  $x = 1$  o  $x = e^{-\frac{3}{4}}$ . Si ha  $f'(x) > 0$  se e solo se  $e^{-\frac{3}{4}} < x < 1$  o  $x > 1$ . Si ha  $f'(x) < 0$  se e solo se  $0 < x < e^{-\frac{3}{4}}$ .

Quindi  $f$  è strettamente crescente su  $[e^{-\frac{3}{4}}, 1]$  e su  $[1, +\infty[$  e quindi su  $[e^{-\frac{3}{4}}, +\infty[$ ;  $f$  è strettamente decrescente su  $]0, e^{-\frac{3}{4}}$ . Si ha quindi

$$\mathcal{M}(\nearrow) = \{[e^{-\frac{3}{4}}, +\infty[ \}, \mathcal{M}(\rightarrow) = \emptyset,$$

$$\mathcal{M}(\searrow) = \{]0, e^{-\frac{3}{4}} \}.$$

(d) Il prolungamento continuo di  $f$  a  $[0, +\infty[$  è la funzione

$$g: [0, +\infty[ \rightarrow \mathbf{R}, x \rightarrow \begin{cases} x^4 \log^3 x & \text{per } x > 0 \\ 0 & \text{per } x = 0 \end{cases}.$$

Si ha

$$\lim_{x \rightarrow 0} f'(x) = \lim_{x \rightarrow 0} (4x^3 \log^3 x + 3x^3 \log^2 x) = 0.$$

Quindi  $g$  è derivabile in 0 e si ha  $g'(0) = 0$ .

(e) Sia  $x \in ]0, +\infty[$ ; si ha

$$f''(x) = 12x^2 \log^3 x + 12x^3 \log^2 x \frac{1}{x} + 9x^2 \log^2 x + 6x^3 \log x \frac{1}{x} = 12x^2 \log^3 x + 12x^2 \log^2 x + 9x^2 \log^2 x + 6x^2 \log x = 3x^2 \log x (4 \log^2 x + 7 \log x + 2).$$

Si ha  $f''(x) = 0$  se e solo se  $\log x = 0$  o  $4 \log^2 x + 7 \log x + 2 = 0$ , cioè se e solo se  $\log x = 0$  o  $\log x = \frac{-7 \pm \sqrt{17}}{8}$ , cioè se e solo se  $x = 1$  o  $x = e^{\frac{-7 - \sqrt{17}}{8}}$  o  $x = e^{\frac{-7 + \sqrt{17}}{8}}$ . Si ha  $f''(x) > 0$  se e solo se  $e^{\frac{-7 - \sqrt{17}}{8}} < x < e^{\frac{-7 + \sqrt{17}}{8}}$  o  $x > 1$ . Si ha  $f''(x) < 0$  se e solo se  $0 < x < e^{\frac{-7 - \sqrt{17}}{8}}$  o  $e^{\frac{-7 + \sqrt{17}}{8}} < x < 1$ .

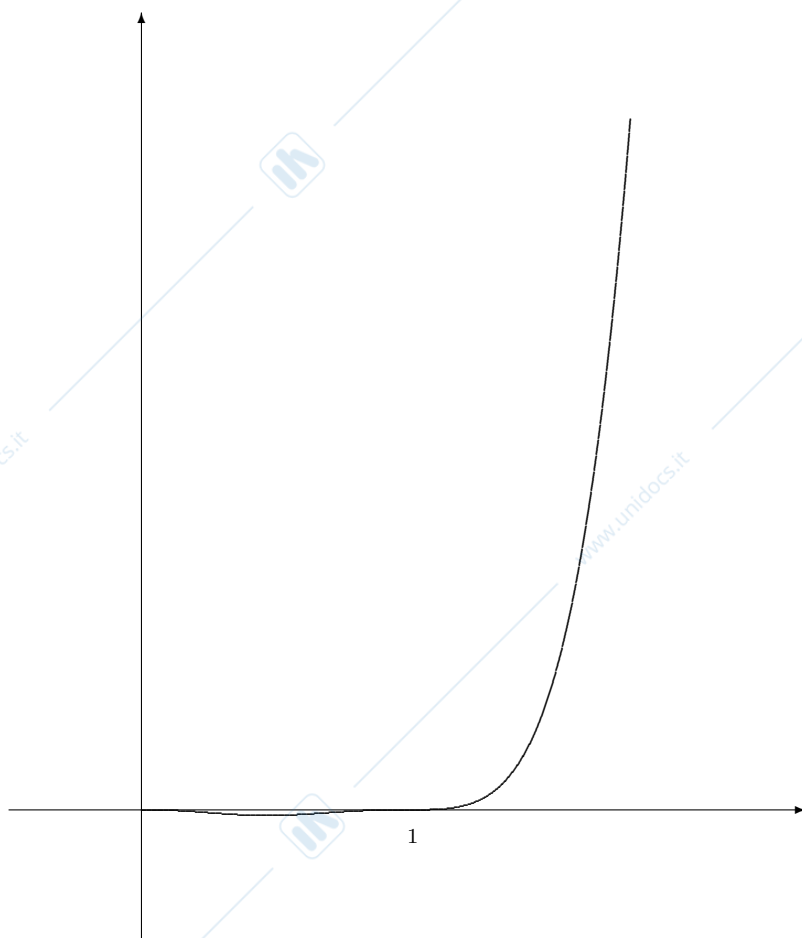
Quindi  $f$  è strettamente convessa su  $[e^{\frac{-7 - \sqrt{17}}{8}}, e^{\frac{-7 + \sqrt{17}}{8}}]$  e su  $[1, +\infty[$ ;  $f$  è strettamente concava su  $]0, e^{\frac{-7 - \sqrt{17}}{8}}$  e su  $[e^{\frac{-7 + \sqrt{17}}{8}}, 1]$ . Si ha quindi

$$\mathcal{C}(\uparrow) = \left\{ \left[ e^{\frac{-7 - \sqrt{17}}{8}}, e^{\frac{-7 + \sqrt{17}}{8}} \right], [1, +\infty[ \right\},$$

$$\mathcal{C}(\downarrow) = \emptyset,$$

$$\mathcal{C}(\downarrow) = \left\{ ]0, e^{\frac{-7 - \sqrt{17}}{8}} \right\}, \left[ e^{\frac{-7 + \sqrt{17}}{8}}, 1 \right] \right\}.$$

Si ha  $f(0) = 1$ ,  $e^{-\frac{3}{4}} \approx .47$ ,  $f\left(e^{-\frac{3}{4}}\right) = e^{-3} \left(-\frac{3}{4}\right)^3 = -\frac{27}{64} e^{-3} \approx -.02$ ,  $e^{\frac{-7 - \sqrt{17}}{8}} \approx .25$ ,  $f\left(e^{\frac{-7 - \sqrt{17}}{8}}\right) \approx -.01$ ,  $e^{\frac{-7 + \sqrt{17}}{8}} \approx .70$ ,  $f\left(e^{\frac{-7 + \sqrt{17}}{8}}\right) \approx -.01$ .



7. **Esercizio.** Studiare la seguente funzione

$$f(x) = (2x^2 - 1)e^{|2x+1|},$$

rispondendo alle seguenti domande:

- determinare il dominio di  $f$ ;
- calcolare i limiti di  $f$  nei punti frontiera del dominio;
- studiare la monotonia di  $f$  determinando gli insiemi  $\mathcal{M}(\nearrow)$ ,  $\mathcal{M}(\searrow)$ ,  $\mathcal{M}(\rightarrow)$ ;
- studiare la derivabilità rispetto a  $\overline{\mathbf{R}}$  di  $f$  in  $-\frac{1}{2}$ ;
- studiare la convessità di  $f$  determinando gli insiemi  $\mathcal{C}(\uparrow)$ ,  $\mathcal{C}(\downarrow)$ ,  $\mathcal{C}(\ddagger)$ .

Disegnare approssimativamente il grafico di  $f$ .

**Risoluzione.**

- (a) Si ha  $\text{dom}(f) = \mathbf{R}$ .  
 (b) Si ha  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ ,  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$ .  
 (c) Si ha

$$f(x) = \begin{cases} (2x^2 - 1)e^{2x+1} & \text{per } x \geq -\frac{1}{2} \\ (2x^2 - 1)e^{-2x-1} & \text{per } x \leq -\frac{1}{2} \end{cases}.$$

Supponiamo  $x > -\frac{1}{2}$ . Si ha

$$f'(x) = 4xe^{2x+1} + (2x^2 - 1)e^{2x+1} \cdot 2 = 2e^{2x+1}(2x^2 + 2x - 1).$$

Si ha  $f'(x) = 0$  se e solo se  $2x^2 + 2x - 1 = 0$ , cioè se e solo se  $x = \frac{-1 \pm \sqrt{3}}{2}$ ,  
 cioè, essendo  $x > -\frac{1}{2}$  se e solo se  $x = \frac{-1 + \sqrt{3}}{2}$ .

Si ha  $f'(x) > 0$  se e solo se  $2x^2 + 2x - 1 > 0$ , cioè se e solo se  $x < \frac{-1 - \sqrt{3}}{2}$   
 o  $x > \frac{-1 + \sqrt{3}}{2}$ , cioè, essendo  $x > -\frac{1}{2}$ , se e solo se  $x > \frac{-1 + \sqrt{3}}{2}$ .

Si ha  $f'(x) < 0$  se e solo se  $-\frac{1}{2} < x < \frac{-1 + \sqrt{3}}{2}$ .

Si ha quindi  $f$  strettamente crescente su  $[\frac{-1 + \sqrt{3}}{2}, +\infty[$  e  $f$  strettamente  
 decrescente su  $[-\frac{1}{2}, \frac{-1 + \sqrt{3}}{2}]$ .

Supponiamo  $x < -\frac{1}{2}$ . Si ha

$$f'(x) = 4xe^{-2x-1} + (2x^2 - 1)e^{-2x-1} \cdot (-2) = -2e^{-2x-1}(2x^2 - 2x - 1).$$

Si ha  $f'(x) = 0$  se e solo se  $2x^2 - 2x - 1 = 0$ , cioè se e solo se  $x = \frac{1 \pm \sqrt{3}}{2}$ ,  
 cioè, essendo  $x < -\frac{1}{2}$  mai.

Si ha  $f'(x) > 0$  se e solo se  $2x^2 + 2x - 1 < 0$ , cioè se e solo se  $\frac{1 - \sqrt{3}}{2} < x < \frac{1 + \sqrt{3}}{2}$ ,  
 cioè, essendo  $x < -\frac{1}{2}$  mai.

Si ha  $f'(x) < 0$  per ogni  $x < -\frac{1}{2}$ .

Quindi  $f$  è strettamente decrescente su  $] -\infty, -\frac{1}{2}]$ .

Essendo  $f$  strettamente decrescente su  $] -\infty, -\frac{1}{2}]$  e su  $[-\frac{1}{2}, \frac{-1 + \sqrt{3}}{2}]$ ,  $f$  è  
 strettamente decrescente su  $] -\infty, \frac{-1 + \sqrt{3}}{2}]$ .

Si ha quindi

$$\mathcal{M}(\nearrow) = \left\{ \left[ \frac{-1 + \sqrt{3}}{2}, +\infty[ \right\}, \quad \mathcal{M}(\rightarrow) = \emptyset, \quad \mathcal{M}(\searrow) = \left\{ ] -\infty, \frac{-1 + \sqrt{3}}{2} \right\} \right\}.$$

- (d) Si ha

$$\lim_{x \rightarrow -\frac{1}{2}^+, x > -\frac{1}{2}} f'(x) = \lim_{x \rightarrow -\frac{1}{2}^+, x > -\frac{1}{2}} 2e^{2x+1}(x^2 + 2x - 1) = -3.$$

Quindi  $f$  è derivabile da destra in  $-\frac{1}{2}$  e  $f'_+(-\frac{1}{2}) = -3$ .

Si ha

$$\lim_{x \rightarrow -\frac{1}{2}^-, x < -\frac{1}{2}} f'(x) = \lim_{x \rightarrow -\frac{1}{2}^-, x < -\frac{1}{2}} -2e^{-2x-1}(x^2 - 2x - 1) = -1.$$

Quindi  $f$  è derivabile da sinistra in  $-\frac{1}{2}$  e  $f'_-(-\frac{1}{2}) = -1$ .

Essendo  $f'_+(-\frac{1}{2}) \neq f'_-(-\frac{1}{2})$ ,  $f$  non è derivabile in  $-\frac{1}{2}$ .

- (e) Supponiamo  $x > -\frac{1}{2}$ . Si ha

$$f''(x) = 2((4x + 2)e^{2x+1} + (2x^2 + 2x - 1)e^{2x+1} \cdot 2) = 4e^{2x+1}(2x + 1 + 2x^2 + 2x - 1) = 4e^{2x+1}(2x^2 + 4x) = 8e^{2x+1}(x^2 + 2x).$$

## 9.11. STUDIO DI FUNZIONE

119

Si ha  $f''(x) = 0$  se e solo se  $x^2 + 2x = 0$ , cioè se e solo se  $x = 0$  o  $x = -2$ ,  
cioè, essendo  $x > -\frac{1}{2}$  se e solo se  $x = 0$ .

Si ha  $f'(x) > 0$  se e solo se  $x^2 + 2x > 0$ , cioè se e solo se  $x < -2$  o  $x > 0$ ,  
cioè, essendo  $x > -\frac{1}{2}$ , se e solo se  $x > 0$ .

Si ha  $f''(x) < 0$  se e solo se  $-\frac{1}{2} < x < 0$ .

Si ha quindi  $f$  strettamente convessa su  $[0, +\infty[$  e  $F$  strettamente concava  
su  $[-\frac{1}{2}, 0]$ .

Supponiamo  $x < -\frac{1}{2}$ . Si ha

$$f''(x) = -2((4x - 2)e^{-2x-1} + (2x^2 - 2x - 1)e^{-2x-1} \cdot (-2)) =$$

$$4e^{-2x-1}(-2x + 1 + 2x^2 - 2x - 1) = 4e^{-2x-1}(2x^2 - 4x) = 8e^{-2x-1}(x^2 - 2x).$$

Si ha  $f''(x) = 0$  se e solo se  $x^2 - 2x = 0$ , cioè se e solo se  $x = 0$  o  $x = 2$ ,  
cioè, essendo  $x < -\frac{1}{2}$  mai.

Si ha  $f'(x) > 0$  se e solo se  $x^2 - 2x > 0$ , cioè se e solo se  $x < 0$  o  $x > -2$ ,  
cioè, essendo  $x < -\frac{1}{2}$ , sempre.

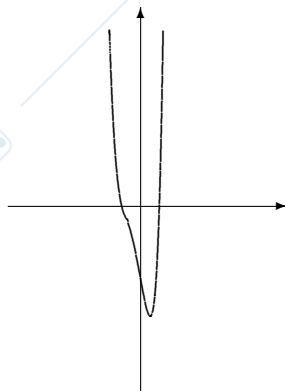
Si ha  $f''(x) < 0$  mai.

Quindi  $f$  strettamente convessa su  $] -\infty, -\frac{1}{2}]$

Si ha quindi

$$C(\uparrow) = \{ ] -\infty, -\frac{1}{2} ], [0, +\infty[ \}, \quad C(\downarrow) = \emptyset, \quad C(\downarrow) = \{ [-\frac{1}{2}, 0] \}.$$

Si ha  $e \approx 2.72$ ,  $\frac{-1+\sqrt{3}}{2} \approx 0.37$ ,  $f(\frac{-1+\sqrt{3}}{2}) \approx -4.14$ ,  $\frac{1}{\sqrt{2}} \approx 0.71$ .



8. **Esercizio.** Studiare la seguente funzione

$$f(x) = (1 - x)e^{-\frac{1}{2+x}},$$

rispondendo alle seguenti domande:

- determinare il dominio di  $f$ ;
- calcolare i limiti di  $f$  nei punti frontiera del dominio;
- dire se  $f$  ammette asintoti in  $+\infty$  e in  $-\infty$  e in caso affermativo determinarli;

- (d) studiare la monotonia di  $f$  determinando gli insiemi  $\mathcal{M}(\nearrow)$ ,  $\mathcal{M}(\searrow)$ ,  $\mathcal{M}(\rightarrow)$ ;
- (e) determinare il prolungamento continuo di  $f|] - 2, +\infty[$  in  $-2$  e studiarne la derivabilità rispetto a  $\mathbf{R}$  in  $-2$ ;
- (f) studiare la convessità di  $f$  determinando gli insiemi  $\mathcal{C}(\uparrow)$ ,  $\mathcal{C}(\downarrow)$ ,  $\mathcal{C}(\ddagger)$ .

**Disegnare** approssimativamente il grafico di  $f$ . Per disegnare il grafico di  $f$  si può tenere conto delle seguenti approssimazioni  $f(0) \approx 0.61$ ,  $\frac{-5-\sqrt{13}}{2} \approx -4.30$ ,  $f(\frac{-5-\sqrt{13}}{2}) \approx 8.19$ ,  $\frac{-5+\sqrt{13}}{2} \approx -0.70$ ,  $f(\frac{-5+\sqrt{13}}{2}) \approx 0.79$ ,  $-\frac{11}{7} \approx -1.57$ ,  $f(-\frac{11}{7}) \approx 0.25$ .

**Risoluzione.**

- (a) Si ha  $\text{dom}(f) = \mathbf{R} - \{-2\}$ .
- (b) Si ha  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$ ,  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$ ,  $\lim_{x \rightarrow -2^+} f(x) = 0$ ,  $\lim_{x \rightarrow -2^-} f(x) = +\infty$ ,
- (c) Si ha  $f(x) \sim_{x \rightarrow +\infty} -x$ ; si ha

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) + x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} ((1-x)e^{-\frac{1}{2+x}} + x).$$

Per  $y \rightarrow 0$  si ha

$$e^y = 1 + y + o(y).$$

Quindi per  $x \rightarrow +\infty$  si ha

$$e^{-\frac{1}{2+x}} = 1 - \frac{1}{2+x} + o\left(\frac{1}{x}\right).$$

Si ha quindi

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left( (1-x)e^{-\frac{1}{2+x}} + x \right) =$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left( (-x+1) \left( 1 - \frac{1}{2+x} + o\left(\frac{1}{x}\right) \right) + x \right) =$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left( -x + \frac{x}{2+x} + o(1) + 1 + x \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \frac{x}{2+x} + o(1) + 1 \right) = 2.$$

Quindi  $f$  ammette asintoto per  $x \rightarrow +\infty$  e l'asintoto è la retta

$$y = -x + 2.$$

Procedendo nello stesso modo, si vede che  $f$  ammette asintoto per  $x \rightarrow -\infty$  e che l'asintoto è la retta

$$y = -x + 2.$$

- (d) Per ogni  $x \in \text{dom}(f)$  si ha

$$f'(x) = -e^{-\frac{1}{2+x}} + (1-x)e^{-\frac{1}{2+x}} \frac{1}{(2+x)^2} = e^{-\frac{1}{2+x}} \left( \frac{1-x}{(2+x)^2} - 1 \right) =$$

$$-e^{-\frac{1}{2+x}} \frac{x^2 + 5x + 3}{(2+x)^2}.$$

## 9.11. STUDIO DI FUNZIONE

121

Si ha  $f'(x) = 0$  se e solo se  $x^2 + 5x + 3 = 0$ , cioè se e solo se  $x = \frac{-5 \pm \sqrt{13}}{2}$ .

Si ha  $f'(x) > 0$  se e solo se  $x^2 + 5x + 3 < 0$ , cioè se e solo se  $\frac{-5 - \sqrt{13}}{2} < x < \frac{-5 + \sqrt{13}}{2}$ .

Si ha  $f'(x) < 0$  se e solo se  $x < \frac{-5 - \sqrt{13}}{2}$  o  $x > \frac{-5 + \sqrt{13}}{2}$ .

Si ha quindi  $f$  è strettamente crescente su  $[\frac{-5 - \sqrt{13}}{2}, -2[$  e su  $] -2, \frac{-5 + \sqrt{13}}{2}]$ ;  $f$  è strettamente decrescente su  $] -\infty, \frac{-5 - \sqrt{13}}{2}]$  e su  $[\frac{-5 + \sqrt{13}}{2}, +\infty[$ .

Si ha quindi

$$\mathcal{M}(\nearrow) = \left\{ \left[ \frac{-5 - \sqrt{13}}{2}, -2[ \right], \left] -2, \frac{-5 + \sqrt{13}}{2} \right] \right\},$$

$$\mathcal{M}(\rightarrow) = \emptyset.$$

$$\mathcal{M}(\searrow) = \left\{ \left] -\infty, \frac{-5 - \sqrt{13}}{2} \right], \left[ \frac{-5 + \sqrt{13}}{2}, +\infty \right[ \right\}.$$

(e) Il prolungamento continuo di  $f|_{]-2, +\infty[}$  in  $-2$  è la funzione

$$g : ]-2, +\infty[ \rightarrow \mathbf{R}, x \rightarrow \begin{cases} f(x) & \text{per } x \in ]-2, +\infty[ \\ 0 & \text{per } x = -2 \end{cases}.$$

Si ha

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -2, x \neq -2} g'(x) &= \lim_{x \rightarrow -2, x \neq -2} \left( -e^{-\frac{1}{2+x}} \frac{x^2 + 5x + 3}{(2+x)^2} \right) = \\ &= \lim_{x \rightarrow -2, x \neq -2} \left( \left( -e^{-\frac{1}{2+x}} \left( -\frac{1}{2-x} \right)^2 \right) (x^2 + 5x + 3) \right). \end{aligned}$$

Si ha

$$\lim_{x \rightarrow -2, x \neq -2} \left( -e^{-\frac{1}{2+x}} \left( -\frac{1}{2-x} \right)^2 \right) = \lim_{y \rightarrow -\infty} (-e^y y^2) = 0$$

e

$$\lim_{x \rightarrow -2, x \neq -2} (x^2 + 5x + 3) = -3.$$

Si ha quindi

$$\lim_{x \rightarrow -2, x \neq -2} g'(x) = 0(-3) = 0.$$

Quindi  $g$  è derivabile in  $-2$  e  $g'(-2) = 0$ .

(f) Per ogni  $x \in \text{dom}(f)$  si ha

$$\begin{aligned} f''(x) &= \\ &- \left( e^{-\frac{1}{2+x}} \frac{1}{(2+x)^2} \frac{x^2+5x+3}{(2+x)^2} + e^{-\frac{1}{2+x}} \frac{(2x+5)(2+x)^2 - 2(2+x)(x^2+5x+3)}{(2+x)^4} \right) = \\ &- e^{-\frac{1}{2+x}} \frac{x^2+5x+3+(2x+5)(4+4x+x^2) - (4+2x)(x^2+5x+3)}{(2+x)^4} = \\ &- e^{-\frac{1}{2+x}} \cdot \frac{x^2+5x+3+8x+8x^2+2x^3+20+20x+5x^2-4x^2-20x-12-2x^3-10x^2-6x}{(2+x)^4} \\ &= -e^{-\frac{1}{2+x}} \frac{7x+11}{(2+x)^4}. \end{aligned}$$

Si ha  $f''(x) = 0$  se e solo se  $7x + 11 = 0$ , cioè se e solo se  $x = -\frac{11}{7}$ .

Si ha  $f''(x) > 0$  se e solo se  $7x + 11 < 0$ , cioè se e solo se  $x < -\frac{11}{7}$ .

Si ha  $f''(x) < 0$  se e solo se  $x > -\frac{11}{7}$ .

Quindi  $f$  strettamente convessa su  $] -\infty, -2[$  e su  $] -2, -\frac{11}{7}[$ ,  $f$  è strettamente concava su  $[-\frac{11}{7}, +\infty[$ .

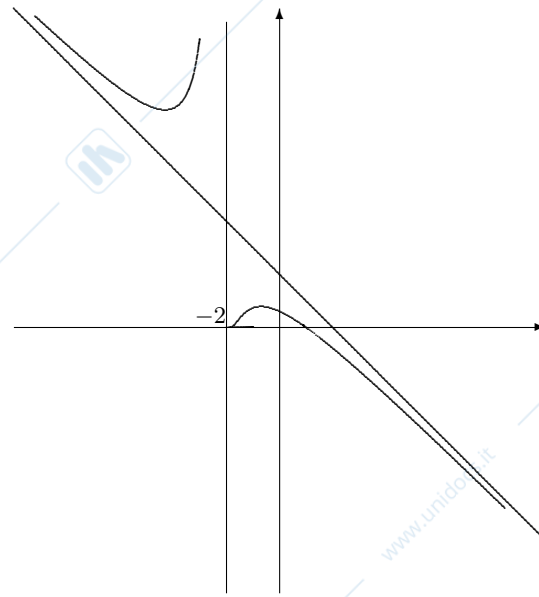
Si ha quindi

$$\mathcal{C}(\uparrow) = \left\{ ] -\infty, -2[, ] -1, -\frac{11}{7}[ \right\},$$

$$\mathcal{C}(\downarrow) = \emptyset,$$

$$\mathcal{C}(\downarrow) = \left\{ [-\frac{11}{7}, +\infty[ \right\}.$$

$$\begin{aligned} \text{Si ha } f(0) &= \frac{1}{\sqrt{e}} \approx 0.61, \quad \frac{-5-\sqrt{13}}{2} \approx -4.30, \quad \frac{-5+\sqrt{13}}{2} \approx 0.70, \\ f\left(\frac{-5-\sqrt{13}}{2}\right) &= \frac{7+\sqrt{13}}{2} e^{-\frac{2}{1+\sqrt{13}}} \approx 8.19, \\ f\left(\frac{-5+\sqrt{13}}{2}\right) &= \frac{7-\sqrt{13}}{2} e^{-\frac{2}{1-\sqrt{13}}} \approx 0.79, \\ \frac{-11}{7} \approx -1.57, \quad f\left(\frac{-11}{7}\right) &= \frac{18}{7} e^{-\frac{7}{3}} \approx 0.25. \end{aligned}$$



9. **Esercizio.** Studiare la seguente funzione

$$f(x) = (1 - x)e^{\frac{x}{x+1}},$$

rispondendo alle seguenti domande:

- determinare il dominio di  $f$ ;
- calcolare i limiti di  $f$  nei punti frontiera del dominio;
- dire se  $f$  ammette asintoti in  $+\infty$  e in  $-\infty$  e in caso affermativo determinarli;
- studiare la monotonia di  $f$  determinando gli insiemi  $\mathcal{M}(\nearrow)$ ,  $\mathcal{M}(\searrow)$ ,  $\mathcal{M}(\rightarrow)$ ;
- determinare il prolungamento continuo di  $f|] - 1, +\infty[$  in  $-1$  e studiarne la derivabilità rispetto a  $\overline{\mathbf{R}}$  in  $-1$ ;
- studiare la convessità di  $f$  determinando gli insiemi  $\mathcal{C}(\uparrow)$ ,  $\mathcal{C}(\downarrow)$ ,  $\mathcal{C}(\ddagger)$ .

**Disegnare** approssimativamente il grafico di  $f$ . Per disegnare il grafico di  $f$  si può tenere conto delle seguenti approssimazioni  $f(-3) \approx 17.93$ ,  $\frac{3}{5} = 0.6$ ,  $f(-\frac{3}{5}) \approx 0.36$ .

**Risoluzione.**

- Si ha  $\text{dom}(f) = \mathbf{R} - \{-1\}$ .
- Si ha  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$ ,  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$ ,  $\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = 0$ ,  $\lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = +\infty$ ,

(c) Si ha  $f(x) \sim_{x \rightarrow +\infty} -ex$ ; si ha  
 $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) + ex) = \lim_{x \rightarrow +\infty} ((1-x)e^{\frac{x}{x+1}} + ex) =$   
 $\lim_{x \rightarrow +\infty} ((1-x)e^{\frac{x}{x+1}-1+1} + ex) = \lim_{x \rightarrow +\infty} ((1-x)e e^{-\frac{1}{x+1}-1+1} + ex).$

Per  $y \rightarrow 0$  si ha  
 $e^y = 1 + y + o(y).$

Quindi per  $x \rightarrow +\infty$  si ha

$$e^{-\frac{1}{x+1}} = 1 - \frac{1}{x+1} + o\left(\frac{1}{x}\right).$$

Si ha quindi

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left( (1-x)e e^{-\frac{1}{x+1}-1+1} + ex \right) =$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left( (-x+1)e \left( 1 - \frac{1}{x+1} + o\left(\frac{1}{x}\right) \right) + ex \right) =$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left( -ex + \frac{ex}{x+1} + o(1) + e + ex \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left( e \frac{ex}{x+1} + o(1) \right) = 2e.$$

Quindi  $f$  ammette asintoto per  $x \rightarrow +\infty$  e l'asintoto è la retta

$$y = -ex + 2e.$$

Procedendo nello stesso modo, si vede che  $f$  ammette asintoto per  $x \rightarrow -\infty$  e che l'asintoto è la retta

$$y = -ex + 2e.$$

(d) Per ogni  $x \in \text{dom}(f)$  si ha

$$f'(x) = -e^{\frac{x}{x+1}} + (1-x)e^{\frac{x}{x+1}} \frac{1}{(x+1)^2} = e^{\frac{x}{x+1}} \left( -1 + \frac{1-x}{(x+1)^2} \right) =$$

$$-e^{\frac{1}{2+x}} \frac{x^2 + 3x}{(x+1)^2}.$$

Si ha  $f'(x) = 0$  se e solo se  $x^2 + 3x = 0$ , cioè se e solo se  $x = 0$  o  $x = -3$ .

Si ha  $f'(x) > 0$  se e solo se  $x^2 + 3x < 0$ , cioè se e solo se  $-3 < x < 0$ .

Si ha  $f'(x) < 0$  se e solo se  $x < -3$  o  $x > 0$ .

Si ha quindi  $f$  è strettamente crescente su  $[-3, -1[$  e su  $] -1, 0]$ ;  $f$  è strettamente decrescente su  $] -\infty, -3]$  e su  $[0, +\infty[$ .

Si ha quindi

$$\mathcal{M}(\nearrow) = \{[-3, -1[, ] -1, 0]\},$$

$$\mathcal{M}(\rightarrow) = \emptyset.$$

$$\mathcal{M}(\searrow) = \{]-\infty, -3], [0, +\infty[ \}.$$

## 9.11. STUDIO DI FUNZIONE

125

(e) Il prolungamento continuo di  $f]$   $-1, +\infty[$  in  $-1$  è la funzione

$$g : [-1, +\infty[ \rightarrow \mathbf{R}, x \rightarrow \begin{cases} f(x) & \text{per } x \in ]-1, +\infty \\ 0 & \text{per } x = -1 \end{cases} .$$

Si ha

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -1, x \neq -1} g'(x) &= \lim_{x \rightarrow -1, x \neq -1} \left( -e^{-\frac{x}{x+1}} \frac{x^2 + 3x}{(x+1)^2} \right) = \\ \lim_{x \rightarrow -1, x \neq -1} \left( \left( -e^{-\frac{x}{x+1}} \left( \frac{x}{x+1} \right)^2 \right) \frac{(x+1)^2 x^2 + 3x}{x^2 (x+1)^2} \right) &= \\ \lim_{x \rightarrow -1, x \neq -1} \left( \left( -e^{-\frac{x}{x+1}} \left( \frac{x}{x+1} \right)^2 \right) \frac{x^2 + 3x}{x^2} \right) . \end{aligned}$$

Si ha

$$\lim_{x \rightarrow -1, x \neq -1} \left( -e^{-\frac{x}{x+1}} \left( \frac{x}{x+1} \right)^2 \right) = \lim_{y \rightarrow -\infty} (-e^y y^2) = 0$$

e

$$\lim_{x \rightarrow -1, x \neq -1} \frac{x^2 + 3x}{x^2} = -2 .$$

Si ha quindi

$$\lim_{x \rightarrow -2, x \neq -2} g'(x) = 0(-2) = 0 .$$

Quindi  $g$  è derivabile in  $-1$  e  $g'(-1) = 0$ .

(f) Per ogni  $x \in \text{dom}(f)$  si ha

$$\begin{aligned} f''(x) &= - \left( e^{-\frac{x}{x+1}} \frac{1}{(x+1)^2} \frac{x^2 + 3x}{(x+1)^2} + \right. \\ &e^{-\frac{x}{x+1}} \frac{(2x+3)(x+1)^2 - 2(x+1)(x^2 + 3x)}{(x+1)^4} \left. \right) = \\ -e^{-\frac{x}{x+1}} \frac{x^2 + 3x + (2x+3)(x^2 + 2x + 1) - (2x+2)(x^2 + 3x)}{(x+1)^4} &= \\ -e^{-\frac{x}{x+1}} \cdot \frac{x^2 + 3x + 2x^3 + 4x^2 + 2x + 3x^2 + 6x + 3 - 2x^3 - 6x^2 - 2x^2 - 6x}{(x+1)^4} &= \\ = -e^{-\frac{x}{x+1}} \frac{5x + 3}{(x+1)^4} . \end{aligned}$$

Si ha  $f''(x) = 0$  se e solo se  $5x + 3 = 0$ , cioè se e solo se  $x = -\frac{3}{5}$ .

Si ha  $f'(x) > 0$  se e solo se  $5x + 3 < 0$ , cioè se e solo se  $x < -\frac{3}{5}$ .

Si ha  $f''(x) < 0$  se e solo se  $x > -\frac{3}{5}$ .

Quindi  $f$  strettamente convessa su  $]-\infty, -1[$  e su  $]-1, -\frac{3}{5}]$ ,  $f$  è strettamente concava su  $[-\frac{3}{5}, +\infty[$ .

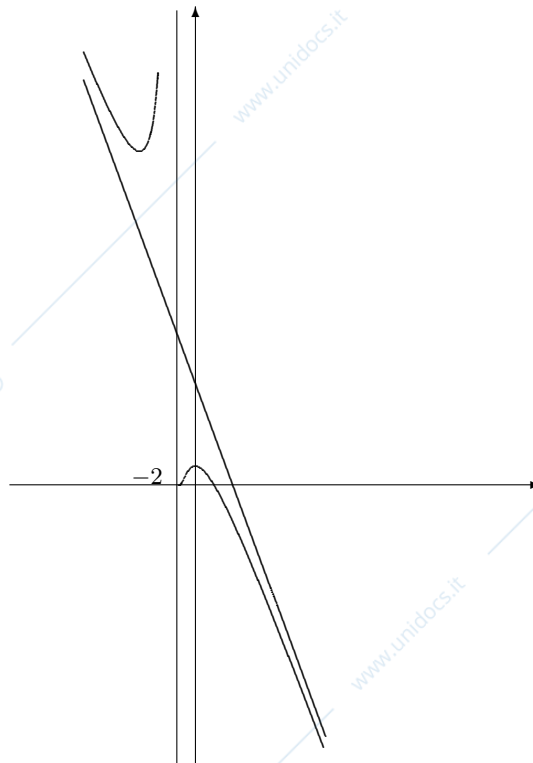
Si ha quindi

$$\mathcal{C}(\uparrow) = \left\{ ]-\infty, -1[, ]-1, -\frac{3}{5}] \right\},$$

$$\mathcal{C}(\downarrow) = \emptyset,$$

$$\mathcal{C}(\downarrow) = \left\{ [-\frac{3}{5}, +\infty[ \right\}.$$

Si ha  $f(-3) = 4e^{\frac{3}{2}} \approx 17.93$ ,  $f(0) = 1$ ,  $\frac{3}{5} = 0.6$ ,  $f(-\frac{3}{5}) = \frac{8}{5}e^{-\frac{3}{2}} \approx 0.36$ .



## Capitolo 10

# Argomento di un numero complesso

### 10.1 Argomento di un numero complesso

1. **Esercizio.** Trovare un argomento di ciascuno dei seguenti numeri complessi

(a)  $-1 - \sqrt{3}i$ ,

(b)  $-\sqrt{3} - i$ ,

esprimendolo senza l'uso di funzioni trascendenti.

**Risoluzione.**

(a) Si ha  $|-1 - \sqrt{3}i| = 2$ .

Si ha  $-1 - \sqrt{3}i = 2\left(-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)$ ; il numero reale  $\theta$  è un argomento di  $-1 - \sqrt{3}i$  se e solo se  $\cos\theta = -\frac{1}{2}$  e  $\sin\theta = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ ; quindi se e solo se  $\theta = -\frac{2}{3}\pi + 2k\pi$ .

Si può quindi scegliere  $\theta = -\frac{2}{3}\pi$ .

(b) Si ha  $|\sqrt{3} - i| = 2$ .

Si ha  $\sqrt{3} - i = 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i\right) = 2\left(\cos\left(-\frac{1}{6}\pi\right) + i\sin\left(-\frac{1}{6}\pi\right)\right)$ .

Quindi si ha  $-\frac{5}{6}\pi \in \arg(\sqrt{3} - i)$ .

2. **Esercizio.** Trovare un numero complesso  $z$  tale che 2 sia un argomento di  $z$ .

**Risoluzione.** Si può prendere  $z = e^{2i}$ .

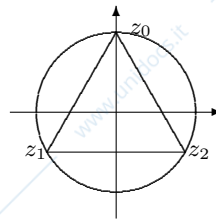
### 10.2 Radici complesse

1. **Esercizio.** Risolvere le seguenti equazioni complesse, esprimendo le soluzioni senza l'uso di funzioni trascendenti:

- (a)  $z^3 = -27i$ ;  
 (b)  $z^3 = -27$ ;  
 (c)  $z^6 = -64i$ ;  
 (d)  $z^2 = \sqrt{3} + i$ ;  
 (e)  $z^4 = 20i$ ;  
 (f)  $z^2 = -\sqrt{3} + i$ .

**Risoluzione.**

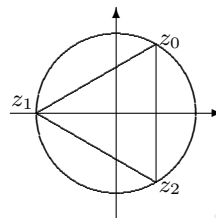
- (a) Si ha  $|-27i| = 27$ ,  $\frac{3}{2}\pi \in \arg(-27i)$ . Si ha  $\sqrt[3]{27} = 3$  e  $\frac{1}{3}\frac{3}{2}\pi = \frac{1}{2}\pi$ .



Si ha quindi

$$\begin{aligned} z_0 &= 3i, \\ z_1 &= 3\left(-\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i\right) = -\frac{3}{2}\sqrt{3} - \frac{3}{2}i, \\ z_2 &= \frac{3}{2}\sqrt{3} - \frac{3}{2}i. \end{aligned}$$

- (b) Si ha  $|-27| = 27$ ,  $\pi \in \arg(-27)$ . Si ha  $\sqrt[3]{27} = 3$ .



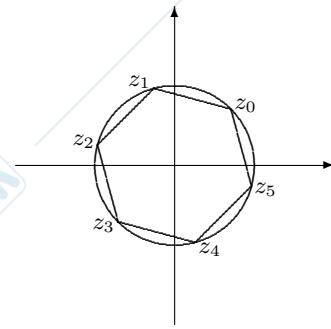
Si ha quindi

$$\begin{aligned} z_0 &= 3\left(\frac{1}{2} + \sqrt{3}i\right) = \frac{3}{2} + \frac{3}{2}\sqrt{3}i, \\ z_1 &= -3, \\ z_2 &= \frac{3}{2} - \frac{3}{2}\sqrt{3}i. \end{aligned}$$

- (c) Si ha  $|-64i| = 64$ ,  $\frac{3}{2}\pi \in \arg(-64i)$ . Si ha  $\sqrt[6]{64} = 2$  e  $\frac{1}{6}\frac{3}{2}\pi = \frac{1}{4}\pi$ .

Si ha quindi

$$z = 2e^{(\frac{\pi}{4} + \frac{2k\pi}{6})i} = 2e^{(\frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{3})i}, \quad k = 0, 1, 2, 3, 4, 5.$$



Si ha quindi

$$z_0 = 2(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4}) = 2(\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i) = \sqrt{2} + \sqrt{2}i,$$

$$z_1 = 2(\cos(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{3}) + i \sin(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{3})) = 2(\frac{\sqrt{2}}{2} \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} \frac{\sqrt{3}}{2} + i(\frac{\sqrt{2}}{2} \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} \frac{\sqrt{3}}{2})) = 2(\frac{\sqrt{2}}{4} - \frac{\sqrt{6}}{4} + i(\frac{\sqrt{2}}{4} + \frac{\sqrt{6}}{4})) = \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{6}}{2} + i(\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{6}}{2}).$$

$$z_2 = 2(\cos(\frac{\pi}{4} + 2\frac{\pi}{3}) + i \sin(\frac{\pi}{4} + 2\frac{\pi}{3})) =$$

$$2(\frac{\sqrt{2}}{2}(-\frac{1}{2}) - \frac{\sqrt{2}}{2} \frac{\sqrt{3}}{2} + i(\frac{\sqrt{2}}{2}(-\frac{1}{2}) + \frac{\sqrt{2}}{2} \frac{\sqrt{3}}{2})) = 2(-\frac{\sqrt{2}}{4} - \frac{\sqrt{6}}{4} + i(-\frac{\sqrt{2}}{4} + \frac{\sqrt{6}}{4})) = -\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{6}}{2} + i(-\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{6}}{2}).$$

$$z_3 = -\sqrt{2} - \sqrt{2}i,$$

$$z_4 = \frac{-\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{6}}{2} + i(-\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{6}}{2}).$$

$$z_5 = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{6}}{2} + i(\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{6}}{2}).$$

(d) Si ha  $|\sqrt{3} + i| = \sqrt{3+1} = \sqrt{4} = 2$ .

Si ha  $\sqrt{3} + i = 2(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i)$ .

Se  $t \in \mathbf{R}$ , si ha  $t \in \arg(\sqrt{3}i)$  se e solo se

$$\begin{cases} \cos t = \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \sin t = \frac{1}{2} \end{cases}.$$

Si può scegliere  $t = \frac{\pi}{6}$ .

Si ha quindi

$$z = \pm \sqrt{2} (\cos(\frac{1}{2} \frac{\pi}{6}) + i \sin(\frac{1}{2} \frac{\pi}{6})) = \pm \sqrt{2} \left( \sqrt{\frac{1+\cos \frac{\pi}{6}}{2}} + i \sqrt{\frac{1-\cos \frac{\pi}{6}}{2}} \right) =$$

$$\pm \sqrt{2} \left( \sqrt{\frac{1+\frac{\sqrt{3}}{2}}{2}} + i \sqrt{\frac{1-\frac{\sqrt{3}}{2}}{2}} \right) \pm \sqrt{2} \left( \sqrt{\frac{2+\sqrt{3}}{4}} + i \sqrt{\frac{2-\sqrt{3}}{4}} \right) =$$

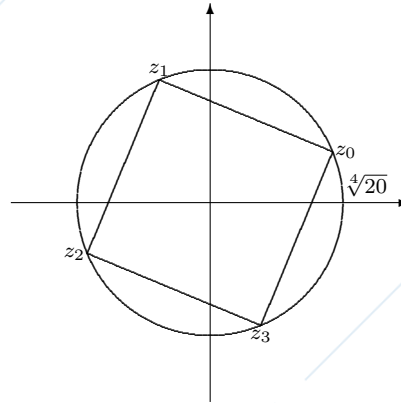
$$\pm \left( \sqrt{\frac{(2+\sqrt{3})^2}{4}} + i \sqrt{\frac{(2-\sqrt{3})^2}{4}} \right) = \pm \left( \sqrt{\frac{2+\sqrt{3}}{2}} + i \sqrt{\frac{2-\sqrt{3}}{2}} \right).$$

L'insieme delle soluzioni dell'equazione è quindi

$$\left\{ \sqrt{\frac{2+\sqrt{3}}{2}} + i \sqrt{\frac{2-\sqrt{3}}{2}}, -\sqrt{\frac{2+\sqrt{3}}{2}} - i \sqrt{\frac{2-\sqrt{3}}{2}} \right\}.$$

(e) Si ha  $|20i| = 20$  e  $\frac{\pi}{2} \in \arg(20i)$ .

Si ha  $z_k = \sqrt[4]{20}e^{i(\frac{\pi}{8} + k\frac{\pi}{2})} = \sqrt[4]{20}(\cos(\frac{\pi}{8} + k\frac{\pi}{2}) + i\sin(\frac{\pi}{8} + k\frac{\pi}{2}))$ , per un  $k = 0, 1, 2, 3$ .



Si ha

$$\begin{aligned} z_0 &= \sqrt[4]{20}(\cos \frac{\pi}{8} + i \sin \frac{\pi}{8}) = \sqrt[4]{20}(\cos(\frac{1}{2}\frac{\pi}{4}) + i \sin(\frac{1}{2}\frac{\pi}{4})) = \\ &= \sqrt[4]{20}(\sqrt{\frac{1+\cos \frac{\pi}{2}}{2}} + i\sqrt{\frac{1-\cos \frac{\pi}{2}}{2}}) = \sqrt[4]{20}(\sqrt{\frac{1+\sqrt{2}}{2}} + i\sqrt{\frac{1-\sqrt{2}}{2}}) = \\ &= \sqrt[4]{20}(\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2} + i\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}). \end{aligned}$$

$$z_1 = \sqrt[4]{20}(-\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2} + i\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2});$$

$$z_2 = \sqrt[4]{20}(-\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2} - i\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2});$$

$$z_3 = \sqrt[4]{20}(\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2} - i\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2});$$

(f) Si ha  $|\sqrt{3} + i| = 2$ .

$$\text{Si ha } -\sqrt{3} + i = 2\left(-\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right).$$

Se  $t \in \mathbf{R}$  si ha  $t \in \arg(-\sqrt{3} + i)$  se e solo se

$$\begin{cases} \cos t = -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \sin t = \frac{1}{2} \end{cases}; \text{ si ha quindi } \frac{5}{6}\pi \in \arg(-\sqrt{3} + i).$$

Si ha quindi

$$z = \pm\sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{5}{6}\pi\right) + i\sin\left(\frac{5}{6}\pi\right)\right) =$$

$$\pm\sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{12}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{12}\right)\right) = \pm\sqrt{2}\left(\sin\frac{\pi}{12} + i\cos\frac{\pi}{12}\right) =$$

$$\pm\sqrt{2}\left(\sqrt{\frac{1-\cos\frac{\pi}{6}}{2}} + i\sqrt{\frac{1+\cos\frac{\pi}{6}}{2}}\right) =$$

$$\pm\sqrt{2}\left(\sqrt{\frac{1-\frac{\sqrt{3}}{2}}{2}} + i\sqrt{\frac{1+\frac{\sqrt{3}}{2}}{2}}\right) = \pm\sqrt{2}\left(\sqrt{\frac{2-\sqrt{3}}{4}} + i\sqrt{\frac{2+\sqrt{3}}{4}}\right) =$$

$$\pm \left( \sqrt{\frac{2 - \sqrt{3}}{2}} + i \sqrt{\frac{2 + \sqrt{3}}{2}} \right).$$

2. **Esercizio.** Risolvere le seguenti equazioni complesse:

(a)  $z^3 = -1 - \sqrt{3}i;$

(b)  $z^5 = -\sqrt{3} - i;$

(c)  $z^3 = 7 - 3i;$

(d)  $z^3 = 5 - 4i;$

(e)  $z^4 = -5 + 3i;$

(f)  $z^2 = -5 + 7i;$

(g)  $z^2 = e^i;$

(h)  $z^3 + iz = 0.$

**Risoluzione.**

(a) Si ha  $|-1 - \sqrt{3}i| = 2$  e  $-\frac{2}{3}\pi \in \arg(-1 - \sqrt{3}i)$ ; quindi si ha

$$z = \sqrt[3]{2}e^{i\frac{-\frac{2}{3}\pi + 2k\pi}{3}} \text{ per un } k = 0, 1, 2.$$

(b) Si ha  $|-\sqrt{3} - i| = 2$ ; si ha

$$-\sqrt{3} - i = 2\left(-\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i\right);$$

il numero reale  $t$  è un argomento di  $-\sqrt{3} - i$  se e solo se

$$\begin{cases} \cos t = -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \sin t = -\frac{1}{2} \end{cases};$$

si può scegliere  $t = \frac{7}{6}\pi$ ; quindi si ha

$$z = \sqrt[5]{2}e^{i\frac{\frac{7}{6}\pi + 2k\pi}{5}}, \text{ per un } k = 0, 1, 2, 3, 4.$$

(c) Si ha  $|7 - 3i| = \sqrt{58}$  e  $-\text{Arctg} \frac{3}{7} \in \arg(7 - 3i)$ ; quindi si ha

$$z = \sqrt[6]{58}e^{\frac{-i \text{Arctg} \frac{3}{7} + 2k\pi}{3}}, \quad k = 0, 1, 2.$$

(d) Si ha  $|5 - 4i| = \sqrt{25 + 16} = \sqrt{41}$  e  $-\text{Arctg} \frac{4}{5} \in \arg(5 - 4i)$ ; quindi si ha

$$z = \sqrt[3]{\sqrt{41}}e^{\frac{-\text{Arctg} \frac{4}{5} + 2k\pi}{3}i} = \sqrt[6]{41}e^{\frac{-\text{Arctg} \frac{4}{5} + 2k\pi}{3}i}, \text{ per un } k = 0, 1, 2.$$

(e) Si ha  $|-5 + 3i| = \sqrt{34}$  e  $-\text{Arctg} \frac{3}{5} + \pi \in \arg(5 + 3i)$ ; quindi si ha

$$z = \sqrt[8]{34}e^{i\frac{-\text{Arctg} \frac{3}{5} + \pi + 2k\pi}{4}}, \text{ per un } k = 0, 1, 2, 3.$$

(f) Si ha  $|-5 + 7i| = \sqrt{74}$ ,  $-\text{Arctg} \frac{7}{5} + \pi \in \arg(-5 + 7i)$ ; quindi si ha

$$z = \pm \sqrt[4]{74}e^{\frac{-\text{Arctg} \frac{7}{5} + \pi}{2}i}.$$

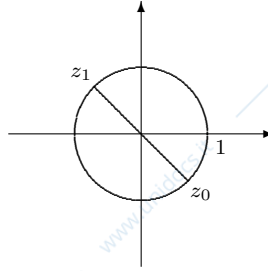
(g) Si ha  $|e^i| = 1$  e  $1 \in \arg(1)$ ; quindi si ha

$$z = \pm e^{\frac{1}{2}i} = \pm \left( \cos \frac{1}{2} + i \sin \frac{1}{2} \right).$$

(h) Si ha  $z^3 + iz = 0$  se e solo se  $z(z^2 + i) = 0$ , cioè se e solo se  $z = 0$  o  $z^2 + i = 0$ , cioè se e solo se  $z = 0$  o  $z^2 = -i$ .

Una soluzione è  $z = 0$ ; le altre sono le soluzioni di  $z^2 = -i$ .

Si ha  $|-i| = 1$  e  $-\frac{1}{2}\pi \in \arg(-i)$ .



Quindi le soluzioni di  $z^2 = -i$  sono

$$z = \pm \left( \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i \right).$$

Le soluzioni dell'equazione data sono quindi  $0, \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i, -\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i$ .

3. **Esercizio.** Risolvere le seguenti equazioni complesse esprimendo le soluzioni per radicali, cioè senza l'uso di funzioni trascendenti:

(a)  $z^2 - 3z - 4i = 0$ ;

(b)  $z^2 - 5z - 1 = 0$ ;

(c)  $z^2 - 2iz + 4 = 0$ .

**Risoluzione.**

(a) Il polinomio  $p(z) = z^2 - 3z - 4i$  ha discriminante  $\Delta$  tale che  $\frac{\Delta}{4} = 1 + 4i$ .

Troviamo le radici quadrate di  $1 + 4i$ .

Si ha  $|1 + 4i| = \sqrt{17}$  e  $\text{Arccos} \frac{1}{\sqrt{17}} \in \arg(1 + 4i)$ .

Le radici di  $1 + 4i$  sono quindi

$$\pm \sqrt[4]{17} \left( \cos \left( \frac{1}{2} \text{Arccos} \frac{1}{\sqrt{17}} \right) + i \sin \left( \frac{1}{2} \text{Arccos} \frac{1}{\sqrt{17}} \right) \right) =$$

$$\pm \sqrt[4]{17} \left( \sqrt{\frac{1 + \cos \text{Arccos} \frac{1}{\sqrt{17}}}{2}} + i \sqrt{\frac{1 - \cos \text{Arccos} \frac{1}{\sqrt{17}}}{2}} \right) =$$

$$\pm \sqrt[4]{17} \left( \sqrt{\frac{1 + \frac{1}{\sqrt{17}}}{2}} + i \sqrt{\frac{1 - \frac{1}{\sqrt{17}}}{2}} \right) = \pm \sqrt[4]{17} \left( \sqrt{\frac{\sqrt{17} + 1}{2\sqrt{17}}} + i \sqrt{\frac{\sqrt{17} - 1}{2\sqrt{17}}} \right) =$$

$$\pm \left( \sqrt{\frac{\sqrt{17} + 1}{2}} + i \sqrt{\frac{\sqrt{17} - 1}{2}} \right).$$

Si ha quindi  $z = 1 \pm \left( \sqrt{\frac{\sqrt{17}+1}{2}} + i\sqrt{\frac{\sqrt{17}-1}{2}} \right)$ .

Le soluzioni dell'equazione sono quindi

$$z = 1 + \sqrt{\frac{\sqrt{17}+1}{2}} + i\sqrt{\frac{\sqrt{17}-1}{2}}$$

e

$$z = 1 - \sqrt{\frac{\sqrt{17}+1}{2}} - i\sqrt{\frac{\sqrt{17}-1}{2}}.$$

- (b) Il polinomio  $p(z) = z^2 - 5z - i$  ha discriminante  $\Delta = 25 + 4i$ .

Troviamo le radici quadrate di  $25 + 4i$ .

Si ha  $|1 - 4i| = \sqrt{641}$  e  $\text{Arccos} \frac{25}{\sqrt{641}} \in \arg(25 + 4i)$ .

Le radici di  $25 + 4i$  sono quindi

$$\begin{aligned} & \pm \sqrt[4]{641} \left( \cos \left( \frac{1}{2} \text{Arccos} \frac{25}{\sqrt{641}} \right) + i \sin \left( \frac{1}{2} \text{Arccos} \frac{25}{\sqrt{641}} \right) \right) = \\ & \pm \sqrt[4]{641} \left( \sqrt{\frac{1 + \cos \text{Arccos} \frac{25}{\sqrt{641}}}{2}} + i \sqrt{\frac{1 - \cos \text{Arccos} \frac{25}{\sqrt{641}}}{2}} \right) = \\ & \pm \sqrt[4]{641} \left( \sqrt{\frac{1 + \frac{25}{\sqrt{641}}}{2}} + i \sqrt{\frac{1 - \frac{25}{\sqrt{641}}}{2}} \right) = \pm \sqrt[4]{17} \left( \sqrt{\frac{\sqrt{641} + 25}{2\sqrt{641}}} + i \sqrt{\frac{\sqrt{641} - 25}{2\sqrt{641}}} \right) = \\ & \pm \left( \sqrt{\frac{\sqrt{641} + 25}{2}} + i \sqrt{\frac{\sqrt{641} - 25}{2}} \right). \end{aligned}$$

Si ha quindi  $z = \frac{1}{2} \left( 5 \pm \left( \sqrt{\frac{\sqrt{641} + 25}{2}} + i \sqrt{\frac{\sqrt{641} - 25}{2}} \right) \right)$ .

Le soluzioni dell'equazione sono quindi

$$z = \frac{5}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\sqrt{641} + 25}{2}} + \frac{i}{2} \sqrt{\frac{\sqrt{641} - 25}{2}}$$

e

$$z = \frac{5}{2} - \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\sqrt{641} + 25}{2}} - \frac{i}{2} \sqrt{\frac{\sqrt{641} - 25}{2}}$$

- (c) Il polinomio  $p(z) = z^2 - 2iz + 4$  ha discriminante  $\Delta$  tale che  $\frac{\Delta}{4} = -1 - 4 = -5$ .

Le radici quadrate di  $-5$  sono  $\pm\sqrt{5}i$ .

Si ha quindi  $z = i \pm \sqrt{5}i$ .

Le soluzioni dell'equazione sono quindi

$$z = (1 + \sqrt{5})i \text{ e } z = (1 - \sqrt{5})i.$$

## 10.3 Logaritmi complessi

1. **Esercizio.** Risolvere le seguenti equazioni complesse:

(a)  $e^z = 2 - 7i$ ;

(b)  $e^z = -3$ ;

(c)  $e^z = 5e^{-3i}$ .

**Risoluzione.**

- (a) Si ha  $|2 - 7i| = \sqrt{4 + 49} = \sqrt{53}$  e  $-\text{Arctg} \frac{7}{2} \in \arg(2 - 7i)$ ; quindi si ha  $z = \log \sqrt{53} + i(-\text{Arctg} \frac{7}{2} + 2k\pi)$  per un  $k \in \mathbf{Z}$ .
- (b) Si ha  $|-3| = 3$  e  $\pi \in \arg(-3)$ ; quindi si ha  $z = \log 3 + i(\pi + 2k\pi) = \log 3 + (1 + 2k)\pi i$  per un  $k \in \mathbf{Z}$ .
- (c) Si ha  $|5e^{-3i}| = 5$  e  $-\pi \in \arg(5e^{-3i})$ ; quindi si ha  $z = \log 5 + i(-3 + 2k\pi)$  per un  $k \in \mathbf{Z}$ .

2. **Esercizio.** Risolvere la seguente equazione complessa:

$$\sin z = 2.$$

**Risoluzione.** L'equazione è equivalente a

$$\frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} = 2, \text{ cioè a}$$

$$e^{iz} - e^{-iz} = 4i, \text{ cioè a}$$

$$e^{iz} - 4i - e^{-iz} = 0, \text{ cioè a}$$

$$e^{2iz} - 4ie^{iz} - 1 = 0.$$

Poniamo  $w = e^{iz}$ ; l'equazione diventa

$$w^2 - 4iw - 1 = 0.$$

Il discriminante  $\Delta$  del polinomio  $w^2 - 4iw - 1$  è tale che  $\frac{\Delta}{4} = -5$ .

Le radici quadrate di  $-5$  sono  $\pm\sqrt{5}i$ . Le soluzioni dell'equazione  $w^2 - 4iw - 1 = 0$  sono quindi  $w = 2i \pm \sqrt{5}i = (2 \pm \sqrt{5})i$ .

Supponiamo  $w = (2 + \sqrt{5})i$ ; si ha

$$e^{iz} = (2 + \sqrt{5})i.$$

Si ha  $|(2 + \sqrt{5})i| = 2 + \sqrt{5}$  e  $\frac{\pi}{2} \in \arg((2 + \sqrt{5})i)$ ; si ha quindi

$$iz = \log(2 + \sqrt{5}) + i(\frac{\pi}{2} + 2k\pi), \text{ per un } k \in \mathbf{Z};$$

quindi

$$z = \frac{\pi}{2} + 2k\pi - \log(2 + \sqrt{5})i, \text{ per un } k \in \mathbf{Z}.$$

Supponiamo  $w = (2 - \sqrt{5})i$ ; si ha

$$e^{iz} = (2 - \sqrt{5})i.$$

Si ha  $|(2 - \sqrt{5})i| = \sqrt{5} - 2$  e  $-\frac{\pi}{2} \in \arg((2 - \sqrt{5})i)$ ; si ha quindi

$$iz = \log(\sqrt{5} - 2) + i(-\frac{\pi}{2} + 2k\pi), \text{ per un } k \in \mathbf{Z};$$

quindi

$$z = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi - \log(\sqrt{5} - 2)i, \text{ per un } k \in \mathbf{Z}.$$

L'insieme delle soluzioni dell'equazione è quindi

$$\left\{ \frac{\pi}{2} + 2k\pi - \log(2 + \sqrt{5})i; k \in \mathbf{Z} \right\} \cup \left\{ -\frac{\pi}{2} + 2k\pi - \log(\sqrt{5} - 2)i; k \in \mathbf{Z} \right\}.$$

## Capitolo 11

# Primitive ed integrali

### 11.1 Integrali di base

1. **Esercizio.** Calcolare i seguenti integrali:

$$(a) \int_0^1 \left( \frac{3}{\sqrt{x^2+1}} + 2 \operatorname{sh} x + 4 \cdot 3^x - \frac{3}{\cos^2 x} \right) dx;$$

$$(b) \int_2^3 \left( \frac{3}{\sqrt{x^2-1}} + 2 \operatorname{ch} x + 4 \cdot 5^x - \frac{3}{1+x} \right) dx.$$

**Risoluzione.**

(a) Si ha

$$\begin{aligned} & \int_0^1 \left( \frac{3}{\sqrt{x^2+1}} + 2 \operatorname{sh} x + 4 \cdot 3^x - \frac{3}{\cos^2 x} \right) dx = \\ & \left[ 3 \operatorname{Argsh} x + 2 \operatorname{ch} x + 4 \frac{3^x}{\log 3} - 3 \operatorname{tg} x \right]_0^1 = \\ & 3 \operatorname{Argsh} 1 + 2 \operatorname{ch} 1 + \frac{12}{\log 3} - 3 \operatorname{th} 1 - 2 - \frac{4}{\log 3} = \\ & 3 \operatorname{Argsh} 1 + 2 \operatorname{ch} 1 + \frac{8}{\log 3} - 3 \operatorname{th} 1 - 2. \end{aligned}$$

(b) Si ha

$$\begin{aligned} & \int_2^3 \left( \frac{3}{\sqrt{x^2-1}} + 2 \operatorname{ch} x + 4 \cdot 5^x - \frac{3}{1+x} \right) dx = \\ & \left[ 3 \operatorname{Argch} x + 2 \operatorname{sh} x + 4 \frac{5^x}{\log 5} - 3 \log |x+1| \right]_2^3 = \\ & 3 \operatorname{Argch} 3 + 2 \operatorname{sh} 3 + \frac{500}{\log 5} - 3 \log 4 - 3 \operatorname{Argch} 2 - 2 \operatorname{sh} 2 - \frac{100}{\log 5} + 3 \log 3 = \\ & 3 \operatorname{Argch} 3 - 3 \operatorname{Argch} 2 + 2 \operatorname{sh} 3 - 2 \operatorname{sh} 2 + 3 \log \frac{3}{4} + \frac{400}{\log 5}. \end{aligned}$$

2. **Esercizio.** Sia

$$f : \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R}, x \longrightarrow \begin{cases} x+2 & \text{per } x \leq 2 \\ x^2 & \text{per } x > 2 \end{cases} ;$$

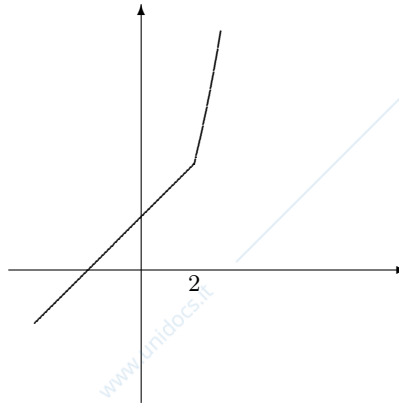
(a) disegnare il grafico di  $f$ ;

(b) dimostrare che  $f$  è continua;

- (c) determinare l'insieme dei punti dove  $f$  è derivabile;  
 (d) calcolare  $\int_0^5 f(x) dx$ .

**Risoluzione.**

(a)



- (b) Per il carattere locale della continuità  $f$  è continua su  $] = \infty[2 \cup ]2, +\infty[$ .

Si ha

$$\lim_{x \rightarrow 2^-, x \neq 2} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-, x \neq 2} (x + 2) = 4.$$

Si ha

$$\lim_{x \rightarrow 2^+, x \neq 2} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+, x \neq 2} x^2 = 4.$$

Si ha

$$f(2) = 4.$$

Quindi  $f$  è continua in 2.

Quindi  $f$  è continua su  $\mathbf{R}$ .

- (c) Per il carattere locale della derivabilità  $f$  è derivabile su  $] = \infty[2 \cup ]2, +\infty[$ .

Si ha

$$\lim_{x \rightarrow 2^-, x \neq 2} f'(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-, x \neq 2} 1 = 1.$$

Quindi  $f$  è derivabile da sinistra in 2 e si ha  $f'_-(2) = 1$ .

Si ha

$$\lim_{x \rightarrow 2^+, x \neq 2} f'(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+, x \neq 2} 2x = 2.$$

Quindi  $f$  è derivabile da destra in 2 e si ha  $f'_+(2) = 2$ .

Essendo  $f'_-(2) \neq f'_+(2)$ ,  $f$  non è derivabile in 2.  $] = \infty[2 \cup ]2, +\infty[$ .

- (d) Si ha

$$\begin{aligned} \int_0^4 f(x) dx &= \int_0^2 f(x) dx + \int_2^4 f(x) dx = \int_0^2 (x + 2) dx + \int_2^4 x^2 dx = \\ &= \left[ \frac{1}{2}x^2 + 2x \right]_0^2 + \left[ \frac{1}{3}x^3 \right]_2^4 = 2 + 4 + \frac{64}{3} - \frac{8}{3} = \frac{74}{3}. \end{aligned}$$

## 11.2 Integrali per decomposizione

1. **Esercizio.** Calcolare il seguente integrale:

$$\int_1^2 \frac{1}{\sqrt{x+1} + \sqrt{x-1}} dx.$$

**Risoluzione.**

Si ha

$$\begin{aligned} \int_1^2 \frac{1}{\sqrt{x+1} + \sqrt{x-1}} dx &= \int_1^2 \frac{\sqrt{x+1} - \sqrt{x-1}}{(\sqrt{x+1} + \sqrt{x-1})(\sqrt{x+1} - \sqrt{x-1})} dx = \\ \int_1^2 \frac{\sqrt{x+1} - \sqrt{x-1}}{x+1 - (x-1)} dx &= \int_1^2 \frac{\sqrt{x+1} - \sqrt{x-1}}{2} dx = \frac{1}{2} \int_1^2 (\sqrt{x+1} - \sqrt{x-1}) dx = \\ \frac{1}{2} \left[ \frac{(x+1)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} - \frac{(x-1)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} \right]_1^2 &= \frac{1}{3} (3^{\frac{3}{2}} - 1 - 2^{\frac{3}{2}}) = \frac{3\sqrt{3} - 2\sqrt{2} - 1}{3}. \end{aligned}$$

2. **Esercizio.** Calcolare il seguente integrale:

$$\int_0^{\frac{\pi}{8}} \sin(3x) \cos x dx.$$

**Risoluzione.** Vale la formula Werner

$$\sin \alpha \cos \beta = \frac{1}{2} (\sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta)).$$

Si ha quindi

$$\begin{aligned} \int_0^{\frac{\pi}{8}} \sin(3x) \cos x dx &= \int_0^{\frac{\pi}{8}} \frac{1}{2} (\sin(4x) + \sin(2x)) dx = \\ \frac{1}{2} \left[ -\frac{1}{4} \cos(4x) - \frac{1}{2} \cos(2x) \right]_0^{\frac{\pi}{8}} &= \frac{1}{2} \left( -\frac{1}{4} \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) - \frac{1}{2} \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + \frac{1}{4} + \frac{1}{2} \right) = \\ \frac{1}{2} \left( -\frac{1}{2} \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{1}{4} + \frac{3}{2} \right) &= \frac{3 - \sqrt{2}}{2}. \end{aligned}$$

## 11.3 Integrali immediati

1. **Esercizio.** Calcolare i seguenti integrali:

(a)  $\int_0^1 x \sqrt{x^2 + 1} dx;$

(b)  $\int_0^1 x^2 \sqrt{3x^3 + 2} dx;$

(c)  $\int_0^1 \frac{2x+1}{\sqrt{x^2+x+3}} dx;$

(d)  $\int_0^3 \frac{x}{\sqrt{x^2+2}} dx;$

(e)  $\int_1^2 \frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^2} dx;$

(f)  $\int_0^1 x \sin x^2 dx;$

(g)  $\int_0^1 x^2 \sin x^3 dx;$

- (h)  $\int_0^1 x e^{-x^2} dx$ ;  
 (i)  $\int_0^1 \frac{\sin x \cos x}{1+\sin^2 x} dx$ ;  
 (j)  $\int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{1+\operatorname{tg}^2 x}{\operatorname{tg} x} dx$ ;  
 (k)  $\int_0^1 \frac{x}{1+x^2} dx$ .  
 (l)  $\int_0^1 \frac{x^3}{1+x^8} dx$ .

**Risoluzione.**

(a) Si ha

$$\int_0^1 x \sqrt{x^2+1} dx = \frac{1}{2} \int_0^1 (x^2+1)^{\frac{1}{2}} (2x) dx = \frac{1}{2} \left[ \frac{(x^2+1)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} \right]_0^1 = \frac{1}{3} (2\sqrt{2}-1).$$

(b) Si ha

$$\int_0^1 x^2 \sqrt{3x^3+2} dx = \frac{1}{9} \int_0^1 (3x^3+2)^{\frac{1}{2}} (9x^2) dx = \frac{1}{9} \left[ \frac{(3x^3+2)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} \right]_0^1 = \frac{2}{27} (5^{\frac{3}{2}} - 2^{\frac{3}{2}}) = \frac{2}{27} (5\sqrt{5} - 2\sqrt{2}).$$

(c) Si ha

$$\int_0^1 \frac{2x+1}{\sqrt{x^2+x+3}} dx = \int_0^1 (x^2+x+3)^{-\frac{1}{2}} (2x+1) dx = \left[ \frac{(x^2+x+3)^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} \right]_0^1 = 2 [\sqrt{x^2+x+3}]_0^1 = 2(\sqrt{5}-\sqrt{3}).$$

(d) Si ha

$$\int_0^3 \frac{x}{\sqrt{x^2+2}} dx = \frac{1}{2} \int_0^3 (x^2+2)^{-\frac{1}{2}} (2x) dx = \frac{1}{2} \left[ \frac{(x^2+2)^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} \right]_0^3 = \sqrt{11} - \sqrt{2}.$$

(e) Si ha

$$\int_1^2 \frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^2} dx = - \int_1^2 e^{\frac{1}{x}} \left(-\frac{1}{x^2}\right) dx = \left[ e^{\frac{1}{x}} \right]_1^2 = -(e^{\frac{1}{2}} - e) = e - \sqrt{e}.$$

(f) Si ha

$$\int_0^1 x \sin x^2 dx = \frac{1}{2} \int_0^1 (\sin x^2) (2x) dx = \frac{1}{2} [-\cos x^2]_0^1 = \frac{1}{2} (\cos 0 - \cos 1) = \frac{1}{2} (1 - \cos 1).$$

(g) Si ha

$$\int_0^1 x^2 \sin x^3 dx = \frac{1}{3} \int_0^1 (\sin x^3) (3x^2) dx = \frac{1}{3} [-\cos x^3]_0^1 = \frac{1}{3} - \frac{1}{3} \cos 1.$$

(h) Si ha

$$\int_0^1 x e^{-x^2} dx = -\frac{1}{2} \int_0^1 e^{-x^2} (-2x) dx = -\frac{1}{2} [e^{-x^2}]_0^1 = \frac{1}{2} (1 - e^{-1}).$$

(i) Si ha

$$\int_0^1 \frac{\sin x \cos x}{1+\sin^2 x} dx = \frac{1}{2} \int_0^1 \frac{1}{1+\sin^2 x} (2 \sin x \cos x) dx = \frac{1}{2} [\log(1+\sin^2 x)]_0^1 = \frac{1}{2} \log(1+\sin^2 1).$$

(j) Si ha

$$\int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{1+\operatorname{tg}^2 x}{\operatorname{tg} x} dx = \int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{1}{\operatorname{tg} x} (1+\operatorname{tg}^2 x) dx = [\log \operatorname{tg} x]_{\frac{1}{2}}^1 = \log \operatorname{tg} 1 - \log \operatorname{tg} \frac{1}{2} = \log \frac{\operatorname{tg} 1}{\operatorname{tg} \frac{1}{2}}.$$

(k) Si ha

$$\int_0^1 \frac{x}{1+x^2} dx = \frac{1}{2} \int_0^1 \frac{2x}{1+x^2} dx = \frac{1}{2} [\log(1+x^2)]_0^1 = \frac{1}{2} \log 2.$$

(l) Si ha

$$\int_0^1 \frac{x^3}{1+x^8} dx = \int_0^1 \frac{x^3}{1+(x^4)^2} dx = \frac{1}{4} \int_0^1 \frac{1}{1+(x^4)^2} 4x^3 dx = \frac{1}{4} [\operatorname{Arctg} x^4]_0^1 = \frac{1}{4} \operatorname{Arctg} 1 = \frac{1}{4} \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{16}.$$

## 11.4 Funzione integrale

1. **Esercizio.** Calcolare il seguente limite

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^{2x} t\sqrt{1+t} dt}{e^{x^2} - 1}.$$

**Risoluzione.** Il limite è della forma  $\frac{0}{0}$ ; per il teorema di De l'Hospital si ha

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^{2x} t\sqrt{1+t} dt}{e^{x^2} - 1} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x\sqrt{1+2x} \cdot 2}{e^{x^2} 2x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2\sqrt{1+2x}}{e^{x^2}} = 2.$$

## 11.5 Integrazione per sostituzione

1. **Esercizio.** Calcolare il seguente integrale

$$\int_{\frac{1}{e}}^{e^2} \frac{|\log x|}{x(\log x + 2)} dx.$$

**Risoluzione.** Si ha

$$\int_{\frac{1}{e}}^{e^2} \frac{|\log x|}{x(\log x + 2)} dx = \int_{\frac{1}{e}}^{e^2} \frac{|\log x|}{\log x + 2} \frac{1}{x} dx.$$

Integriamo

per sostituzione calcolando  $\int_u^v f(\varphi(x))\varphi'(x) dx$  attraverso  $\int_{\varphi(u)}^{\varphi(v)} f(y) dy$ ; come funzione  $\varphi(x)$  consideriamo la funzione  $\log x$ ; poniamo dunque  $y = \log x$ ; per  $x = \frac{1}{e}$  si ha  $y = -1$ ; per  $x = e$ , si ha  $y = 1$ ; si ha quindi

$$\int_{\frac{1}{e}}^{e^2} \frac{|\log x|}{\log x + 2} \frac{1}{x} dx = \int_{-1}^1 \frac{|y|}{y + 2} dy =$$

$$\int_{-1}^0 \frac{|y|}{y + 2} dy + \int_0^1 \frac{|y|}{y + 2} dy =$$

$$\int_{-1}^0 -\frac{y}{y + 2} dy + \int_0^1 \frac{y}{y + 2} dy =$$

$$\begin{aligned}
& - \int_{-1}^0 \frac{y+2-2}{y+2} dy + \int_0^1 \frac{y+2-2}{y+2} dy = \\
& - \int_{-1}^0 \left(1 - \frac{2}{y+2}\right) dy + \int_0^1 \left(1 - \frac{2}{y+2}\right) dy = \\
& - [y - 2 \log(y+2)]_{-1}^0 + [y - 2 \log(y+2)]_0^1 = \\
& -(-2 \log 2 + 1) + 2 - 2 \log 4 + 2 \log 2 = 2 \log 2 - 1 + 2 - 4 \log 2 + 2 \log 2 = 1.
\end{aligned}$$

2. **Esercizio.** Calcolare i seguenti integrali:

- (a)  $\int_0^1 \frac{\sqrt{x+1}}{x+2} dx$ ;  
 (b)  $\int_1^2 \frac{1}{1+\sqrt{x}} dx$ ;  
 (c)  $\int_0^2 \frac{x}{\sqrt{x+1}} dx$ ;  
 (d)  $\int_0^1 \frac{1}{1+e^x} dx$ .

**Risoluzione.**

- (a) Poniamo  $\sqrt{x+1} = t$ ; si ha  $x+1 = t$ ,  $x = t^2 - 1$ ,  $\frac{dx}{dt} = 2t$ ; per  $x = 0$  si ha  $t = 1$ ; per  $x = 1$  si ha  $t = \sqrt{2}$ ; si ha quindi

$$\begin{aligned}
\int_0^1 \frac{\sqrt{x+1}}{x+2} dx &= \int_1^{\sqrt{2}} \frac{t}{t^2-1+2} 2t dt = 2 \int_1^{\sqrt{2}} \frac{t^2}{t^2+1} dt = 2 \int_1^{\sqrt{2}} \frac{t^2+1-1}{t^2+1} dt = \\
&= 2 \int_1^{\sqrt{2}} \left(1 - \frac{1}{t^2+1}\right) dt = 2[t - \operatorname{Arctg} t]_1^{\sqrt{2}} = 2(\sqrt{2} - \operatorname{Arctg} \sqrt{2} - 1 + \frac{\pi}{4}).
\end{aligned}$$

- (b) Poniamo  $\sqrt{x} = t$ ; si ha  $x = t^2$ ; si ha  $\frac{dx}{dt} = 2t$ ; per  $x = 1$  si ha  $t = 1$ ; per  $x = 2$  si ha  $t = \sqrt{2}$ .

Si ha quindi

$$\int_1^{\sqrt{2}} \frac{1}{1+\sqrt{x}} dx = \int_1^{\sqrt{2}} \frac{1}{1+t} 2t dt = 2 \int_1^{\sqrt{2}} \left(1 - \frac{1}{1+t}\right) dt = 2[t - \log(1+t)]_1^{\sqrt{2}} = 2(\sqrt{2} - \log(1+\sqrt{2}) - 1 + \log 2).$$

- (c) Poniamo  $\sqrt{x} = t$ ; si ha  $x = t^2$  e  $\frac{dx}{dt} = 2t$ ; per  $x = 0$  si ha  $t = 0$ ; per  $x = 2$  si ha  $t = \sqrt{2}$ ; quindi si ha

$$\int_0^2 \frac{x}{\sqrt{x+1}} dx = \int_0^{\sqrt{2}} \frac{t^2}{t+1} 2t dt = 2 \int_0^{\sqrt{2}} \frac{t^3}{t+1} dt.$$

Attraverso la divisione  $t^3 : (t+1)$  si trova  $t^3 = (t+1)(t^2 - t + 1) - 1$ ; quindi si ha

$$\frac{t^3}{t+1} = t^2 - t + 1 - \frac{1}{t+1}.$$

$$\text{Si ha quindi } 2 \int_0^{\sqrt{2}} \frac{t^3}{t+1} dt = 2 \int_0^{\sqrt{2}} \left(t^2 - t + 1 - \frac{1}{t+1}\right) dt =$$

$$\begin{aligned}
& 2 \left[ \frac{1}{3} t^3 - \frac{1}{2} t^2 + t - \log(1+t) \right]_0^{\sqrt{2}} = \frac{2}{3} (\sqrt{2})^3 - 2 + 2\sqrt{2} - \log(1+\sqrt{2}) = \\
& \frac{4}{3} \sqrt{2} + 2\sqrt{2} - 2 - \log(1+\sqrt{2}) = \frac{10}{3} \sqrt{2} - 2 - \log(1+\sqrt{2}).
\end{aligned}$$

- (d) Poniamo  $e^x = t$ ; si ha  $x = \log t$ ; si ha  $\frac{dx}{dt} = \frac{1}{t}$ ; per  $x = 0$  si ha  $t = 1$ ; per  $x = 1$  si ha  $t = e$ .

## 11.6. INTEGRAZIONE PER PARTI

141

Si ha quindi

$$\int_0^1 \frac{1}{1+e^x} dx = \int_1^e \frac{1}{1+t} \frac{1}{t} dt = \int_1^e \frac{1}{t(t+1)} dt.$$

Siano  $A, B \in \mathbf{R}$  tali che

$$\frac{1}{t(t+1)} = \frac{A}{t} + \frac{B}{t+1},$$

per ogni  $t \in \mathbf{R} - \{0, -1\}$ . Si ha

$$1 = A(t+1) + Bt,$$

per ogni  $t \in \mathbf{R}$ . Dando a  $t$  il valore 0 si trova  $A = 1$ ; dando a  $t$  il valore

$-1$  si trova  $-1 = B$ , cioè  $B = -1$ . Quindi si ha

$$\frac{1}{t(t+1)} = \frac{1}{t} - \frac{1}{t+1}.$$

Quindi si ha

$$\int_1^e \frac{1}{t(t+1)} dt = \int_1^e \left( \frac{1}{t} - \frac{1}{t+1} \right) dt = [\log t - \log(t+1)]_1^e = 1 - \log(e+1) + \log 2.$$

3. **Esercizio.** Sia  $\varphi : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}, t \rightarrow t^2$ ; sia  $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$  continua; calcolare

$$\int_0^4 f(x) dx, \text{ sapendo che } f(\varphi(t)) = t, \text{ per ogni } t \in \mathbf{R}.$$

**Risoluzione.** Per ogni  $t \in \mathbf{R}$  si ha  $\varphi'(t) = 2t$ ; quindi si ha

$$\int_0^4 f(x) dx = \int_{\varphi(0)}^{\varphi(2)} f(x) dx = \int_0^2 f(\varphi(t)) \varphi'(t) dt = \int_0^2 t 2t dt = 2 \int_0^2 t^2 dt =$$

$$2 \left[ \frac{t^3}{3} \right]_0^2 = \frac{2}{3} 8 = \frac{16}{3}.$$

## 11.6 Integrazione per parti

1. **Esercizio.** Calcolare i seguenti integrali:

(a)  $\int_0^1 x e^{-x} dx$ ;

(b)  $\int_0^1 x \sin(2x) dx$ ;

(c)  $\int_1^2 x \log x dx$ ;

(d)  $\int_0^1 x \operatorname{Arctg} x dx$ ;

(e)  $\int_0^1 \operatorname{Arctg}(2x) dx$ ;

(f)  $\int_0^{\frac{1}{2}} \operatorname{Arcsin}(2x) dx$ ;

(g)  $\int_0^1 (x+2)^3 \cos(2x+1) dx$ ;

(h)  $\int_1^2 \log \left( \frac{1}{x^2} + 1 \right) dx$ ;

(i)  $\int_0^1 \log \frac{1+x}{3+x} dx$ ;

(j)  $\int_0^{\frac{1}{2}} x^3 \operatorname{Arctg}(2x) dx$ ;

(k)  $\int_0^1 \operatorname{Argsh}(2x) dx$ .

**Risoluzione.**

(a) Si ha

$$\int_0^1 x e^{-x} dx = [-x e^{-x}]_0^1 + \int_0^1 e^{-x} dx = [-x e^{-x} - e^{-x}]_0^1 = -e^{-1} - e^{-1} + 1 = 1 - 2e^{-1}.$$

(b) Si ha

$$\begin{aligned} \int_0^1 x \sin(2x) dx &= [x(-\cos(2x)\frac{1}{2})]_0^1 - \int_0^1 -\cos(2x)\frac{1}{2} dx = \\ &= [-\frac{1}{2}x \cos(2x)]_0^1 + \frac{1}{2} \int_0^1 \cos(2x) dx = [-\frac{1}{2} \cos(2x)]_0^1 + [\frac{1}{4} \sin(2x)]_0^1 = \\ &= [-\frac{1}{2} \cos(2x) + \frac{1}{4} \sin(2x)]_0^1 = -\frac{1}{2} \cos 2 + \frac{1}{4} \sin 2. \end{aligned}$$

(c) Si ha

$$\begin{aligned} \int_1^2 x \log x dx &= [\frac{x^2}{2} \log x]_1^2 - \int_1^2 \frac{x^2}{2} \frac{1}{x} dx = [\frac{x^2}{2} \log x]_1^2 - \frac{1}{2} \int_1^2 x dx = \\ &= [\frac{x^2}{2} \log x - \frac{1}{4} x^2]_1^2 = 2 \log 2 - 1 + \frac{1}{4} = 2 \log 2 - \frac{3}{4}. \end{aligned}$$

(d) Si ha

$$\begin{aligned} \int_0^1 x \operatorname{Arctg} x dx &= [\frac{1}{2} x^2 \operatorname{Arctg} x]_0^1 - \int_0^1 \frac{1}{2} \frac{x^2}{1+x^2} dx = \\ &= [\frac{1}{2} x^2 \operatorname{Arctg} x]_0^1 - \frac{1}{2} \int_0^1 (1 - \frac{1}{1+x^2}) dx = [\frac{1}{2} x^2 \operatorname{Arctg} x - \frac{1}{2} x + \frac{1}{2} \operatorname{Arctg} x]_0^1 = \\ &= \frac{1}{2} \operatorname{Arctg} 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \operatorname{Arctg} 1 = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

(e) Si ha

$$\begin{aligned} \int_0^1 \operatorname{Arctg}(2x) dx &= [x \operatorname{Arctg}(2x)]_0^1 - \int_0^1 \frac{2x}{1+4x^2} dx = \\ &= [x \operatorname{Arctg}(2x)]_0^1 - \frac{1}{4} \int_0^1 \frac{8x}{1+4x^2} dx = \\ &= [x \operatorname{Arctg}(2x)]_0^1 - \frac{1}{4} [\log(1+4x^2)]_0^1 = \\ &= \operatorname{Arctg} 2 - \frac{1}{4} \log 5. \end{aligned}$$

(f) Si ha

$$\begin{aligned} \int_0^{\frac{1}{2}} \operatorname{Arcsin}(2x) dx &= [x \operatorname{Arcsin}(2x)]_0^{\frac{1}{2}} - \int_0^{\frac{1}{2}} x \frac{1}{\sqrt{1-4x^2}} dx = \\ &= [x \operatorname{Arcsin}(2x)]_0^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{4} \int_0^{\frac{1}{2}} (1-4x)^{-\frac{1}{2}} (-8x) dx = \\ &= [x \operatorname{Arcsin}(2x)]_0^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{4} \left[ \frac{(1-4x^2)^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} \right]_0^{\frac{1}{2}} = [x \operatorname{Arcsin}(2x) + \frac{1}{2} \sqrt{1-4x^2}]_0^{\frac{1}{2}} = \\ &= \frac{1}{2} \operatorname{Arcsin} 1 - \frac{1}{2} = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

(g) Si ha

$$\begin{aligned} &\int_0^1 (x+2)^3 \cos(2x+1) dx = \\ &= \left[ \frac{1}{2} \sin(2x+1)(x+2)^3 \right]_0^1 - \int_0^1 \frac{1}{2} \sin(2x+1) 3(x+2)^2 dx = \\ &= \left[ \frac{1}{2} (x+2)^3 \sin(2x+1) \right]_0^1 - \frac{3}{2} \int_0^1 (x+2)^2 \sin(2x+1) dx = \\ &= \left[ \frac{1}{2} (x+2)^3 \sin(2x+1) \right]_0^1 - \\ &= \frac{3}{2} \left( \left[ -\frac{1}{2} \cos(2x+1)(x+2)^2 \right]_0^1 - \int_0^1 -\frac{1}{2} \cos(2x+1) 2(x+2) dx \right) = \end{aligned}$$

## 11.6. INTEGRAZIONE PER PARTI

143

$$\begin{aligned}
& \left[ \frac{1}{2}(x+2)^3 \sin(2x+1) + \frac{3}{4}(x+2)^2 \right]_0^1 - \frac{3}{2} \int_0^1 (x+2) \cos(2x+1) dx = \\
& \left[ \frac{1}{2}(x+2)^3 \sin(2x+1) + \frac{3}{4}(x+2)^2 \right]_0^1 - \\
& \frac{3}{2} \left( \left[ \frac{1}{2} \sin(2x+1)(x+2) \right]_0^1 - \int_0^1 \frac{1}{2} \sin(2x+1) dx \right) = \\
& \left[ \frac{1}{2}(x+2)^3 \sin(2x+1) + \frac{3}{4}(x+2)^2 - \frac{3}{4}(x+2) \sin(2x+1) \right]_0^1 - \\
& + \frac{3}{4} \int_0^1 \sin(2x+1) dx = \\
& \left[ \frac{1}{2}(x+2)^3 \sin(2x+1) + \frac{3}{4}(x+2)^2 \right. \\
& \left. - \frac{3}{4}(x+2) \sin(2x+1) - \frac{3}{8} \cos(2x+1) \right]_0^1 = \\
& \frac{27}{2} \sin 3 + \frac{27}{4} \cos 3 - \frac{9}{4} \sin 3 - \frac{3}{8} \cos 3 - 4 \sin 1 - 3 \cos 1 + \frac{3}{2} \sin 1 + \frac{3}{8} \cos 1 = \\
& \frac{45}{4} \sin 3 + \frac{51}{8} \cos 3 - \frac{5}{2} \sin 1 - \frac{21}{8} \cos 1.
\end{aligned}$$

(h) Si ha

$$\begin{aligned}
& \int_1^2 \log \left( \frac{1}{x^2} + 1 \right) dx = \int_1^2 \log \frac{1+x^2}{x^2} dx = \\
& \left[ x \log \frac{1+x^2}{x^2} \right]_1^2 - \int_1^2 x \frac{x^2}{1+x^2} \frac{2xx^2 - 2x(1+x^2)}{x^4} dx = \\
& \left[ x \log \frac{1+x^2}{x^2} \right]_1^2 - \int_1^2 \frac{2x^3 - 2x - 2x^3}{x(1+x^2)} dx = \\
& \left[ x \log \frac{1+x^2}{x^2} \right]_1^2 + 2 \int_1^2 \frac{1}{1+x^2} dx = \left[ x \log \frac{1+x^2}{x^2} + 2 \operatorname{Arctg} x \right]_1^2 = \\
& 2 \log \frac{5}{4} + 2 \operatorname{Arctg} 2 - \log 2 - 2 \operatorname{Arctg} 1 = 2 \operatorname{Arctg} 2 + \log \frac{25}{32} - \frac{\pi}{2}.
\end{aligned}$$

(i) Tendendo conto dei calcoli che seguiranno, integriamo per parti scegliendo come primitiva di 1 la funzione  $x+1$ ; si ha

$$\begin{aligned}
& \int_0^1 \log \frac{1+x}{3+x} dx = \\
& \left[ (x+1) \log \frac{1+x}{3+x} \right]_0^1 - \int_0^1 (x+1) \frac{3+x}{1+x} \frac{3+x-(1+x)}{(3+x)^2} dx =
\end{aligned}$$

$$\left[ (x+1) \log \frac{1+x}{3+x} \right]_0^1 - 2 \int_0^1 \frac{1}{3+x} dx =$$

$$\left[ (x+1) \log \frac{1+x}{3+x} - 2 \log(3+x) \right]_0^1 =$$

$$2 \log \frac{1}{2} - 2 \log 4 - \log \frac{1}{3} + 2 \log 3 = -6 \log 2 + 3 \log 3 = 3 \log \frac{3}{4}.$$

(j) Si ha

$$\int_0^{\frac{1}{2}} x^3 \operatorname{Arctg}(2x) dx = \left[ \frac{1}{4} x^4 \operatorname{Arctg}(2x) \right]_0^{\frac{1}{2}} - \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{4} x^4 \frac{1}{1+(2x)^2} 2 dx =$$

$$\left[ \frac{1}{4} x^4 \operatorname{Arctg}(2x) \right]_0^{\frac{1}{2}} - \frac{1}{2} \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{x^4}{1+4x^2} dx.$$

Eseguendo la divisione  $x^4 : (4x^2 + 1)$  si trova  $x^4 = (4x^2 + 1) \left( \frac{1}{4} x^2 - \frac{1}{16} \right) + \frac{1}{16}$ .

Si ha quindi

$$\frac{x^4}{1+4x^2} = \frac{1}{4} x^2 - \frac{1}{16} + \frac{\frac{1}{16}}{1+4x^2}.$$

Si ha quindi

$$\left[ \frac{1}{4} x^4 \operatorname{Arctg}(2x) \right]_0^{\frac{1}{2}} - \frac{1}{2} \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{x^4}{1+4x^2} dx =$$

$$\left[ \frac{1}{4} x^4 \operatorname{Arctg}(2x) \right]_0^{\frac{1}{2}} - \frac{1}{2} \int_0^{\frac{1}{2}} \left( \frac{1}{4} x^2 - \frac{1}{16} + \frac{1}{16} \frac{1}{1+4x^2} \right) dx =$$

$$\left[ \frac{1}{4} x^4 \operatorname{Arctg}(2x) - \frac{1}{8} \frac{x^3}{3} + \frac{1}{32} x \right]_0^{\frac{1}{2}} - \frac{1}{32} \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{1+(2x)^2} 2 dx \frac{1}{2} =$$

$$\left[ \frac{1}{4} x^4 \operatorname{Arctg}(2x) - \frac{1}{8} \frac{x^3}{3} + \frac{1}{32} x \right]_0^{\frac{1}{2}} - \frac{1}{32} \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{1+(2x)^2} 2 dx \frac{1}{2} =$$

$$\left[ \frac{1}{4} x^4 \operatorname{Arctg}(2x) - \frac{1}{8} \frac{x^3}{3} + \frac{1}{32} x - \frac{1}{64} \operatorname{Arctg}(2x) \right]_0^{\frac{1}{2}} =$$

$$\frac{1}{4} \frac{1}{16} \frac{\pi}{4} - \frac{1}{24} \frac{1}{8} + \frac{1}{32} \frac{1}{2} - \frac{1}{64} \frac{\pi}{4} = \frac{1}{64} - \frac{1}{192} = \frac{2}{192} = \frac{1}{96}.$$

(k) Si ha  $\int_0^1 \operatorname{Argsh}(2x) dx =$

$$\left[ x \operatorname{Argsh}(2x) \right]_0^1 - \int_0^1 x \frac{2x}{\sqrt{1+4x^2}} dx =$$

$$\left[ x \operatorname{Argsh}(2x) \right]_0^1 - \frac{1}{4} \int_0^1 (1+4x^2)^{-\frac{1}{2}} 8x dx =$$

$$\left[ x \operatorname{Argsh}(2x) \right]_0^1 - \frac{1}{4} \left[ \frac{(1+4x^2)^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} \right]_0^1 =$$

$$\left[ x \operatorname{Argsh}(2x) - \frac{1}{2} \sqrt{1+4x^2} \right]_0^1 =$$

$$\operatorname{Argsh} 1 - \frac{1}{2} \sqrt{5} + \frac{1}{2}.$$

## 11.7 Integrazione delle funzioni razionali

1. **Esercizio.** Calcolare i seguenti integrali:

(a)  $\int_0^1 \frac{1}{x^2+2} dx;$

(b)  $\int_0^1 \frac{1}{3x^2+1} dx;$

(c)  $\int_0^2 \frac{x^2}{x+1} dx;$

- (d)  $\int_0^1 \frac{x-1}{x+1} dx$ ;  
 (e)  $\int_{-1}^0 \frac{1}{x^2-3x+2} dx$ ;  
 (f)  $\int_1^2 \frac{x+4}{x^4+x^2} dx$ ;  
 (g)  $\int_1^2 \frac{x+3}{x^4+x^3} dx$ ;  
 (h)  $\int_1^2 \frac{1}{x^3+2x^2} dx$ ;  
 (i)  $\int_0^1 \frac{x^2+1}{x^2+3x+2} dx$ .

**Risoluzione.**

(a) Si ha

$$\int_0^1 \frac{1}{x^2+2} dx = \frac{1}{2} \int_0^1 \frac{1}{(\frac{x}{\sqrt{2}})^2+1} dx = \frac{\sqrt{2}}{2} \int_0^1 \frac{1}{(\frac{x}{\sqrt{2}})^2+1} \frac{1}{\sqrt{2}} dx = \frac{\sqrt{2}}{2} \left[ \operatorname{Arctg} \frac{x}{\sqrt{2}} \right]_0^1 = \frac{\sqrt{2}}{2} \operatorname{Arctg} \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

(b) Si ha

$$\int_0^1 \frac{1}{3x^2+1} dx = \frac{1}{\sqrt{3}} \int_0^1 \frac{1}{(\sqrt{3}x)^2+1} \sqrt{3} dx = \frac{1}{\sqrt{3}} \left[ \operatorname{Arctg}(\sqrt{3}x) \right]_0^1 = \frac{1}{\sqrt{3}} \operatorname{Arctg} \sqrt{3} = \frac{1}{\sqrt{3}} \frac{\pi}{3}.$$

(c) Eseguendo la divisione  $x^2 : (x+1)$  si trova  $x^2 = (x+1)(x-1) + 1$ . Quindi si ha  $\frac{x^2}{x+1} = x-1 + \frac{1}{x+1}$ . Quindi si ha

$$\int_0^2 \frac{x^2}{x+1} dx = \int_0^2 \left( x-1 + \frac{1}{x+1} \right) dx = \left[ \frac{1}{2}x^2 - x + \log|x+1| \right]_0^2 = 2-2 + \log 3 = \log 3.$$

(d) Si ha

$$\frac{x-1}{x+1} = \frac{x+1-2}{x+1} = 1 - \frac{2}{x+1}.$$

$$\text{Quindi si ha } \int_0^1 \frac{x-1}{x+1} dx = \int_0^1 \left( 1 - \frac{2}{x+1} \right) dx = [x - 2 \log(x+1)]_0^1 = 1 - 2 \log 2.$$

(e) Si ha  $x^2 - 3x + 2 = (x-2)(x-1)$ .Quindi esistono  $A, B \in \mathbf{R}$  tali che

$$\frac{1}{x^2-3x+2} = \frac{A}{x-2} + \frac{B}{x-1};$$

quindi si ha  $1 = A(x-1) + B(x-2)$ .Per  $x=1$  si trova  $1 = -B$ ; quindi  $B = -1$ . Per  $x=2$  si trova  $1 = A$ .

Quindi si ha

$$\frac{1}{x^2-3x+2} = \frac{1}{x-2} - \frac{1}{x-1}.$$

Si ha quindi

$$\int_{-1}^0 \frac{1}{x^2-3x+2} dx = \int_{-1}^0 \left( \frac{1}{x-2} - \frac{1}{x-1} \right) dx = [\log|x-2| - \log|x-1|]_{-1}^0 = \log 2 - \log 3 + \log 2 = 2 \log 2 - \log 3.$$

(f) Si ha  $x^4 + x^2 = x^2(x^2 + 1)$ .Quindi esistono  $A, B, C, D \in \mathbf{R}$  tali che

$$\frac{x+4}{x^4+x^2} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x^2} + \frac{Cx+D}{x^2+1}.$$

Si ha  $x+4 = Ax(x^2+1) + B(x^2+1) + (Cx+D)x^2$ .Per  $x=0$  si trova  $4 = B$ ; quindi  $B = 4$ .

Quindi

$$x + 4 = Ax(x^2 + 1) + 4(x^2 + 1) + (Cx + D)x^2, \text{ quindi}$$

$$-4x^2 + x = Ax(x^2 + 1) + (Cx + D)x^2, \text{ quindi}$$

$$(-4x + 1)x = Ax(x^2 + 1) + (Cx + D)x^2, \text{ quindi}$$

$$-4x + 1 = A(x^2 + 1) + (Cx + D)x.$$

Per  $x = 0$  si trova  $1 = A$ ; quindi  $A = 1$ .

Quindi

$$-4x + 1 = x^2 + 1 + (Cx + D)x, \text{ quindi}$$

$$-x^2 - 4x = (Cx + D)x, \text{ quindi}$$

$$(-x - 4)x = (Cx + D)x, \text{ quindi}$$

$$-x - 4 = Cx + D, \text{ quindi}$$

$$C = -1, D = -4.$$

Quindi si ha

$$\frac{x+4}{x^4+x^2} = \frac{1}{x} + \frac{4}{x^2} - \frac{x+4}{x^2+1}.$$

Si ha quindi

$$\int_1^2 \frac{x+4}{x^4+x^2} dx = \int_1^2 \left( \frac{1}{x} + \frac{4}{x^2} - \frac{x+4}{x^2+1} \right) dx =$$

$$\int_1^2 \left( \frac{1}{x} + \frac{4}{x^2} - \frac{1}{2} \frac{2x}{x^2+1} - 4 \frac{1}{x^2+1} \right) dx =$$

$$\left[ \log x - \frac{4}{x} - \frac{1}{2} \log(x^2 + 1) - 4 \operatorname{Arctg} x \right]_1^2 =$$

$$\log 2 - 2 - \frac{1}{2} \log 5 - 4 \operatorname{Arctg} 2 + 4 + \frac{1}{2} \log 2 + 4 \operatorname{Arctg} 1 =$$

$$\frac{3}{2} \log 2 - \frac{1}{2} \log 5 + 2 - 4 \operatorname{Arctg} 2 + \pi = \frac{1}{2} \log \frac{8}{5} + 2 - 4 \operatorname{Arctg} 2 + \pi.$$

(g) Si ha  $x^4 + x^3 = x^3(x + 1)$ .

Quindi esistono  $A, B, C, D \in \mathbf{R}$  tali che

$$\frac{x+3}{x^4+x^3} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x^2} + \frac{C}{x^3} + \frac{D}{x+1}.$$

$$\text{Si ha } x + 3 = Ax^2(x + 1) + Bx(x + 1) + C(x + 1) + Dx^3.$$

Per  $x = 0$  si trova  $3 = C$ ; quindi  $C = 3$ .

Quindi

$$x + 3 = Ax^2(x + 1) + Bx(x + 1) + 3(x + 1) + Dx^3, \text{ quindi}$$

$$-2x = Ax^2(x + 1) + Bx(x + 1) + Dx^3, \text{ quindi}$$

$$-2 = Ax(x + 1) + B(x + 1) + Dx^2.$$

Per  $x = 0$  si trova  $-2 = B$ ; quindi  $B = -2$ .

Quindi

$$-2 = Ax(x + 1) - 2(x + 1) + Dx^2, \text{ quindi}$$

$$2x = Ax(x + 1) + Dx^2, \text{ quindi}$$

$$2 = A(x + 1) + Dx.$$

Per  $x = 0$  si trova  $2 = A$ ; quindi  $A = 2$ .

Per  $x = 1$  si trova  $2 = -D$ ; quindi  $D = -2$ .

Quindi si ha

$$\frac{x+3}{x^4+x^3} = \frac{3}{x} - \frac{2}{x^2} + \frac{3}{x^3} - \frac{2}{x+1}.$$

Si ha quindi

$$\int_1^2 \frac{x+3}{x^4+x^3} dx = \int_1^2 \left( \frac{3}{x} - \frac{2}{x^2} + \frac{3}{x^3} - \frac{2}{x+1} \right) dx =$$

$$\left[ 2 \log x + \frac{2}{x} - \frac{3}{2} \frac{1}{x^2} + 2 \log(x + 1) \right]_1^2 =$$

$$2 \log 2 + 1 - \frac{3}{8} - 2 \log 3 - 2 + \frac{3}{2} + 2 \log 2 =$$

$$\frac{3}{2} \log 2 - \frac{1}{2} \log 5 + 2 - 4 \operatorname{Arctg} 2 + \pi = 4 \log 2 - 2 \log 3 + \frac{1}{8} = 2 \log \frac{4}{3} + \frac{1}{8}.$$

(h) Si ha  $x^3 + 2x^2 = x^2(x + 2)$ .

Quindi esistono  $A, B, C \in \mathbf{R}$  tali che

$$\frac{1}{x^2(x+2)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x^2} + \frac{C}{x+2}.$$

Si ha  $1 = Ax(x+2) + B(x+2) + Cx^2$ , per ogni  $x \in \mathbf{R}$ .

Per  $x = 0$  si trova  $1 = 2B$ ; quindi  $B = \frac{1}{2}$ .

Per  $x = -2$  si trova  $1 = 4B$ ; quindi  $C = \frac{1}{4}$ .

Quindi

$$1 = Ax(x+2) + \frac{1}{2}(x+2) + \frac{1}{4}x^2, \text{ quindi}$$

$$4 = 4Ax^2(x+1) + 2x + 4 + x^2, \text{ quindi}$$

$$-x^2 - 2x = 4Ax(x+2); \text{ quindi}$$

$$\cdot -x(x+2) = 4Ax(x+2); \text{ quindi}$$

$$\cdot -1 = 4A; A = -\frac{1}{4}.$$

Quindi si ha

$$\frac{1}{x^3+2x^2} = -\frac{1}{4} \frac{1}{x} - \frac{1}{2} \frac{1}{x^2} + \frac{1}{4} \frac{1}{x+2}.$$

Si ha quindi

$$\int_1^2 \frac{1}{x^3+2x^2} dx = \int_1^2 \left( -\frac{1}{4} \frac{1}{x} - \frac{1}{2} \frac{1}{x^2} + \frac{1}{4} \frac{1}{x+2} \right) dx =$$

$$\frac{1}{2} \left[ -\frac{1}{2} \log x - \frac{1}{x} + \frac{1}{2} \log(x+2) \right]_1^2 = \frac{1}{2} \left[ \frac{1}{2} \log \frac{x+2}{x} - \frac{1}{x} \right]_1^2 =$$

$$\frac{1}{2} \left( \frac{1}{2} \log 2 - \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \log 3 + 1 \right) = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \log \frac{3}{2} \right) = \frac{1}{4} - \frac{1}{4} \log \frac{3}{2}.$$

(i) Si ha

$$\frac{x^2+1}{x^2+3x+2} dx = \frac{x^2+3x+2-3x-2+1}{x^2+3x+2} dx = 1 - \frac{3x+1}{x^2+3x+2} dx.$$

Si ha

$$x^2 + 3x + 2 = (x+1)(x+2).$$

Esistono  $A, B \in \mathbf{R}$  tali che

$$\frac{3x+1}{x^2+3x+2} dx = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{x+2}.$$

Si ha

$$3x+1 = A(x+2) + B(x+1).$$

Per  $x = -1$  si ha  $-2 = A$ ; quindi  $A = -2$ .

Per  $x = -2$  si ha  $-5 = -B$ ; quindi  $B = 5$ .

Si ha quindi  $\frac{3x+1}{x^2+3x+2} dx = -\frac{2}{x+1} + \frac{5}{x+2}$ .

$$\text{Si ha quindi } \int_0^1 \frac{x^2+1}{x^2+3x+2} dx = \int_0^1 \left( 1 + \frac{2}{x+1} - \frac{5}{x+2} \right) dx =$$

$$[x + 2 \log(x+1) - 5 \log(x+2)]_0^1 = 1 + 2 \log 2 - 5 \log 3 + 5 \log 2 =$$

$$1 - 5 \log 3 + 7 \log 2.$$

## 11.8 Integrazione di alcune funzioni irrazionali

1. **Esercizio.** Calcolare i seguenti integrali:

(a)  $\int_2^3 \frac{x^2}{\sqrt{x-1}} dx;$

- (b)  $\int_1^{16} \frac{1}{\sqrt{x} + \sqrt[4]{x}} dx$ ;  
 (c)  $\int_1^{64} \frac{1}{\sqrt{x} + \sqrt[3]{x}} dx$ ;  
 (d)  $\int_0^1 \sqrt{\frac{x}{x+1}} dx$ ;  
 (e)  $\int_0^{\frac{3}{2}} \frac{1}{(2x^2+3x+1)\sqrt{2x+1}} dx$ ;  
 (f)  $\int_0^4 \frac{2x-x\sqrt{x}}{\sqrt{x+1}} dx$ ;

**Risoluzione.**

- (a) Poniamo  $\sqrt{x-1} = t$ . Si ha  $x-1 = t^2$ ; quindi  $x = 1+t^2$ ; quindi  $\frac{dx}{dt} = 2t$ .  
 Per  $x = 2$  si ha  $t = 1$ ; per  $x = 3$  si ha  $t = \sqrt{2}$ .

Si ha quindi

$$\begin{aligned} \int_2^3 \frac{x^2}{\sqrt{x-1}} dx &= \int_1^{\sqrt{2}} \frac{(1+t^2)^2}{t} 2t dt = 2 \int_1^{\sqrt{2}} (1+2t^2+t^4) dt = \\ &= 2 \left[ t + \frac{2}{3}t^3 + \frac{1}{5}t^5 \right]_1^{\sqrt{2}} = 2 \left( \sqrt{2} + \frac{2}{3}2\sqrt{2} + \frac{1}{5}4\sqrt{2} - 1 - \frac{2}{3} - \frac{1}{5} \right) = \\ &= 2 \left( \frac{47}{15}\sqrt{2} - \frac{28}{15} \right) = \frac{94}{15}\sqrt{2} - \frac{56}{15}. \end{aligned}$$

- (b) Poniamo  $\sqrt[4]{x} = t$ . Si ha  $x = t^4$ ; quindi  $\frac{dx}{dt} = 4t^3$ . Per  $x = 1$  si ha  $t = 1$ ;  
 per  $x = 16$  si ha  $t = 2$ .

Si ha quindi

$$\int_1^{16} \frac{1}{\sqrt{x} + \sqrt[4]{x}} dx = \int_1^2 \frac{1}{t^2+t} 4t^3 dt = 4 \int_1^2 \frac{t^2}{t+1} dt.$$

Eseguito la divisione  $t^2 : (t+1)$  si trova

$$t^2 = (t-1)(t+1) + 1.$$

Si ha quindi

$$\frac{t^2}{t+1} = t - 1 + \frac{1}{t+1}.$$

$$\text{Si ha quindi } 4 \int_1^2 \frac{t^2}{t+1} dt = 4 \int_1^2 \left( t - 1 + \frac{1}{t+1} \right) dt =$$

$$\begin{aligned} &= 4 \left[ \frac{1}{2}t^2 - t + \log(t+1) \right]_1^2 + 1^2 = \\ &= 4 \left( 2 - 2 + \log 3 - \frac{1}{2} + 1 - \log 2 \right) = \\ &= 4 \left( \frac{1}{2} + \log \frac{3}{2} \right) = 2 + 4 \log 3. \end{aligned}$$

- (c) Poniamo  $\sqrt[6]{x} = t$ . Si ha  $x = t^6$ ; quindi  $\frac{dx}{dt} = 6t^5$ . Per  $x = 1$  si ha  $t = 1$ ;  
 per  $x = 64$  si ha  $t = 2$ .

Si ha quindi

$$\int_1^{64} \frac{1}{\sqrt{x} + \sqrt[3]{x}} dx = \int_1^2 \frac{1}{t^3+t^2} 6t^5 dt = 6 \int_1^2 \frac{t^3}{t+1} dt.$$

Eseguito la divisione  $t^3 : (t+1)$  si trova

$$t^3 = (t^2 - t + 1)(t+1) - 1.$$

Si ha quindi

$$\frac{t^3}{t+1} = t^2 - t + 1 - \frac{1}{t+1}.$$

$$\text{Si ha quindi } 6 \int_1^2 \frac{t^3}{t+1} dt = 6 \int_1^2 \left( t^2 - t + 1 - \frac{1}{t+1} \right) dt =$$

$$\begin{aligned} &= 6 \left[ \frac{1}{3}t^3 - \frac{1}{2}t^2 + t - \log(t+1) \right]_1^2 + 1^2 = \\ &= 6 \left( \frac{8}{3} - 2 + 2 - \log 3 - \frac{1}{3} + \frac{1}{2} - 1 + \log 2 \right) = \\ &= 6 \left( \frac{11}{6} + \log \frac{2}{3} \right) = 11 + 6 \log 2. \end{aligned}$$

## 11.8. INTEGRAZIONE DI ALCUNE FUNZIONI IRRAZIONALI

149

(d) Poniamo  $\sqrt{\frac{x}{x+1}} = t$ . Risulta  $\frac{x}{x+1} = t^2$ ; quindi  $x = xt^2 + t^2$ ; quindi  $x(1-t^2) = t^2$ ; quindi  $x = \frac{t^2}{1-t^2}$ .

Si ha quindi

$$\frac{dx}{dt} = \frac{2t(1-t^2) + 2tt^2}{(1-t^2)^2} = \frac{2t}{(1-t^2)^2}.$$

Per  $x = 0$  si ha  $t = 0$ ; per  $x = 1$  si ha  $t = \sqrt{\frac{1}{2}}$ .

Si ha quindi

$$\int_0^1 \sqrt{\frac{x}{x+1}} dx = \int_0^{\sqrt{\frac{1}{2}}} t \frac{2t}{(1-t^2)^2} dt = 2 \int_0^{\sqrt{\frac{1}{2}}} \frac{t^2}{(t^2-1)^2} dt.$$

Si ha  $(t^2-1)^2 = (t-1)^2(t+1)^2$ .

Esistono  $A, B, C, D$  tali che

$$\frac{t^2}{(t^2-1)^2} = \frac{A}{t-1} + \frac{B}{(t-1)^2} + \frac{C}{t+1} + \frac{D}{(t+1)^2}.$$

Si ha

$$t^2 = A(t-1)(t+1)^2 + B(t+1)^2 + C(t-1)^2(t+1) + D(t-1)^2.$$

Per  $t = 1$  si ha  $1 = 4B$ ; quindi  $B = \frac{1}{4}$ .

Per  $t = -1$  si ha  $1 = 4D$ ; quindi  $D = \frac{1}{4}$ .

Si ha quindi

$$t^2 = A(t-1)(t+1)^2 + \frac{1}{4}(t+1)^2 + C(t-1)^2(t+1) + \frac{1}{4}(t-1)^2; \text{ quindi}$$

$$4t^2 = 4A(t-1)(t+1)^2 + t^2 + 2t + 1 + 4C(t-1)^2(t+1) + t^2 - 2t + 1; \text{ quindi}$$

$$2(t^2-1) = 4A(t-1)(t+1)^2 + 4C(t-1)^2(t+1); \text{ quindi}$$

$$2 = 4A(t+1) + 4C(t-1); \text{ quindi}$$

$$1 = 2A(t+1) + 2C(t-1).$$

Per  $t = 1$  si ha  $1 = 4A$ ; quindi  $A = \frac{1}{4}$ .

Per  $t = -1$  si ha  $1 = -4C$ ; quindi  $C = -\frac{1}{4}$ .

Si ha quindi

$$\frac{t^2}{(t^2-1)^2} = \frac{1}{4} \frac{1}{t-1} + \frac{1}{4} \frac{1}{(t-1)^2} - \frac{1}{4} \frac{1}{t+1} + \frac{1}{4} \frac{1}{(t+1)^2}.$$

Si ha quindi

$$2 \int_0^{\sqrt{\frac{1}{2}}} \frac{t^2}{(t^2-1)^2} dt = 2 \int_0^{\sqrt{\frac{1}{2}}} \left( \frac{1}{4} \frac{1}{t-1} + \frac{1}{4} \frac{1}{(t-1)^2} - \frac{1}{4} \frac{1}{t+1} + \frac{1}{4} \frac{1}{(t+1)^2} \right) dt =$$

$$\frac{1}{2} \left[ \log |t-1| - \frac{1}{t-1} - \log |t+1| - \frac{1}{t+1} \right]_0^{\sqrt{\frac{1}{2}}} =$$

$$\frac{1}{2} \left( \log \left| \sqrt{\frac{1}{2}} - 1 \right| - \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{2}} - 1} - \log \left| \sqrt{\frac{1}{2}} + 1 \right| - \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{2}} + 1} + \frac{1}{-1} + 1 \right) =$$

$$\frac{1}{2} \left( \log \left| \frac{1-\sqrt{2}}{\sqrt{2}} \right| - \frac{\sqrt{2}}{1-\sqrt{2}} - \log \left| \frac{1+\sqrt{2}}{\sqrt{2}} \right| - \frac{\sqrt{2}}{1+\sqrt{2}} \right) =$$

$$\frac{1}{2} \left( \log \left| \frac{1-\sqrt{2}}{1+\sqrt{2}} \right| - \frac{\sqrt{2}+2+\sqrt{2}-2}{1-2} \right) = \frac{1}{2} (\log(1-\sqrt{2})^2 + 2\sqrt{2}) =$$

$$\log(\sqrt{2}-1) + \sqrt{2}.$$

(e) Poniamo  $\sqrt{2x+1} = t$ .

Si ha  $2x+1 = t^2$ ; quindi  $x = \frac{1}{2}(t^2 - 1)$ .

Si ha  $\frac{dx}{dt} = t$ .

Per  $x = 0$ , si ha  $t = 1$ ; per  $x = \frac{3}{2}$ , si ha  $t = 2$ .

Si ha quindi

$$\int_0^{\frac{3}{2}} \frac{1}{(2x^2+3x+1)\sqrt{2x+1}} dx = \int_1^2 \frac{1}{\left(2\left(\frac{t^2-1}{2}\right)^2 + 3\frac{t^2-1}{2} + 1\right)t} t dt =$$

$$\int_1^2 \frac{1}{\frac{t^4-2t^2+1}{2} + \frac{3t^2-3}{2} + 1} dt = \int_1^2 \frac{2}{t^4-2t^2+1+3t^2-3+2} dt = 2 \int_1^2 \frac{2}{t^4+t^2} dt.$$

Si ha  $t^4 + t^2 = t^2(t^2 + 1)$ .

Esistono  $A, B, C, D \in \mathbf{R}$  tali che

$$\frac{1}{t^2(t^2+1)} = \frac{A}{t} + \frac{B}{t^2} + \frac{Ct+D}{t^2+1}.$$

Si ha

$$1 = At(t^2 + 1) + B(t^2 + 1) + (Ct + D)t^2, \text{ per ogni } t \in \mathbf{R}.$$

Per  $t = 0$ , si ha  $1 = B$ ; cioè  $B = 1$ .

Si ha quindi

$$1 = At(t^2 + 1) + t^2 + 1 + (Ct + D)t^2; \text{ quindi}$$

$$\cdot -t^2 = At(t^2 + 1) + (Ct + D)t^2; \text{ quindi}$$

$$\cdot -t = A(t^2 + 1) + (Ct + D)t, \text{ per ogni } t \in \mathbf{R}.$$

Per  $t = 0$ , si ha  $0 = A$ ; cioè  $A = 0$ .

Si ha quindi

$$-t = (Ct + D)t; \text{ quindi}$$

$$\cdot -1 = Ct + D; \text{ quindi}$$

$$C = 0, D = -1.$$

Si ha quindi

$$\frac{1}{t^2(t^2+1)} = \frac{1}{t^2} - \frac{1}{t^2+1}.$$

Si ha quindi

$$2 \int_1^2 \frac{2}{t^4+t^2} dt = 2 \int_1^2 \left( \frac{1}{t^2} - \frac{1}{t^2+1} \right) dt = 2 \left[ -\frac{1}{t} - \text{Arctg } t \right]_1^2 t =$$

$$2 \left( -\frac{1}{2} - \text{Arctg } 2 + 1 + \text{Arctg } 1 \right) = 2 \left( \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2} - \text{Arctg } 2 \right) = \frac{\pi}{2} + 1 - 2 \text{Arctg } 2.$$

(f) Poniamo  $\sqrt{x} = t$ .

Si ha  $x = t^2$ .

Si ha  $\frac{dx}{dt} = 2t$ .

Per  $x = 0$ , si ha  $t = 0$ ; per  $x = 4$ , si ha  $t = 2$ .

Si ha quindi

$$\int_0^4 \frac{2x-x\sqrt{x}}{\sqrt{x+1}} dx = \int_0^2 \frac{2t^2-t^3}{t+1} 2t dt = 2 \int_0^2 \frac{-t^4+2t^2}{t+1} dt.$$

Eseguendo la divisione  $(-t^4 + 2t^2) : (t + 1)$  si trova

$$-t^4 + t^2 = (t + 1)(-t^3 + 3t^2 - 3t + 3).$$

Si ha quindi

$$\frac{-t^4 + t^2}{t + 1} = -t^3 + 3t^2 - 3t + 3 - \frac{3}{t + 1}.$$

Si ha quindi

$$2 \int_0^2 \frac{-t^4 + t^2}{t+1} dt = 2 \int_0^2 \left( -t^3 + 3t^2 - 3t + 3 - \frac{3}{t+1} \right) dt =$$

$$2 \left[ -\frac{1}{4}t^4 + t^3 - \frac{3}{2}t^2 + 3t - 3 \log(t+1) \right]_0^2 = 2(-4 + 8 - 6 + 6 - 3 \log 3) =$$

$$2(4 - 3 \log 3) = 8 - 6 \log 3.$$

2. **Esercizio.** Calcolare i seguenti integrali:

(a)  $\int_0^1 \sqrt{1 - \frac{x^2}{4}} dx;$

(b)  $\int_1^{2 \operatorname{sh} 1} \sqrt{1 + \frac{x^2}{4}} dx;$

(c)  $\int_2^{2 \operatorname{ch} 1} \sqrt{\frac{x^2}{4} - 1} dx;$

**Risoluzione.**

- (a) Poniamo  $x = 2 \sin t$ ; si ha  $\frac{dx}{dt} = 2 \cos t$ . Per  $x = 0$  possiamo scegliere  $t = 0$ ; per  $x = 1$  possiamo scegliere  $t = \operatorname{Arcsin} \frac{1}{3} = \frac{\pi}{6}$ .

Si ha quindi

$$\int_0^1 \sqrt{1 - \frac{x^2}{4}} dx = \int_0^{\frac{\pi}{6}} \sqrt{1 - \frac{4 \sin^2 t}{4}} 2 \cos t dt = 2 \int_0^{\frac{\pi}{6}} \sqrt{1 - \sin^2 t} \cos t dt =$$

$$2 \int_0^{\frac{\pi}{6}} \sqrt{\cos^2 t} \cos t dt = 2 \int_0^{\frac{\pi}{6}} |\cos t| \cos t dt = 2 \int_0^{\frac{\pi}{6}} \cos^2 t dt =$$

$$2 \int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{1 + \cos(2t)}{2} dt = \int_0^{\frac{\pi}{6}} (1 + \cos(2t)) dt = \left[ t + \frac{1}{2} \sin(2t) \right]_0^{\frac{\pi}{6}} =$$

$$\frac{\pi}{6} + \frac{1}{2} \sin \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{6} + \frac{\sqrt{3}}{4}.$$

- (b) Poniamo  $x = 2 \operatorname{sh} t$ ; si ha  $\frac{dx}{dt} = 2 \operatorname{ch} t$ . Per  $x = 0$  possiamo scegliere  $t = 0$ ; per  $x = 2 \operatorname{sh} 1$  possiamo scegliere  $t = 1$ .

Si ha quindi

$$\int_0^{2 \operatorname{sh} 1} \sqrt{1 + \frac{x^2}{4}} dx = \int_0^1 \sqrt{1 + \frac{4 \operatorname{sh}^2 t}{4}} 2 \operatorname{ch} t dt = 2 \int_0^1 \sqrt{1 + \operatorname{sh}^2 t} \operatorname{ch} t dt =$$

$$2 \int_0^1 \sqrt{\operatorname{ch}^2 t} \operatorname{ch} t dt = 2 \int_0^1 \operatorname{ch}^2 t dt = 2 \int_0^1 \frac{\operatorname{ch}(2t) + 1}{2} dt = \int_0^1 (\operatorname{ch}(2t) + 1) dt =$$

$$\left[ \frac{1}{2} \operatorname{sh}(2t) + t \right]_0^1 = \frac{1}{2} \operatorname{sh} 2 + 1.$$

- (c) Poniamo  $x = 2 \operatorname{ch} t$ ; si ha  $\frac{dx}{dt} = 2 \operatorname{sh} t$ . Per  $x = 2$  si ha  $2 = 2 \operatorname{ch} t$ ; quindi  $\operatorname{ch} t = 1$ ; possiamo quindi scegliere  $t = 0$ ; per  $x = 2 \operatorname{ch} 1$  si ha  $2 \operatorname{ch} t = 2 \operatorname{ch} 2$ ; quindi  $\operatorname{ch} t = \operatorname{ch} 2$ ; possiamo scegliere  $t = 1$ .

Si ha quindi

$$\int_2^{2 \operatorname{ch} 1} \sqrt{\frac{x^2}{4} - 1} dx = \int_0^1 \sqrt{\frac{4 \operatorname{ch}^2 t}{4} - 1} 2 \operatorname{sh} t dt = 2 \int_0^1 \sqrt{\operatorname{ch}^2 t - 1} \operatorname{sh} t dt =$$

$$2 \int_0^1 \sqrt{\operatorname{sh}^2 t} \operatorname{sh} t dt = 2 \int_0^1 |\operatorname{sh} t| \operatorname{sh} t dt = 2 \int_0^1 \operatorname{sh}^2 t dt = 2 \int_0^1 \frac{\operatorname{ch}(2t) - 1}{2} dt =$$

$$\int_0^1 (\operatorname{ch}(2t) - 1) dt = \left[ \frac{1}{2} \operatorname{sh}(2t) - t \right]_0^1 = \frac{1}{2} \operatorname{sh} 2 - 1.$$

## 11.9 Integrazione di alcune funzioni trascendenti

1. **Esercizio.** Calcolare i seguenti integrali:

$$(a) \int_0^1 \frac{3-e^x}{1+e^{2x}} dx;$$

$$(b) \int_0^1 \frac{5+e^x}{12-7e^x+e^{2x}} dx;$$

$$(c) \int_0^1 \frac{1}{1+2^x} dx;$$

$$(d) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\sin x + \cos x} dx;$$

$$(e) \int_0^1 \frac{\operatorname{tg} x}{\cos^2 x + 2} dx;$$

$$(f) \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\cos(2x)}{2+\cos(2x)} dx.$$

**Risoluzione.**

(a) Poniamo  $e^x = t$ . Risulta  $x = \log t$  e  $\frac{dx}{dt} = \frac{1}{t}$ ; per  $x = 0$ , si ha  $t = 1$ ; per  $x = 1$  si ha  $t = e$ .

Si ha quindi

$$\int_0^1 \frac{3-e^x}{1+e^{2x}} dx = \int_1^e \frac{3-t}{1+t^2} \frac{1}{t} dt = \int_1^e \frac{3-t}{t(1+t^2)} dt.$$

Esistono  $A, B, C \in \mathbf{R}$  tali che

$$\frac{3-t}{t(1+t^2)} = \frac{A}{t} + \frac{Bt+C}{t^2+1}.$$

Si ha

$$3-t = A(t^2+1) + (Bt+C)t;$$

per  $t = 0$  si ha  $3 = A$ ; quindi  $A = 3$ .

Si ha quindi

$$3-t = 3(t^2+1) + (Bt+C)t, \text{ cioè}$$

$$-3t^2 - t = (Bt+C)t, \text{ cioè}$$

$$(-3t-1)t = (Bt+C)t, \text{ cioè}$$

$$-3t-1 = Bt+C;$$

si ha quindi  $B = -3$  e  $C = -1$ .

Si ha quindi

$$\frac{3-t}{t(1+t^2)} = \frac{3}{t} - \frac{3t+1}{t^2+1}.$$

Si ha quindi

$$\int_1^e \frac{3-t}{t(1+t^2)} dt = \int_1^e \left( \frac{3}{t} - \frac{3t+1}{t^2+1} \right) dt = \int_1^e \left( \frac{3}{t} - \frac{3t}{t^2+1} - \frac{1}{t^2+1} \right) dt =$$

$$\int_1^e \left( \frac{3}{t} - \frac{3}{2} \frac{1}{t^2+1} (2t) - \frac{1}{t^2+1} \right) dt = \left[ 3 \log t - \frac{3}{2} \log(t^2+1) - \operatorname{Arctg} t \right]_1^e =$$

$$3 - \frac{3}{2} \log(e^2+1) - \operatorname{Arctg} e + \frac{3}{2} \log 2 + \operatorname{Arctg} 1 = 3 + \frac{3}{2} \log \frac{2}{e^2+1} - \operatorname{Arctg} e + \frac{\pi}{4}.$$

(b) Poniamo  $e^x = t$ . Risulta  $x = \log t$  e  $\frac{dx}{dt} = \frac{1}{t}$ ; per  $x = 0$ , si ha  $t = 1$ ; per  $x = 1$  si ha  $t = e$ .

Si ha quindi

$$\int_0^1 \frac{5+e^x}{12-7e^x+e^{2x}} dx = \int_1^e \frac{5+t}{12-7t+t^2} \frac{1}{t} dt = \int_1^e \frac{t+5}{t(t^2-7t+12)} dt.$$

Si ha  $t^2 - 7t + 12 = (t-3)(t-4)$ .

Si ha quindi

$$\frac{t+5}{t(t^2-7t+12)} = \frac{t+5}{t(t-3)(t-4)}.$$

Esistono  $A, B, C \in \mathbf{R}$  tali che

$$\frac{t+5}{t(t-3)(t-4)} = \frac{A}{t} + \frac{B}{t-3} + \frac{C}{t-4}.$$

Si ha

$$t+5 = A(t-3)(t-4) + Bt(t-4) + Ct(t-3).$$

Per  $t=0$  si ha  $5 = 12A$ ; quindi  $A = \frac{5}{12}$ .

Per  $t=3$  si ha  $8 = -3B$ ; quindi  $B = -\frac{8}{3}$ .

Per  $t=4$  si ha  $9 = 4C$ ; quindi  $C = \frac{9}{4}$ .

Si ha quindi

$$\frac{5+t}{t(t-3)(t-4)} = \frac{5}{12} \frac{1}{t} - \frac{8}{3} \frac{1}{t-3} + \frac{9}{4} \frac{1}{t-4}.$$

Si ha quindi

$$\begin{aligned} \int_1^e \frac{t+5}{t(t^2-7t+12)} dt &= \int_1^e \left( \frac{5}{12} \frac{1}{t} - \frac{8}{3} \frac{1}{t-3} + \frac{9}{4} \frac{1}{t-4} \right) dt = \\ &= \left[ \frac{5}{12} \log |t| - \frac{8}{3} \log |t-3| + \frac{9}{4} \log |t-4| \right]_1^e = \\ &= \frac{5}{12} - \frac{8}{3} \log(3-e) + \frac{9}{4} \log(4-e) + \frac{8}{3} \log 2 - \frac{9}{4} \log 2 = \frac{5}{12} + \frac{8}{3} \log \frac{2}{3-e} + \frac{9}{4} \log \frac{4-e}{3}. \end{aligned}$$

(c) Poniamo  $2^x = t$ .

Si ha  $x = \log_2 t$ .

Si ha  $\frac{dx}{dt} = \frac{1}{\log 2} \frac{1}{t}$ .

Per  $x=0$ , si ha  $t=1$ ; per  $x=1$ , si ha  $t=2$ .

Si ha quindi

$$\int_0^1 \frac{1}{1+2^x} dx = \int_1^2 \frac{1}{1+t} \frac{1}{\log 2} \frac{1}{t} dt = \frac{1}{\log 2} \int_1^2 \frac{1}{t(t+1)} dt.$$

Esistono  $A, B \in \mathbf{R}$  tali che

$$\frac{1}{t(t+1)} = \frac{A}{t} + \frac{B}{t+1}.$$

Si ha

$$1 = A(t+1) + Bt,$$

per ogni  $t \in \mathbf{R}$ .

Per  $t=0$  si ha  $1 = A$ ; quindi  $A = 1$ . Per  $t=1$  si ha  $1 = -B$ ; quindi  $B = -1$ .

Si ha quindi

$$\frac{1}{t(t+1)} = \frac{1}{t} - \frac{1}{t+1}.$$

Si ha quindi

$$\frac{1}{\log 2} \int_0^1 \frac{1}{1+2^x} dx = \frac{1}{\log 2} \int_1^2 \left( \frac{1}{t} - \frac{1}{t+1} \right) dt =$$

$$\frac{1}{\log 2} [\log t - \log(t+1)]_1^2 = \frac{1}{\log 2} (\log 2 - \log 3 + \log 2) =$$

$$\frac{1}{\log 2} (2 \log 2 - \log 3) = 2 - \frac{\log 3}{\log 2}.$$

(d) Poniamo  $\operatorname{tg} \frac{x}{2} = t$ .

Si ha  $x = 2 \operatorname{Arctg} t$ .

Si ha  $\frac{dx}{dt} = \frac{2}{1+t^2}$ .

Per  $x = 0$ , si ha  $t = 0$ ; per  $x = \frac{\pi}{2}$ , si ha  $t = 1$ .

Si ha  $\sin x = \frac{2t}{1+t^2}$  e  $\cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}$ .

Si ha quindi

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\sin x + \cos x} dx = \int_0^1 \frac{1}{\frac{2t}{1+t^2} + \frac{1-t^2}{1+t^2}} \frac{2}{1+t^2} dt =$$

$$-2 \int_0^1 \frac{1}{t^2 - 2t - 1} dt.$$

Si ha  $t^2 - 2t - 1 = 0$  se e solo se  $t = 1 \pm \sqrt{2}$ ; si ha quindi  $t^2 - 2t - 1 = (t - (1 + \sqrt{2}))(t - (1 - \sqrt{2}))$ .

Esistono  $A, B \in \mathbf{R}$  tali che

$$\frac{1}{(t - (1 + \sqrt{2}))(t - (1 - \sqrt{2}))} = \frac{A}{t - (1 + \sqrt{2})} + \frac{B}{t - (1 - \sqrt{2})}.$$

Si ha

$$1 = A(t - (1 - \sqrt{2})) + B(t - (1 + \sqrt{2})),$$

per ogni  $t \in \mathbf{R}$ .

Per  $t = 1 - \sqrt{2}$  si ha  $1 = B(1 - \sqrt{2} - 1 - \sqrt{2})$ ; quindi  $1 = -2\sqrt{2}B$ ; quindi  $B = -\frac{\sqrt{2}}{4}$ . Per  $t = 1 + \sqrt{2}$  si ha  $1 = A(1 + \sqrt{2} - 1 + \sqrt{2})$ ; quindi  $1 = 2\sqrt{2}A$ ; quindi  $A = \frac{\sqrt{2}}{4}$ .

Si ha quindi

$$\frac{1}{(t - (1 + \sqrt{2}))(t - (1 - \sqrt{2}))} = \frac{\sqrt{2}}{4} \frac{1}{t - (1 + \sqrt{2})} - \frac{\sqrt{2}}{4} \frac{1}{t - (1 - \sqrt{2})}.$$

Si ha quindi

$$-2 \int_0^1 \frac{1}{t^2 - 2t - 1} dt =$$

$$-2 \int_0^1 \left( \frac{\sqrt{2}}{4} \frac{1}{t - 1 - \sqrt{2}} - \frac{\sqrt{2}}{4} \frac{1}{t - 1 + \sqrt{2}} \right) dt =$$

$$-\frac{\sqrt{2}}{2} \left[ \log |t-1-\sqrt{2}| - \log |t-1+\sqrt{2}| \right]_0^1 = -\frac{\sqrt{2}}{2} \left[ \log \left| \frac{t-1-\sqrt{2}}{t-1+\sqrt{2}} \right| \right]_0^1 =$$

$$\frac{\sqrt{2}}{2} \log \left| \frac{-1-\sqrt{2}}{-1+\sqrt{2}} \right| = \frac{\sqrt{2}}{2} \log \frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1} = \frac{\sqrt{2}}{2} \log(\sqrt{2}+1)^2 = \sqrt{2} \log(\sqrt{2}+1).$$

(e) Poniamo  $\operatorname{tg} x = t$ .

Si ha  $x = \operatorname{Arctg} t$ .

Si ha  $\frac{dx}{dt} = \frac{1}{1+t^2}$ .

Si ha  $\cos^2 x = \frac{1}{\operatorname{tg}^2 x + 1} = \frac{1}{t^2 + 1}$ .

Per  $x = 0$ , si ha  $t = 0$ ; per  $x = 1$ , si ha  $t = \operatorname{tg} 1$ .

Si ha quindi

$$\int_0^1 \frac{\operatorname{tg} x}{\cos^2 x + 2} dx = \int_0^{\operatorname{tg} 1} \frac{t}{\frac{1}{t^2+1} + 2} \frac{1}{t^2+1} dt = \int_0^{\operatorname{tg} 1} \frac{t}{1+2t^2+2} dt =$$

$$\int_0^{\operatorname{tg} 1} \frac{t}{2t^2+3} dt = \frac{1}{4} \int_0^{\operatorname{tg} 1} \frac{4t}{2t^2+3} dt = \frac{1}{4} [\log(2t^2+3)]_0^{\operatorname{tg} 1} =$$

$$\frac{1}{4} (\log(2 \operatorname{tg}^2 1 + 3) - \log 3) = \frac{1}{4} \log \left( \frac{2}{3} \operatorname{tg}^2 1 + 1 \right).$$

(f) Poniamo  $\operatorname{tg} x = t$ .

Si ha  $x = \operatorname{Arctg} t$ .

Si ha  $\frac{dx}{dt} = \frac{1}{1+t^2}$ .

Per  $x = 0$ , si ha  $t = 0$ ; per  $x = \frac{\pi}{4}$ , si ha  $t = 1$ .

Per le formule parametriche si ha  $\cos(2x) = \frac{1-t^2}{1+t^2}$ .

Si ha quindi

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\cos(2x)}{2+\cos(2x)} dx = \int_0^1 \frac{\frac{1-t^2}{1+t^2}}{2+\frac{1-t^2}{1+t^2}} \frac{1}{1+t^2} dt = \int_0^1 \frac{1-t^2}{(t^2+3)(t^2+1)} dt.$$

Esistono  $A, B, C, D \in \mathbf{R}$  tali che

$$\frac{1-t^2}{(t^2+3)(t^2+1)} = \frac{At+B}{t^2+3} + \frac{Ct+D}{t^2+1}.$$

Si ha

$$1-t^2 = (At+B)(t^2+1) + (Ct+D)(t^2+3).$$

Si ha quindi

$$\begin{cases} A+C=0 \\ B+D=-1 \\ A+3C=0 \\ B+3D=1 \end{cases}.$$

Si ha quindi

$$A=0, C=0, D=1, B=-2.$$

Si ha quindi

$$\frac{1-t^2}{(t^2+3)(t^2+1)} = \frac{1}{t^2+1} - \frac{2}{t^2+3}.$$

Si ha quindi

$$\begin{aligned} \int_0^1 \frac{1-t^2}{(t^2+3)(t^2+1)} dt &= \int_0^1 \frac{1}{t^2+1} - \frac{2}{t^2+3} dt = \\ \int_0^1 \frac{1}{t^2+1} dt - \frac{2}{3} \left( \int_0^1 \frac{1}{\left(\frac{t}{\sqrt{3}}\right)^2+1} dt \right) \sqrt{3} &= \\ \left[ \operatorname{Arctg} t - \frac{2\sqrt{3}}{3} \operatorname{Arctg} \frac{1}{\sqrt{3}} \right]_0^1 &= \frac{\pi}{4} - \frac{2\sqrt{3}}{3} \frac{\pi}{6} = \pi \left( \frac{1}{4} - \frac{\sqrt{3}}{9} \right). \end{aligned}$$

## 11.10 Integrali di vario tipo

1. **Esercizio.** Calcolare i seguenti integrali:

(a)  $\int_1^2 x \log \left( 1 + \frac{1}{x} \right) dx;$

(b)  $\int_1^2 \log \left( x + \frac{1}{x^2} \right) dx;$

(Si può utilizzare la formula

$$\int \frac{ax+b}{x^2+px+q} dx = a \log \sqrt{x^2+px+q} + \frac{2b-pa}{\sqrt{4q-p^2}} \operatorname{Arctg} \frac{2x+p}{\sqrt{4q-p^2}} + c,$$

dove  $p^2 - 4q < 0$ .)

(c)  $\int_e^{e^3} \frac{\sqrt{1+\log x}}{x \log x} dx.$

(d)  $\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{|\sin x \cos x|}{\sin x + 2} dx;$

(e)  $\int_0^{\frac{1}{2} \log 6} \frac{e^{4x}}{\sqrt{3+e^{2x}}} dx.$

**Risoluzione.**

(a) Si ha

$$\begin{aligned} \int_1^2 x \log \left( 1 + \frac{1}{x} \right) dx &= \int_1^2 x \log \frac{x+1}{x} dx = \\ \left[ \frac{1}{2} x^2 \log \frac{x+1}{x} \right]_1^2 - \int_1^2 \frac{1}{2} x^2 \frac{x}{x+1} \left( -\frac{1}{x^2} \right) dx &= \\ \left[ \frac{1}{2} x^2 \log \frac{x+1}{x} \right]_1^2 + \frac{1}{2} \int_1^2 \frac{x}{x+1} dx &= \\ \left[ \frac{1}{2} x^2 \log \frac{x+1}{x} \right]_1^2 + \frac{1}{2} \int_1^2 \frac{x+1-1}{x+1} dx &= \\ \left[ \frac{1}{2} x^2 \log \frac{x+1}{x} \right]_1^2 + \frac{1}{2} \int_1^2 \left( 1 - \frac{1}{x+1} \right) dx &= \\ \left[ \frac{1}{2} x^2 \log \frac{x+1}{x} + \frac{1}{2} x - \frac{1}{2} \log(x+1) \right]_1^2 &= 2 \log \frac{3}{2} - \frac{1}{2} \log 3 - \frac{1}{2} \log 2 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \log 2 = \\ 2 \log 3 - 2 \log 2 - \frac{1}{2} \log 3 + \frac{1}{2} &= \frac{3}{2} \log 3 - 2 \log 2 + \frac{1}{2} = \log \frac{\sqrt{27}}{4} + \frac{1}{2} = \log \frac{3\sqrt{3}}{4} + \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

(b) Si ha

$$\begin{aligned} \int_1^2 \log \left( x + \frac{1}{x^2} \right) dx &= \int_1^2 dx = \\ \left[ x \log \frac{1+x^3}{x^2} \right]_1^2 - \int_1^2 x \frac{x^2}{1+x^3} \frac{3x^2 x^2 - 2x(1+x^3)}{x^4} dx &= \\ \left[ x \log \frac{1+x^3}{x^2} \right]_1^2 - \int_1^2 \frac{3x^4 - 2x(1+x^3)}{(1+x^3)x} dx &= \\ \left[ x \log \frac{1+x^3}{x^2} \right]_1^2 - \int_1^2 \frac{3x^3 - 2 - 2x^3}{1+x^3} dx &= \\ \left[ x \log \frac{1+x^3}{x^2} \right]_1^2 - \int_1^2 \frac{x^3 - 2}{1+x^3} dx &= \end{aligned}$$

## 11.10. INTEGRALI DI VARIO TIPO

157

$$\begin{aligned} & \left[ x \log \frac{1+x^3}{x^2} \right]_1^2 - \int_1^2 \frac{x^3+1-3}{1+x^3} dx = \\ & \left[ x \log \frac{1+x^3}{x^2} \right]_1^2 - \int_1^2 \left( 1 - \frac{3}{1+x^3} \right) dx = \\ & \left[ x \log \frac{1+x^3}{x^2} - x \right]_1^2 + 3 \int_1^2 \frac{1}{1+x^3} dx. \end{aligned}$$

Si ha

$$x^3 + 1 = (x+1)(x^2 - x + 1).$$

Esistono  $A, B, C \in \mathbf{R}$  tali che

$$\frac{1}{x^3+1} = \frac{A}{x+1} + \frac{Bx+C}{x^2-x+1}.$$

Si ha

$$1 = A(x^2 - x + 1) + (Bx + C)(x + 1);$$

per  $x = -1$  si ha  $1 = 3A$ ; quindi  $A = \frac{1}{3}$ .

Si ha quindi

$$1 = \frac{1}{3}(x^2 - x + 1) + (Bx + C)(x + 1);$$

$$\text{quindi } 3 = x^2 - x + 1 + 3(Bx + C)(x + 1);$$

$$\text{quindi } -x^2 + x + 2 = 3(Bx + C)(x + 1);$$

$$\text{quindi } -(x+1)(x-2) = 3(Bx + C)(x + 1);$$

$$\text{quindi } -x + 2 = 3Bx + 3C;$$

$$\text{quindi } \begin{cases} 3B = -1 \\ 3C = 2 \end{cases};$$

$$\text{quindi } B = -\frac{1}{3}, A = \frac{2}{3}.$$

$$\text{Si ha quindi } \frac{1}{x^3+1} = \frac{1}{3} \frac{1}{x+1} - \frac{1}{3} \frac{x-2}{x^2-x+1}.$$

Si ha quindi

$$\left[ x \log \frac{1+x^3}{x^2} - x \right]_1^2 + 3 \int_1^2 \frac{1}{1+x^3} dx =$$

$$\left[ x \log \frac{1+x^3}{x^2} - x \right]_1^2 + 3 \int_1^2 \left( \frac{1}{3} \frac{1}{x+1} - \frac{1}{3} \frac{x-2}{x^2-x+1} \right) dx =$$

$$\left[ x \log \frac{1+x^3}{x^2} - x + \log(x+1) \right]_1^2 - \int_1^2 \frac{x-2}{x^2-x+1} dx =$$

$$\left[ x \log \frac{1+x^3}{x^2} - x + \log(x+1) - \log \sqrt{x^2-x+1} - \frac{-3}{\sqrt{3}} \operatorname{Arctg} \frac{2x-1}{\sqrt{3}} \right]_1^2 =$$

$$2 \log \frac{9}{4} - 2 + \log \frac{3}{\sqrt{3}} + \sqrt{3} \operatorname{Arctg} \sqrt{3} - \log 2 + 1 - \log 2 - \sqrt{3} \operatorname{Arctg} \frac{\sqrt{3}}{3} =$$

$$\frac{9}{2} \log 3 - 6 \log 2 - 1 + \sqrt{3} \frac{\pi}{3} - \sqrt{3} \frac{\pi}{6} = \log \frac{81\sqrt{3}}{64} - 1 + \frac{\sqrt{3}}{6} \pi.$$

(c) Si ha

$$\int_e^{e^3} \frac{\sqrt{1+\log x}}{x \log x} dx = \int_e^{e^3} \frac{\sqrt{1+\log x}}{\log x} \frac{1}{x} dx.$$

Posto  $t = \log x$ , si ha

$$\int_e^{e^3} \frac{\sqrt{1+\log x}}{\log x} \frac{1}{x} dx = \int_1^3 \frac{\sqrt{1+t}}{t} dt.$$

Poniamo  $\sqrt{1+t} = u$ ; si ha  $1+t = u^2$ ; quindi  $t = u^2 - 1$ ; quindi  $\frac{dt}{du} = 2u$ .Per  $t = 1$ , si ha  $u = \sqrt{2}$ ; per  $t = 3$ , si ha  $u = 2$ .

Si ha quindi

$$\int_1^3 \frac{\sqrt{1+t}}{t} dt = \int_{\sqrt{2}}^2 \frac{u}{u^2-1} 2u du = 2 \int_{\sqrt{2}}^2 \frac{u^2}{u^2-1} du = 2 \int_{\sqrt{2}}^2 \frac{u^2-1+1}{u^2-1} du =$$

$$2 \int_{\sqrt{2}}^2 \left( 1 + \frac{1}{u^2-1} \right) du.$$

Si ha

$$u^2 - 1 = (u - 1)(u + 1).$$

Esistono  $A, B \in \mathbf{R}$  tali che

$$\frac{1}{u^2-1} = \frac{A}{u-1} + \frac{B}{u+1}.$$

Si ha

$$1 = A(u + 1) + B(u - 1).$$

Per  $u = 1$ , si ha  $1 = 2A$ ; quindi  $A = \frac{1}{2}$ .

Per  $u = -1$ , si ha  $1 = B(-2)$ ; quindi  $B = -\frac{1}{2}$ .

Si ha quindi

$$\frac{1}{u^2-1} = \frac{1}{2} \frac{1}{u-1} - \frac{1}{2} \frac{1}{u+1}.$$

Si ha quindi

$$\begin{aligned} 2 \int_{\sqrt{2}}^2 \left(1 + \frac{1}{u^2-1}\right) du &= 2 \int_{\sqrt{2}}^2 \left(1 + \frac{1}{2} \frac{1}{u-1} - \frac{1}{2} \frac{1}{u+1}\right) du = \\ \int_{\sqrt{2}}^2 \left(2 + \frac{1}{u-1} - \frac{1}{u+1}\right) du &= [2u + \log(u-1) - \log(u+1)]_{\sqrt{2}}^2 = \\ \left[2u + \log \frac{u-1}{u+1}\right]_{\sqrt{2}}^2 &= 4 + \log \frac{1}{3} - 2\sqrt{2} - \log \frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1} = \\ 4 - \log 3 - 2\sqrt{2} - \log \frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1}. \end{aligned}$$

(d) Si ha

$$\begin{aligned} \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{|\sin x \cos x|}{\sin x + 2} dx &= \int_{-\frac{\pi}{4}}^0 \frac{|\sin x \cos x|}{\sin x + 2} dx + \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{|\sin x \cos x|}{\sin x + 2} dx = \\ \int_{-\frac{\pi}{4}}^0 -\frac{\sin x \cos x}{\sin x + 2} dx + \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin x \cos x}{\sin x + 2} dx &= \\ -\int_{-\frac{\pi}{4}}^0 \frac{\sin x}{\sin x + 2} \cos x dx + \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin x}{\sin x + 2} \cos x dx. \end{aligned}$$

Posto nei due integrali  $\sin x = y$ , si ha

$$\begin{aligned} -\int_{-\frac{\pi}{4}}^0 \frac{\sin x}{\sin x + 2} \cos x dx + \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin x}{\sin x + 2} \cos x dx &= \\ -\int_{-\frac{\sqrt{2}}{2}}^0 \frac{y}{y+2} dy + \int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \frac{y}{y+2} dy &= \\ -\int_{-\frac{\sqrt{2}}{2}}^0 \frac{y+2-2}{y+2} dy + \int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \frac{y+2-2}{y+2} dy &= \\ -\int_{-\frac{\sqrt{2}}{2}}^0 \left(1 - \frac{2}{y+2}\right) dy + \int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \left(1 - \frac{2}{y+2}\right) dy &= \\ -[y - 2 \log |y+2|]_{-\frac{\sqrt{2}}{2}}^0 + [y - 2 \log |y+2|]_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} &= \\ -\left(-2 \log 2 + \frac{\sqrt{2}}{2} + 2 \log \left(2 - \frac{\sqrt{2}}{2}\right)\right) + \frac{\sqrt{2}}{2} - 2 \log \left(2 + \frac{\sqrt{2}}{2}\right) + 2 \log 2 &= \\ 2 \log 2 - \frac{\sqrt{2}}{2} - 2 \log \frac{4-\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} - 2 \log \frac{4+\sqrt{2}}{2} + 2 \log 2 &= \\ 4 \log 2 - 2 \log(4 - \sqrt{2}) + 2 \log 2 - 2 \log(4 + \sqrt{2}) + 2 \log 2 &= \\ 8 \log 2 - 2 \log 14 = 8 \log 2 - 2 \log 2 - 2 \log 7 = 6 \log 2 - 2 \log 7 = \log \frac{64}{49}. \end{aligned}$$

(e) Poniamo  $\sqrt{3 + e^{2x}} = t$ ; si ha  $3 + e^{2x} = t^2$ ; quindi  $e^{2x} = t^2 - 3$ ; quindi  $2x = \log(t^2 - 3)$ ; quindi  $x = \frac{1}{2} \log(t^2 - 3)$ . Si ha quindi

$$\frac{dx}{dt} = \frac{1}{2} \frac{1}{t^2-3} 2t = \frac{t}{t^2-3}.$$

Per  $x = 0$  si ha  $t = \sqrt{3+1} = \sqrt{4} = 2$ . Per  $x = \frac{1}{2} \log 6$  si ha  $x = \sqrt{3 + e^{\log 6}} = \sqrt{3+6} = \sqrt{9} = 3$ . Si ha  $e^{4x} = (e^{2x})^2 = (t^2 - 3)^2$ .

## 11.10. INTEGRALI DI VARIO TIPO

159

Si ha quindi

$$\int_0^{\frac{1}{2} \log 6} \frac{e^{4x}}{\sqrt{3+e^{2x}}} dx = \int_2^3 \frac{(t^2-3)^2}{t} \frac{t}{t^2-3} dt = \int_2^3 (t^2-3) dt =$$

$$\left[ \frac{1}{3} t^3 - 3t \right]_2^3 = 9 - 9 - \frac{8}{3} + 6 = \frac{10}{3}.$$

2. **Esercizio.** Calcolare il seguente integrale:

$$\int_1^4 \frac{1}{\sqrt{x(1+x)}} dx.$$

**Risoluzione.** Risolviamo l'esercizio in due modi

(a) Primo modo: per sostituzione.

Poniamo  $\sqrt{x} = t$ ; si ha  $x = t^2$ ; quindi  $\frac{dx}{dt} = 2t$ ; per  $x = 1$  si ha  $t = 1$ ; per  $x = 4$  si ha  $t = 2$ .

Si ha quindi

$$\int_1^4 \frac{1}{\sqrt{x(1+x)}} dx = \int_1^2 \frac{1}{t(1+t^2)} 2t dt = 2 \int_1^2 \frac{1}{1+t^2} dt = 2 [\operatorname{Arctg} t]_1^2 =$$

$$2(\operatorname{Arctg} 2 - \operatorname{Arctg} 1) = 2(\operatorname{Arctg} 2 - \frac{\pi}{4}) = 2 \operatorname{Arctg} 2 - \frac{\pi}{2}.$$

(b) Secondo modo: come integrale immediato.

Si ha

$$\int_1^4 \frac{1}{\sqrt{x(1+x)}} dx = \int_1^4 \frac{1}{1+x} \frac{1}{\sqrt{x}} dx = 2 \int_1^4 \frac{1}{1+(\sqrt{x})^2} \frac{1}{2\sqrt{x}} dx = 2 [\operatorname{Arctg} \sqrt{x}]_1^4 =$$

$$2(\operatorname{Arctg} 2 - \operatorname{Arctg} 1) = 2(\operatorname{Arctg} 2 - \frac{\pi}{4}) = 2 \operatorname{Arctg} 2 - \frac{\pi}{2}.$$

3. **Esercizio.** Calcolare il seguente integrale:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(2x) \cos x dx.$$

**Risoluzione.** Risolviamo l'esercizio in due modi

(a) Primo modo: come integrale immediato.

Si ha

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(2x) \cos x dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} 2 \sin x \cos x \cos x dx =$$

$$-2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 x (-\sin x) dx = -2 \left[ \frac{1}{3} \cos^3 x \right]_0^{\frac{\pi}{2}} = -\frac{2}{3} (0 - 1) = \frac{2}{3}.$$

(b) Secondo modo: per decomposizione, usando le formule di Werner.

Vale la formula Werner

$$\sin \alpha \cos \beta = \frac{1}{2} (\sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta)).$$

Si ha quindi

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(2x) \cos x dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{2} (\sin(3x) + \sin x) dx =$$

$$\frac{1}{2} \left[ -\frac{1}{3} \cos(3x) - \cos x \right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{2} \left( -\frac{1}{3} \cos\left(\frac{3}{2}\pi\right) - \cos \frac{\pi}{2} + \frac{1}{3} + 1 \right) = \frac{1}{2} \frac{4}{3} = \frac{2}{3}.$$

4. **Esercizio.** Calcolare il seguente integrale:

$$\int_0^1 \frac{1-2^x}{1+2^x} dx.$$

**Risoluzione.** Risolviamo l'esercizio in due modi

(a) Primo modo: integrazione per sostituzione.

Poniamo  $2^x = t$ ; si ha  $x = \log_2 t$ ; quindi  $\frac{dx}{dt} = \frac{1}{t \log 2}$ ; per  $x = 0$  si ha  $t = 1$ ; per  $x = 1$  si ha  $t = 2$ .

Si ha quindi

$$\int_0^1 \frac{1-2^x}{1+2^x} dx = \int_1^2 \frac{1-t}{1+t} \frac{1}{t \log 2} dt = \frac{1}{\log 2} \int_1^2 \frac{1-t}{t(t+1)} dt.$$

Esistono  $A, B \in \mathbf{R}$  tali che

$$\frac{1-t}{t(t+1)} = \frac{A}{t} + \frac{B}{t+1}.$$

Si ha

$$1-t = A(t+1) + Bt.$$

Per  $t = 0$  si ha  $1 = A$ ; quindi  $A = 1$ . Per  $t = -1$  si ha  $2 = -B$ ; quindi  $B = -2$ .

Si ha quindi

$$\frac{1-t}{t(t+1)} = \frac{1}{t} - \frac{2}{t+1}.$$

Si ha quindi

$$\begin{aligned} \frac{1}{\log 2} \int_1^2 \frac{1-t}{t(t+1)} dt &= \frac{1}{\log 2} \int_1^2 \left( \frac{1}{t} - \frac{2}{t+1} \right) dt = \frac{1}{\log 2} [\log t - 2 \log(t+1)]_1^2 = \\ &= \frac{1}{\log 2} \left[ \log \frac{2}{(t+1)^2} \right]_1^2 = \frac{1}{\log 2} \left( \log \frac{2}{9} - \log \frac{1}{4} \right) = \frac{1}{\log 2} \log \frac{8}{9} = \\ &= \frac{1}{\log 2} (3 \log 2 - 2 \log 3) = 3 - 2 \frac{\log 3}{\log 2}. \end{aligned}$$

(b) Secondo modo: per decomposizione e come integrale immediato.

Si ha

$$\begin{aligned} \int_0^1 \frac{1-2^x}{1+2^x} dx &= \int_0^1 \frac{1+2^x-2 \cdot 2^x}{1+2^x} dx = \int_0^1 \left( 1 - 2 \frac{2^x}{1+2^x} \right) dx = \\ &= \int_0^1 dx - 2 \frac{1}{\log 2} \int_0^1 \frac{1}{1+2^x} 2^x \log 2 dx = \left[ x - 2 \frac{1}{\log 2} \log(1+2^x) \right]_0^1 = \\ &= 1 - \frac{2}{\log 2} \log 3 + \frac{2}{\log 2} \log 2 = 3 - 2 \frac{\log 3}{\log 2}. \end{aligned}$$

5. **Esercizio.** Calcolare il seguente integrale:

$$\int_{\log 2}^{\log 5} \frac{e^{2x}}{\sqrt{e^x-1}} dx.$$

**Risoluzione.** Risolviamo l'esercizio in due modi

(a) Primo modo: integrazione per sostituzione.

Poniamo  $\sqrt{e^x-1} = t$ ; si ha  $e^x - 1 = t^2$ ; quindi  $e^x = t^2 + 1$ ; quindi ha  $x = \log(t^2 + 1)$ ; quindi  $\frac{dx}{dt} = \frac{2t}{t^2+1}$ ; per  $x = \log 2$  si ha  $t = 1$ ; per  $x = \log 5$  si ha  $t = 2$ .

## 11.10. INTEGRALI DI VARIO TIPO

161

Si ha  $e^{2x} = (t^2 + 1)^2$ .

Si ha quindi

$$\int_{\log 2}^{\log 5} \frac{e^{2x}}{\sqrt{e^{2x}-1}} dx = \int_1^2 \frac{(t^2+1)^2}{t} \cdot \frac{2t}{t^2+1} dt = 2 \int_1^2 (t^2+1) dt = 2 \left[ \frac{1}{3}t^3 + t \right]_1^2 = 2 \left( \frac{8}{3} + 2 - \frac{1}{3} - 1 \right) = \frac{20}{3}.$$

(b) Secondo modo: per decomposizione e come integrale immediato.

Si ha

$$\int_{\log 2}^{\log 5} \frac{e^{2x}}{\sqrt{e^{2x}-1}} dx = \int_{\log 2}^{\log 5} \frac{e^{2x}-e^x+e^x}{\sqrt{e^{2x}-1}} dx = \int_{\log 2}^{\log 5} \frac{e^x(e^x-1)+e^x}{\sqrt{e^{2x}-1}} dx =$$

$$\int_{\log 2}^{\log 5} \left( \frac{e^x(e^x-1)}{\sqrt{e^{2x}-1}} + \frac{e^x}{\sqrt{e^{2x}-1}} \right) dx =$$

$$\int_{\log 2}^{\log 5} \left( (e^x-1)^{\frac{1}{2}} e^x + (e^x-1)^{-\frac{1}{2}} e^x \right) dx =$$

$$\left[ \frac{(e^x-1)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + \frac{(e^x-1)^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} \right]_{\log 2}^{\log 5} = 2 \left[ \frac{1}{3}(e^x-1)^{\frac{3}{2}} + (e^x-1)^{\frac{1}{2}} \right]_{\log 2}^{\log 5} =$$

$$3 \left( \frac{8}{3} + 2 - \frac{1}{3} - 1 \right) = \frac{20}{3}.$$

www.unidocs.it

www.unidocs.it

www.



www.unidocs.it

www.unidocs.it



www.unidocs.it

www.unidocs.it



www.unidocs.it

www.unidocs.it

www.unidocs.it - Appunti e dispense per superare i tuoi esami universitari

www.unidocs.it - Appunti e dispense per superare i tuoi esami universitari

## Capitolo 12

# Sviluppi in serie

### 12.1 Limiti

1. **Esercizio.** Calcolare i seguenti limiti:

- (a)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \operatorname{Arctg} x}{\sin x (1 - \operatorname{ch} x)}$ ;
- (b)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{sh} x - \sin x}{\operatorname{Arctg} x - x}$ ;
- (c)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{sh} x \sin x - 2 + 2 \cos x}{(\sqrt{1+x}-1)^2 \operatorname{Arcsin} x^2}$ ;
- (d)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\operatorname{Arctg} x - x)^2}{\operatorname{Arctg} x^4 \operatorname{tg} x}$ ;
- (e)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\operatorname{Arctg} x - x \sqrt{1+x})^3}{1 - \cos x^3}$ ;
- (f)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x \operatorname{sh} x \operatorname{Arctg} x - x^3}{\log(1+x^5)}$ ;
- (g)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x})^2}{\log(1+x^2)}$ ;
- (h)  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\cos x - \sqrt{1-x^2}}{(1 - \cos x)^2}$ ;
- (i)  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\cos x - 1 + \frac{1}{2} \operatorname{Arctg} x^2}{(x - \operatorname{sh} x) \sin x}$ ;
- (j)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[5]{1+2x} \sqrt[6]{1+3x^2} - e^{\frac{2}{5}x} \cos(2x)}{1 - \cos(2x)}$ ;
- (k)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1 + \log(1_2 x)} - e^x}{1 - \cos(3x)}$ ;
- (l)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \log(1+x) - 2(1 - \cos x) + \frac{1}{2}x^3}{(1 - \cos \sin x)^2}$ ;
- (m)  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sin(e^x - 1) - \log(1+x) - x^2}{2x - \sin(2x)}$ ;
- (n)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x-x^2) \sin(x+2x^2) - \log(1+x^2+x^3)}{1 - \cos x^2}$ .

**Risoluzione.**

(a) Si ha

$$\frac{x - \operatorname{Arctg} x}{\sin x(1 - \operatorname{ch} x)} \sim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{x^3}{3}}{x(-\frac{x^2}{2})} = -\frac{2}{3}.$$

Quindi si ha

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \operatorname{Arctg} x}{\sin x(1 - \operatorname{ch} x)} = -\frac{2}{3}.$$

(b) Si ha

$$\begin{aligned} \operatorname{sh} x &= x + \frac{1}{6}x^3 + o(x^3), \\ \sin x &= x - \frac{1}{6}x^3 + o(x^3), \\ \operatorname{sh} x - \sin x &= \frac{1}{3}x^3 + o(x^3) \sim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{3}x^3, \\ \operatorname{Arctg} x - x &\sim_{x \rightarrow 0} -\frac{1}{3}x^3, \end{aligned}$$

$$\frac{\operatorname{sh} x - \sin x}{\operatorname{Arctg} x - x} \sim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{3}x^3}{-\frac{1}{3}x^3} = -1.$$

Quindi si ha

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - \operatorname{sh} x}{\operatorname{Arctg} x - x} = -1.$$

(c) Si ha  $(\sqrt{1+x} - 1)^2 \operatorname{Arcsin} x^2 \sim_{x \rightarrow 0} (\frac{1}{2}x)^2 x^2 = \frac{1}{4}x^4$ ,

$$\begin{aligned} \operatorname{sh} x &= x + \frac{1}{6}x^3 + o(x^3), \\ \sin x &= x - \frac{1}{6}x^3 + o(x^3), \\ \operatorname{sh} x \sin x &= x^2 - \frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{4}x^4 + o(x^4) = x^2 + o(x^4), \\ \cos x &= 1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{24}x^4 + o(x^4), \\ 2 \cos x &= 2 - x^2 + \frac{1}{12}x^4 + o(x^4), \\ \operatorname{sh} x \sin x - 2 + 2 \cos x &= x^2 - 2 + 2 - x^2 + \frac{1}{12}x^4 + o(x^4) = \frac{1}{12}x^4 + o(x^4) \sim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{12}x^4, \end{aligned}$$

$$\frac{\operatorname{sh} x \sin x - 2 + 2 \cos x}{(\sqrt{1+x} - 1)^2 \operatorname{Arcsin} x^2} \sim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{12}x^4}{\frac{1}{4}x^4} = \frac{1}{3}.$$

Quindi si ha

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{sh} x \sin x - 2 + 2 \cos x}{(\sqrt{1+x} - 1)^2 \operatorname{Arcsin} x^2} = \frac{1}{3}.$$

(d) Si ha  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\operatorname{Arctg} x - x)^2}{\operatorname{Arctg} x^4 \operatorname{tg} x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(-\frac{1}{3}x^3)^2}{x^5} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{9}x = 0$ .(e) Si ha per  $x \rightarrow 0$ 

$$1 - \cos x^3 \sim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{2}(x^3)^2 = \frac{1}{2}x^6.$$

Si ha

$$\begin{aligned} \operatorname{Arctg} x &= x + o(x^2); \\ \sqrt{1+x} &= 1 + \frac{1}{2}x + o(x); \\ x\sqrt{1+x} &= x + \frac{1}{2}x^2 + o(x^2); \\ \operatorname{Arctg} x - x\sqrt{1+x} &= x + o(x^2) - x - \frac{1}{2}x^2 = -\frac{1}{2}x^2 + o(x^2) \sim_{x \rightarrow 0} -\frac{1}{2}x^2. \\ (\operatorname{Arctg} x - x\sqrt{1+x})^3 &\sim_{x \rightarrow 0} -\frac{1}{8}x^6; \end{aligned}$$

$$\frac{\operatorname{Arctg} x - x\sqrt{1+x}}{1 - \cos x^3} \sim_{x \rightarrow 0} \frac{-\frac{1}{8}x^6}{\frac{1}{2}x^6} = -\frac{1}{4}.$$

Quindi si ha

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{Arctg} x - x\sqrt{1+x}}{1 - \cos x^3} = -\frac{1}{4}.$$

## 12.1. LIMITI

165

(f) Si ha

$$\log(1+x^5) \sim_{x \rightarrow 0} x^5.$$

Si ha

$$\sin x = x - \frac{1}{6}x^3 + o(x^3),$$

$$\operatorname{sh} x = x + \frac{1}{6}x^3 + o(x^3),$$

$$\sin x \operatorname{sh} x = x^2 + \frac{1}{36}x^4 - \frac{1}{36}x^4 + o(x^4) = x^2 + o(x^4),$$

$$\operatorname{Arctg} x = x - \frac{1}{3}x^3 + o(x^3),$$

$$\sin x \operatorname{sh} x \operatorname{Arctg} x = x^3 - \frac{1}{3}x^5 + o(x^5),$$

$$\sin x \operatorname{sh} x \operatorname{Arctg} x - x^3 = -\frac{1}{3}x^5 + o(x^5) \sim_{x \rightarrow 0} -\frac{1}{3}x^5.$$

Quindi si ha

$$\frac{\sin x \operatorname{sh} x \operatorname{Arctg} x - x^3}{\log(1+x^5)} \sim_{x \rightarrow 0} \frac{-\frac{1}{3}x^5}{x^5} = -\frac{1}{3}.$$

Quindi si ha

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x \operatorname{sh} x \operatorname{Arctg} x - x^3}{\log(1+x^5)} = -\frac{1}{3}.$$

(g) Si ha:

$$\log(1+x^2) \sim_{x \rightarrow 0} x^2;$$

$$\sqrt{1+x} = 1 + \frac{1}{2}x + o(x);$$

$$\sqrt{1-x} = 1 - \frac{1}{2}x + o(x); \text{ quindi}$$

$$\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x} = 1 + \frac{1}{2}x - 1 + \frac{1}{2}x + o(x) = x + o(x) \sim_{x \rightarrow 0} x; \text{ quindi}$$

$$\frac{(\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x})^2}{\log(1+x^2)} \sim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{x^2} = 1.$$

$$\text{Quindi si ha } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x})^2}{\log(1+x^2)} = 1.$$

(h) Si ha:

$$1 - \cos x \sim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{2}x^2; \text{ quindi}$$

$$(1 - \cos x)^2 \sim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{4}x^4;$$

$$\cos x = 1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{24}x^4 + o(x^4);$$

$$\sqrt{1-x^2} = 1 + \frac{1}{2}(-x^2) + \left(\frac{1}{2}\right)(-x^2)^2 + o(x^4) = 1 - \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{8}x^4 + o(x^4);$$

quindi

$$\cos x - \sqrt{1-x^2} = 1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{24}x^4 - 1 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{8}x^4 + o(x^4) = \frac{1}{6}x^4 +$$

$$o(x^4) \sim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{6}x^4; \text{ quindi}$$

$$\frac{\cos x - \sqrt{1-x^2}}{(1 - \cos x)^2} \sim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{6}x^4}{\frac{1}{4}x^4} = \frac{2}{3}.$$

$$\text{Quindi si ha } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - \sqrt{1-x^2}}{(1 - \cos x)^2} = \frac{2}{3}.$$

(i) Si ha:

$$(x - \operatorname{sh} x) \sin x \sim_{x \rightarrow 0} \left(-\frac{1}{6}x^3\right)x = -\frac{1}{6}x^4; \cos x = 1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{24}x^4 + o(x^4);$$

$$\operatorname{Arctg} y = y - \frac{1}{3}y^3 + o(y^3); \text{ quindi } \operatorname{Arctg} x^2 = x^2 - \frac{1}{3}x^6 + o(x^6) = x^2 + o(x^4);$$

$$\text{quindi } \frac{1}{2} \operatorname{Arctg} x^2 = \frac{1}{2}x^2 + o(x^4); \text{ quindi } \cos x - 1 + \frac{1}{2} \operatorname{Arctg} x^2 = 1 - \frac{1}{2}x^2 +$$

$$\frac{1}{24}x^4 - 1 + \frac{1}{2}x^2 + o(x^4) = \frac{1}{24}x^4 + o(x^4) \sim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{24}x^4; \text{ quindi}$$

$$\frac{\cos x - 1 + \frac{1}{2} \operatorname{Arctg} x^2}{(x - \operatorname{sh} x) \sin x} \sim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{24}x^4}{-\frac{1}{6}x^4} = -\frac{1}{4}.$$

$$\text{Quindi si ha } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - 1 + \frac{1}{2} \operatorname{Arctg} x^2}{(x - \operatorname{sh} x) \sin x} = -\frac{1}{4}.$$

(j) Si ha

$$1 - \cos(2x) \sim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{2}(2x)^2 = 2x^2.$$

Si ha per  $y \rightarrow 0$

$$(1+y)^{\frac{1}{5}} = 1 + \frac{1}{5}y + \left(\frac{1}{5}\right)y^2 + o(y^2) = 1 + \frac{1}{5}y - \frac{2}{25}y^2 + o(y^2);$$

quindi si ha per  $x \rightarrow 0$

$$\sqrt[5]{1+2x} = 1 + \frac{1}{5}(2x) - \frac{2}{25}(2x)^2 + o(x^2) = 1 + \frac{2}{5}x - \frac{8}{25}x^2 + o(x^2).$$

Si ha per  $y \rightarrow 0$

$$(1+y)^{\frac{1}{6}} = 1 + \frac{1}{6}y + o(y);$$

quindi si ha per  $x \rightarrow 0$

$$\sqrt[6]{1+3x^2} = 1 + \frac{1}{6}(3x^2) + o(x^2) = 1 + \frac{1}{2}x^2 + o(x^2).$$

Si ha quindi

$$\begin{aligned} \sqrt[5]{1+2x}\sqrt[6]{1+3x^2} &= (1 + \frac{2}{5}x - \frac{8}{25}x^2 + o(x^2))(1 + \frac{1}{2}x^2 + o(x^2)) = \\ &= 1 + \frac{1}{2}x^2 + o(x^2) + \frac{2}{5}x - \frac{8}{25}x^2 = 1 + \frac{2}{5}x + \frac{9}{50}x^2 + o(x^2). \end{aligned}$$

Si ha per  $y \rightarrow 0$

$$e^y = 1 + y + \frac{1}{2}y^2 + o(y^2);$$

quindi si ha per  $x \rightarrow 0$

$$e^{\frac{2}{5}x} = 1 + \frac{2}{5}x + \frac{1}{2}\left(\frac{2}{5}x\right)^2 + o(x^2) = 1 + \frac{2}{5}x + \frac{2}{25}x^2 + o(x^2).$$

Si ha per  $y \rightarrow 0$

$$\cos y = 1 - \frac{1}{2}y^2 + o(y^2);$$

quindi si ha per  $x \rightarrow 0$

$$\cos(2x) = 1 - \frac{1}{2}(2x)^2 + o(x^2) = 1 - 2x^2 + o(x^2).$$

Si ha quindi

$$\begin{aligned} e^{\frac{2}{5}x} \cos(2x) &= (1 + \frac{2}{5}x + \frac{2}{25}x^2 + o(x^2))(1 - 2x^2 + o(x^2)) = \\ &= 1 - 2x^2 + o(x^2) + \frac{2}{5}x + \frac{2}{25}x^2 = 1 + \frac{2}{5}x - \frac{48}{25}x^2 + o(x^2). \end{aligned}$$

Si ha quindi

$$\begin{aligned} \sqrt[5]{1+2x}\sqrt[6]{1+3x^2} - e^{\frac{2}{5}x} \cos(2x) &= 1 + \frac{2}{5}x + \frac{9}{50}x^2 + o(x^2) - 1 - \frac{2}{5}x + \frac{48}{25}x^2 = \\ &= \frac{21}{10}x^2 + o(x^2) \sim_{x \rightarrow 0} \frac{21}{10}x^2. \end{aligned}$$

Si ha quindi

$$\frac{\sqrt[5]{1+2x}\sqrt[6]{1+3x^2} - e^{\frac{2}{5}x} \cos(2x)}{1 - \cos(2x)} \sim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{21}{10}x^2}{2x^2} = \frac{21}{20}.$$

Si ha quindi

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[5]{1+2x}\sqrt[6]{1+3x^2} - e^{\frac{2}{5}x} \cos(2x)}{1 - \cos(2x)} = \frac{21}{20}.$$

(k) Si ha:

$$1 - \cos(3x) \sim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{2}(3x)^2 = \frac{9}{2}x^2.$$

Si ha:

$$\log(1+y) = y - \frac{1}{2}y^2 + o(y^2);$$

$$\log(1+2x) = 2x - \frac{1}{2}(2x)^2 + o(x^2) = 2x - 2x^2 + o(x^2);$$

$$\sqrt{1+y} = 1 + \frac{1}{2}y + \left(\frac{1}{2}\right)y^2 + o(y^2) = 1 + \frac{1}{2}y - \frac{1}{8}y^2 + o(y^2);$$

$$\sqrt{1 + \log(1+2x)} = \sqrt{1 + 2x - 2x^2 + o(x^2)} =$$

$$1 + \frac{1}{2}(2x - 2x^2 + o(x^2)) - \frac{1}{8}(2x - 2x^2 + o(x^2))^2 + o(x^2) =$$

$$1 + x - x^2 + o(x^2) - \frac{1}{2}x^2 = 1 + x - \frac{3}{2}x^2 + o(x^2);$$

$$e^x = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + o(x^2);$$

$$\sqrt{1 + \log(1+2x)} - e^x = 1 + x - \frac{3}{2}x^2 + o(x^2) - 1 - x - \frac{1}{2}x^2 = -2x^2 + o(x^2) \sim_{x \rightarrow 0} -2x^2.$$

Quindi si ha

$$\frac{\sqrt{1+\log(2x)}-e^x}{1-\cos(3x)} \sim_{x \rightarrow 0} \frac{-2x^2}{\frac{9}{2}x^2} = -\frac{4}{9}.$$

Quindi si ha

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+\log(2x)}-e^x}{1-\cos(3x)} = -\frac{4}{9}.$$

(l) Si ha

$$(1 - \cos \sin x)^2 \sim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{2} \sin^2 x\right)^2 \sim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{4} x^4.$$

Si ha

$$\log(1+x) = x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 + o(x^3),$$

$$x \log(1+x) = x^2 - \frac{1}{2}x^3 + \frac{1}{3}x^4 + o(x^4),$$

$$\cos x = 1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{24}x^4 + o(x^4),$$

$$1 - \cos x = \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{24}x^4 + o(x^4),$$

$$2(1 - \cos x) = x^2 - \frac{1}{12}x^4 + o(x^4),$$

$$x \log(1+x) - 2(1 - \cos x) + \frac{1}{2}x^3 = x^2 - \frac{1}{2}x^3 + \frac{1}{3}x^4 - x^2 + \frac{1}{12}x^4 + \frac{1}{2}x^3 + o(x^4) = \frac{5}{12}x^4 + o(x^4) \sim_{x \rightarrow 0} \frac{5}{12}x^4.$$

Quindi si ha

$$\frac{x \log(1+x) - 2(1 - \cos x) + \frac{1}{2}x^3}{(1 - \cos \sin x)^2} \sim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{5}{12}x^4}{\frac{1}{4}x^4} = \frac{5}{3}.$$

Quindi si ha

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \log(1+x) - 2(1 - \cos x) + \frac{1}{2}x^3}{(1 - \cos \sin x)^2} = \frac{5}{3}.$$

(m) Si ha

$$(2x - \sin(2x)) \sim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{6}(2x)^3 = \frac{4}{3}x^3.$$

Per  $x \rightarrow 0$  si ha

$$e^x = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3 + o(x^3),$$

$$e^x - 1 = x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3 + o(x^3),$$

$$\sin y = y - \frac{1}{6}y^3 + o(y^3), \text{ per } y \rightarrow 0;$$

$$\sin(e^x - 1) = \sin\left(x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3 + o(x^3)\right) =$$

$$x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3 + o(x^3) - \frac{1}{6}\left(x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3 + o(x^3)\right)^3 + o((e^x - 1)^3) =$$

$$x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3 + o(x^3) - \frac{1}{6}x^3 + o(x^3) + o(x^3) = x + \frac{1}{2}x^2 + o(x^3);$$

$$\log(1+x) = x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 + o(x^3),$$

$$\sin(e^x - 1) - \log(1+x) - x^2 = x + \frac{1}{2}x^2 + o(x^3) - x + \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{3}x^3 - x^2 =$$

$$-\frac{1}{3}x^3 + o(x^3) \sim_{x \rightarrow 0} -\frac{1}{3}x^3.$$

Quindi si ha

$$\frac{\sin(e^x+1) - \log(1+x) - x^2}{2x - \sin(2x)} \sim_{x \rightarrow 0} \frac{-\frac{1}{3}x^3}{\frac{4}{3}x^3} = -\frac{1}{4}.$$

Quindi si ha

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(e^x+1) - \log(1+x) - x^2}{2x - \sin(2x)} = -\frac{1}{4}.$$

(n) Si ha

$$1 - \cos x^2 \sim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{2}(x^2)^2 = \frac{1}{2}x^4.$$

Per  $y \rightarrow 0$  si ha

$$\sin y = y - \frac{1}{6}y^3 + o(y^3).$$

Si ha quindi

$$\sin(x - x^2) = x - x^2 - \frac{1}{6}(x - x^2)^3 + o(x^3) = x - x^2 - \frac{1}{6}x^3 + o(x^3).$$

Si ha quindi

$$\sin(x + 2x^2) = x + 2x^2 - \frac{1}{6}(x + 2x^2)^3 + o(x^3) = x + 2x^2 - \frac{1}{6}x^3 + o(x^3).$$

Si ha quindi

$$\sin(x - x^2) \sin(x + 2x^2) = (x - x^2 - \frac{1}{6}x^3 + o(x^3))(x + 2x^2 - \frac{1}{6}x^3 + o(x^3)) = x^2 + 2x^3 - \frac{1}{6}x^4 + o(x^4) - x^3 - 2x^4 - \frac{1}{6}x^4 = x^2 + x^3 - \frac{7}{3}x^4 + o(x^4).$$

Per  $y \rightarrow 0$  si ha

$$\log(1 + y) = y - \frac{1}{2}y^2 + o(y^2).$$

Si ha quindi

$$\log(1 + x^2 + x^3) = x^2 + x^3 - \frac{1}{2}(x^2 + x^3)^2 + o(x^4) = x^2 + x^3 - \frac{1}{2}x^4 + o(x^4).$$

Si ha quindi

$$\sin(x - x^2) \sin(x + 2x^2) - \log(1 + x^2 + x^3) = x^2 + x^3 - \frac{7}{3}x^4 + o(x^4) - x^2 - x^3 + \frac{1}{2}x^4 = -\frac{11}{6}x^4 + o(x^4) \sim_{x \rightarrow 0} -\frac{11}{6}x^4.$$

Si ha quindi

$$\frac{\sin(x - x^2) \sin(x + 2x^2) - \log(1 + x^2 + x^3)}{1 - \cos x^2} \sim_{x \rightarrow 0} \frac{-\frac{11}{6}x^4}{\frac{1}{2}x^4} = -\frac{11}{3}.$$

Si ha quindi

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x - x^2) \sin(x + 2x^2) - \log(1 + x^2 + x^3)}{1 - \cos x^2} = -\frac{11}{3}.$$

2. **Esercizio.** Calcolare i seguenti limiti:

(a)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^{\frac{4}{5}} (3\sqrt[5]{1+x} - 2\sqrt[5]{2+x} - \sqrt[5]{3+x}).$

(b)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2 + x + 2} + \sqrt{x^2 - 2x + 3} - 2xe^{\frac{1}{x}}).$

(c)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 (\sqrt[4]{x^4 + x^3 + x^2} - \sqrt[4]{x^4 + x^3} - \frac{1}{4} \frac{1}{x}).$

(d)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{4x^6 + x^3 + 3} (\sqrt[4]{16x^4 + 32x^2 + 64} - \sqrt[4]{16x^4 + 1} - \sin \frac{1}{x}).$

(e)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3\sqrt[6]{x^2+2x+3} - 3\sqrt[3]{x+3} + \sqrt[3]{x} \log(1+\frac{2}{x})}{\sqrt[3]{x^2+1} - \sqrt[3]{x}}.$

**Risoluzione.**

(a) Si ha

$$3\sqrt[5]{1+x} - 2\sqrt[5]{2+x} - \sqrt[5]{3+x} = x^{\frac{1}{5}} \left( 3\sqrt[5]{1+\frac{1}{x}} - 2\sqrt[5]{1+\frac{2}{x}} - \sqrt[5]{1+\frac{3}{x}} \right).$$

Per  $y \rightarrow 0$  si ha

$$\sqrt[5]{1+y} = 1 + \frac{1}{5}y + o(y).$$

Per  $x \rightarrow +\infty$  si ha quindi

$$\sqrt[5]{1+\frac{1}{x}} = 1 + \frac{1}{5}\frac{1}{x} + o\left(\frac{1}{x}\right),$$

$$3\sqrt[5]{1+\frac{1}{x}} = 3 + \frac{3}{5}\frac{1}{x} + o\left(\frac{1}{x}\right),$$

$$\sqrt[5]{1+\frac{2}{x}} = 1 + \frac{1}{5}\frac{2}{x} + o\left(\frac{1}{x}\right) = 1 + \frac{2}{5}\frac{1}{x} + o\left(\frac{1}{x}\right),$$

$$2\sqrt[5]{1+\frac{2}{x}} = 2 + \frac{4}{5}\frac{1}{x} + o\left(\frac{1}{x}\right),$$

## 12.1. LIMITI

169

$$\sqrt[5]{1 + \frac{3}{x}} = 1 + \frac{1}{5} \frac{3}{x} + o\left(\frac{1}{x}\right) = 1 + \frac{3}{5} \frac{1}{x} + o\left(\frac{1}{x}\right),$$

$$3 \sqrt[5]{1 + \frac{1}{x}} - 2 \sqrt[5]{1 + \frac{2}{x}} - \sqrt[5]{1 + \frac{3}{x}} =$$

$$3 + \frac{3}{5} \frac{1}{x} + o\left(\frac{1}{x}\right) - 2 - \frac{4}{5} \frac{1}{x} - 1 - \frac{3}{5} \frac{1}{x} = \frac{4}{5} \frac{1}{x} + o\left(\frac{1}{x}\right) \sim_{x \rightarrow +\infty} -\frac{4}{5} \frac{1}{x}.$$

Quindi si ha

$$x^{\frac{1}{5}} \left( 3 \sqrt[5]{1 + \frac{1}{x}} - 2 \sqrt[5]{1 + \frac{2}{x}} - \sqrt[5]{1 + \frac{3}{x}} \right) \sim_{x \rightarrow +\infty} x^{\frac{1}{5}} \left( -\frac{4}{5} \frac{1}{x} \right) = -\frac{4}{5} x^{-\frac{4}{5}}.$$

Quindi si ha

$$x^{\frac{4}{5}} \left( 3 \sqrt[5]{1 + \frac{1}{x}} - 2 \sqrt[5]{1 + \frac{2}{x}} - \sqrt[5]{1 + \frac{3}{x}} \right) \sim_{x \rightarrow +\infty} -\frac{4}{5}.$$

Quindi si ha

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x^{\frac{4}{5}} \left( 3 \sqrt[5]{1 + \frac{1}{x}} - 2 \sqrt[5]{1 + \frac{2}{x}} - \sqrt[5]{1 + \frac{3}{x}} \right) = -\frac{4}{5}.$$

(b) Per  $x > 0$  si ha

$$\sqrt{x^2 + x + 2} + \sqrt{x^2 - 2x + 3} - 2xe^{\frac{1}{x}} =$$

$$x \left( \sqrt{1 + \frac{1}{x} + \frac{2}{x^2}} + \sqrt{1 - \frac{1}{x} + \frac{3}{x^2}} - 2e^{\frac{1}{x}} \right).$$

Si ha

$$\sqrt{1 + y} = 1 + \frac{1}{2}y + o(y) \text{ per } y \rightarrow 0.$$

Quindi si ha

$$\sqrt{1 + \frac{1}{x} + \frac{2}{x^2}} = 1 + \frac{1}{2} \left( \frac{1}{x} + \frac{2}{x^2} \right) + o\left(\frac{1}{x}\right) = 1 + \frac{1}{2} \frac{1}{x} + o\left(\frac{1}{x}\right)$$

$$\text{e } \sqrt{1 - \frac{1}{x} + \frac{3}{x^2}} = 1 + \frac{1}{2} \left( -\frac{1}{x} + \frac{3}{x^2} \right) + o\left(\frac{1}{x}\right) = 1 - \frac{1}{2} \frac{1}{x} + o\left(\frac{1}{x}\right).$$

$$e^y = 1 + y + o(y) \text{ per } y \rightarrow 0.$$

Quindi si ha

$$e^{\frac{1}{x}} = 1 + \frac{1}{x} + o\left(\frac{1}{x}\right),$$

quindi

$$2e^{\frac{1}{x}} = 2 + \frac{2}{x} + o\left(\frac{1}{x}\right).$$

Si ha quindi

$$\sqrt{1 + \frac{1}{x} + \frac{2}{x^2}} + \sqrt{1 - \frac{1}{x} + \frac{3}{x^2}} - 2e^{\frac{1}{x}} = 1 + \frac{1}{2} \frac{1}{x} + o\left(\frac{1}{x}\right) + 1 - \frac{1}{2} \frac{1}{x} - 2 - \frac{2}{x} =$$

$$-\frac{5}{2} \frac{1}{x} + o\left(\frac{1}{x}\right) \sim -\frac{5}{2} \frac{1}{x}.$$

Si ha quindi

$$x \left( \sqrt{1 + \frac{1}{x} + \frac{2}{x^2}} + \sqrt{1 - \frac{1}{x} + \frac{3}{x^2}} - 2e^{\frac{1}{x}} \right) \sim x \left( -\frac{5}{2} \frac{1}{x} \right) = -\frac{5}{2}.$$

Si ha quindi

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \sqrt{x^2 + x + 2} + \sqrt{x^2 - 2x + 3} - 2xe^{\frac{1}{x}} \right) = -\frac{5}{2}.$$

(c) Per  $x > 0$  si ha

$$x^2 \left( \sqrt[4]{x^4 + x^3 + x^2} - \sqrt[4]{x^4 + x^3} - \frac{1}{4} \frac{1}{x} \right) =$$

$$x^3 \left( \sqrt[4]{1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}} - \sqrt[4]{1 + \frac{1}{x}} - \frac{1}{4} \frac{1}{x^2} \right).$$

Si ha

$$\sqrt[4]{1 + y} = 1 + \frac{1}{4}y + \left(\frac{1}{2}\right)y^2 + \left(\frac{1}{3}\right)y^3 + o(y^3) = 1 + \frac{1}{4}y - \frac{3}{32}y^2 + \frac{7}{128}y^3 + o(y^3)$$

per  $y \rightarrow 0$ .

Quindi si ha:

$$\sqrt[4]{1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}} = 1 + \frac{1}{4} \left( \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} \right) - \frac{3}{32} \left( \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} \right)^2 + \frac{7}{128} \left( \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} \right)^3 + o\left(\frac{1}{x^3}\right) =$$

$$1 + \frac{1}{4x} + \frac{1}{4x^2} - \frac{3}{32x^2} - \frac{3}{16x^3} + \frac{7}{128x^3} + o\left(\frac{1}{x^3}\right) =$$

$$1 + \frac{1}{4x} + \frac{5}{32x^2} - \frac{17}{128x^3} + o\left(\frac{1}{x^3}\right).$$

$$\sqrt[4]{1 + \frac{1}{x}} = 1 + \frac{1}{4x} - \frac{3}{32x^2} + \frac{7}{128x^3} + o\left(\frac{1}{x^3}\right).$$

$$\sqrt[4]{1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}} - \sqrt[4]{1 + \frac{1}{x} - \frac{1}{4x^2}} =$$

$$1 + \frac{1}{4x} + \frac{5}{32x^2} - \frac{17}{128x^3} + o\left(\frac{1}{x^3}\right) - 1 - \frac{1}{4x} + \frac{3}{32x^2} - \frac{7}{128x^3} - \frac{1}{4x^2} =$$

$$-\frac{3}{16x^3} + o\left(\frac{1}{x^3}\right) \sim -\frac{3}{16x^3}.$$

Si ha quindi

$$x^3 \left( \sqrt[4]{1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}} - \sqrt[4]{1 + \frac{1}{x} - \frac{1}{4x^2}} \right) \sim x^3 \left( -\frac{3}{16x^3} \right) = -\frac{3}{16}.$$

Si ha quindi

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 \left( \sqrt[4]{x^4 + x^3 + x^2} - \sqrt[4]{x^4 + x^3} - \frac{1}{4x} \right) = -\frac{3}{16}.$$

(d) Si ha

$$\sqrt{4x^6 + x^3 + 3} \sim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{4x^6} = 2x^3.$$

Per  $x > 0$  si ha

$$\sqrt[4]{16x^4 + 32x^2 + 64} = 2x \sqrt[4]{1 + \frac{2}{x^2} + \frac{1}{x^4}}.$$

Per  $y \rightarrow 0$  si ha

$$\sqrt[4]{1 + y} = 1 + \frac{1}{4}y + \left(\frac{1}{2}\right)y^2 + o(y^2) = 1 + \frac{1}{4}y - \frac{3}{32}y^2 + o(y^2).$$

Quindi per  $x \rightarrow +\infty$  si ha:

$$2x \sqrt[4]{1 + \frac{2}{x^2} + \frac{1}{x^4}} = 2x \left( 1 + \frac{1}{4} \left( \frac{2}{x^2} + \frac{1}{x^4} \right) - \frac{3}{32} \left( \frac{2}{x^2} + \frac{1}{x^4} \right)^2 + o\left(\frac{1}{x^4}\right) \right) =$$

$$2x \left( 1 + \frac{1}{2x^2} + \frac{1}{4x^4} - \frac{3}{8x^4} + o\left(\frac{1}{x^4}\right) \right) = 2x + \frac{1}{x} + \frac{5}{4x^3} + o\left(\frac{1}{x^3}\right).$$

Per  $x > 0$  si ha

$$\sqrt[4]{16x^4 + 1} = 2x \sqrt[4]{1 + \frac{1}{16x^4}}.$$

Per  $y \rightarrow 0$  si ha

$$\sqrt[4]{1 + y} = 1 + \frac{1}{4}y + o(y).$$

Quindi per  $x \rightarrow +\infty$  si ha:

$$2x \sqrt[4]{1 + \frac{1}{16x^4}} = 2x \left( 1 + \frac{1}{4} \frac{1}{16x^4} + o\left(\frac{1}{x^4}\right) \right) = 2x \left( 1 + \frac{1}{64x^2} + o\left(\frac{1}{x^4}\right) \right) = 2x +$$

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{32x^3} + o\left(\frac{1}{x^3}\right).$$

Per  $y \rightarrow 0$  si ha

$$\sin y = y - \frac{1}{6}y^3 + o(y^3).$$

Quindi per  $x \rightarrow +\infty$  si ha:

$$\sin \frac{1}{x} = \frac{1}{x} - \frac{1}{6x^3} + o\left(\frac{1}{x^3}\right).$$

Si ha quindi

$$\sqrt[4]{16x^4 + 32x^2 + 64} - \sqrt[4]{16x^4 + 1} - \sin \frac{1}{x} = 2x + \frac{1}{x} + \frac{5}{4x^3} + o\left(\frac{1}{x^3}\right) - 2x -$$

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{6} - \frac{1}{x} + \frac{1}{6x^3} = \frac{133}{96} \frac{1}{x^3} + o\left(\frac{1}{x^3}\right) \sim_{x \rightarrow +\infty} \frac{133}{96} \frac{1}{x^3}.$$

Si ha quindi

$$\sqrt{4x^6 + x^3 + 3} \left( \sqrt[4]{16x^4 + 32x^2 + 64} - \sqrt[4]{16x^4 + 1} - \sin \frac{1}{x} \right) \sim_{x \rightarrow +\infty}$$

$$2x^3 \frac{133}{96} \frac{1}{x^3} = \frac{133}{48}.$$

Si ha quindi

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{4x^6 + x^3 + 3} \left( \sqrt[4]{16x^4 + 32x^2 + 64} - \sqrt[4]{16x^4 + 1} - \sin \frac{1}{x} \right) =$$

$$\frac{133}{48}.$$

(e) Si ha

$$\sqrt[6]{x^2 + 1} - \sqrt[3]{x} = \sqrt[6]{x^2(1 + \frac{1}{x^2})} - \sqrt[3]{x} = \sqrt[3]{x} \left( \sqrt[6]{1 + \frac{1}{x^2} - 1} \right) \sim_{x \rightarrow +\infty} x^{\frac{1}{3}} \frac{1}{6} \frac{1}{x^2} = \frac{1}{6} x^{-\frac{5}{3}}.$$

Si ha

$$\sqrt[6]{x^2 + 2x + 3} = \sqrt[6]{x^2(1 + \frac{2}{x} + \frac{3}{x^2})} = \sqrt[3]{x} \sqrt[6]{1 + \frac{2}{x} + \frac{3}{x^2}}.$$

Per  $y \rightarrow 0$  si ha

$$\sqrt[6]{1 + y} = 1 + \frac{1}{6}y + \left(\frac{1}{6}\right)y^2 + o(y^2) = 1 + \frac{1}{6}y - \frac{5}{72}y^2 + o(y^2).$$

Si ha quindi

$$\begin{aligned} \sqrt[6]{1 + \frac{2}{x} + \frac{3}{x^2}} &= \\ 1 + \frac{1}{6} \left( \frac{2}{x} + \frac{3}{x^2} \right) - \frac{5}{72} \left( \frac{2}{x} + \frac{3}{x^2} \right)^2 + o\left(\frac{1}{x^2}\right) &= \\ 1 + \frac{1}{3} \frac{1}{x} + \frac{1}{2} \frac{1}{x^2} - \frac{5}{18} \frac{1}{x^2} + o\left(\frac{1}{x^2}\right) &= 1 + \frac{1}{3} \frac{1}{x} + \frac{2}{9} \frac{1}{x^2} + o\left(\frac{1}{x^2}\right). \end{aligned}$$

Si ha quindi

$$\sqrt[3]{x} \sqrt[6]{1 + \frac{2}{x} + \frac{3}{x^2}} = x^{\frac{1}{3}} \left( 1 + \frac{1}{3} \frac{1}{x} + \frac{2}{9} \frac{1}{x^2} + o\left(\frac{1}{x^2}\right) \right) = x^{\frac{1}{3}} + \frac{1}{3} x^{-\frac{2}{3}} + \frac{2}{9} x^{-\frac{5}{3}} + o(x^{-\frac{5}{3}}).$$

Si ha quindi

$$\begin{aligned} 3\sqrt[6]{x^2 + 2x + 3} &= 3 \left( x^{\frac{1}{3}} + \frac{1}{3} x^{-\frac{2}{3}} + \frac{2}{9} x^{-\frac{5}{3}} + o(x^{-\frac{5}{3}}) \right) = \\ 3x^{\frac{1}{3}} + x^{-\frac{2}{3}} + \frac{2}{3} x^{-\frac{5}{3}} + o(x^{-\frac{5}{3}}). \end{aligned}$$

Si ha

$$\sqrt[3]{x + 3} = \sqrt[3]{x(1 + \frac{3}{x})} = \sqrt[3]{x} \sqrt[3]{1 + \frac{3}{x}}.$$

Per  $y \rightarrow 0$  si ha

$$\sqrt[3]{1 + y} = 1 + \frac{1}{3}y + \left(\frac{1}{3}\right)y^2 + o(y^2) = 1 + \frac{1}{3}y - \frac{1}{9}y^2 + o(y^2).$$

Si ha quindi

$$\begin{aligned} \sqrt[3]{1 + \frac{3}{x}} &= \\ 1 + \frac{1}{3} \frac{3}{x} - \frac{1}{9} \left( \frac{3}{x} \right)^2 + o\left(\frac{1}{x^2}\right) &= \\ 1 + \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} + o\left(\frac{1}{x^2}\right). \end{aligned}$$

Si ha quindi

$$\sqrt[3]{x} \sqrt[3]{1 + \frac{3}{x}} = x^{\frac{1}{3}} \left( 1 + \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} + o\left(\frac{1}{x^2}\right) \right) = x^{\frac{1}{3}} + x^{-\frac{2}{3}} - x^{-\frac{5}{3}} + o(x^{-\frac{5}{3}}).$$

Si ha quindi

$$\begin{aligned} 3\sqrt[3]{x + 3} &= 3 \left( x^{\frac{1}{3}} + x^{-\frac{2}{3}} - x^{-\frac{5}{3}} + o(x^{-\frac{5}{3}}) \right) = \\ 3x^{\frac{1}{3}} + 3x^{-\frac{2}{3}} - 3x^{-\frac{5}{3}} + o(x^{-\frac{5}{3}}). \end{aligned}$$

Per  $y \rightarrow 0$  si ha

$$\log(1 + y) = y - \frac{1}{2}y^2 + o(y^2).$$

Si ha quindi

$$\log\left(1 + \frac{2}{x}\right) = \frac{2}{x} - \frac{1}{2} \left(\frac{2}{x}\right)^2 + o\left(\frac{1}{x^2}\right) = \frac{2}{x} - \frac{2}{x^2} + o\left(\frac{1}{x^2}\right).$$

Si ha quindi

$$\sqrt[3]{x} \log\left(1 + \frac{2}{x}\right) = x^{\frac{1}{3}} \left( \frac{2}{x} - \frac{2}{x^2} + o\left(\frac{1}{x^2}\right) \right) = 2x^{-\frac{2}{3}} - 2x^{-\frac{5}{3}} + o(x^{-\frac{5}{3}}).$$

Si ha quindi

$$\begin{aligned} & 3\sqrt[6]{x^2+2x+3} - 3\sqrt[3]{x+3} + \sqrt[3]{x} \log\left(1 + \frac{2}{x}\right) = \\ & 3x^{\frac{1}{3}} + x^{-\frac{2}{3}} + \frac{2}{3}x^{-\frac{5}{3}} + o\left(x^{-\frac{5}{3}}\right) - 3x^{\frac{1}{3}} - 3x^{-\frac{2}{3}} + 3x^{-\frac{5}{3}} + 2x^{-\frac{2}{3}} - 2x^{-\frac{5}{3}} = \\ & \frac{5}{3}x^{-\frac{5}{3}} + o\left(x^{-\frac{5}{3}}\right) \sim_{x \rightarrow +\infty} \frac{5}{3}x^{-\frac{5}{3}}. \end{aligned}$$

Si ha quindi

$$\frac{3\sqrt[6]{x^2+2x+3} - 3\sqrt[3]{x+3} + \sqrt[3]{x} \log\left(1 + \frac{2}{x}\right)}{\sqrt[6]{x^2+1} - \sqrt[3]{x}} \text{equi}_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{5}{3}x^{-\frac{5}{3}}}{\frac{1}{6}x^{-\frac{5}{3}}} = 10.$$

Si ha quindi

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3\sqrt[6]{x^2+2x+3} - 3\sqrt[3]{x+3} + \sqrt[3]{x} \log\left(1 + \frac{2}{x}\right)}{\sqrt[6]{x^2+1} - \sqrt[3]{x}} = 10.$$

3. **Esercizio.** Sia  $\alpha \in \mathbf{R}$ ; calcolare in funzione di  $\alpha$  il seguente limite:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \sqrt{x^2 + \alpha x} - x + 2 \right).$$

**Risoluzione.** Per  $x > 0$ , si ha  $\sqrt{x^2 + \alpha x} = x\sqrt{1 + \frac{\alpha}{x}}$ .

Per  $y \rightarrow 0$ , si ha

$$\sqrt{1+y} = 1 + \frac{1}{2}y + o(y).$$

Per  $\alpha \neq 0$  si ha quindi

$$\sqrt{1 + \frac{\alpha}{x}} = 1 + \frac{1}{2}\frac{\alpha}{x} + o\left(\frac{\alpha}{x}\right) = 1 + \frac{1}{2}\frac{\alpha}{x} + o\left(\frac{1}{x}\right).$$

Per  $\alpha = 0$  si ha  $\sqrt{1 + \frac{\alpha}{x}} = \sqrt{1} = 1 = 1 + \frac{1}{2}\frac{\alpha}{x} + 0 = 1 + \frac{1}{2}\frac{\alpha}{x} + o\left(\frac{1}{x}\right)$ .

Per ogni  $\alpha \in \mathbf{R}$  si ha quindi

$$x\sqrt{1 + \frac{\alpha}{x}} = x\left(1 + \frac{1}{2}\frac{\alpha}{x} + o\left(\frac{1}{x}\right)\right) = x + \frac{\alpha}{2} + o(1).$$

Si ha quindi

$$\sqrt{x^2 + \alpha x} - x + 2 = x + \frac{\alpha}{2} + o(1) - x + 2 = \frac{\alpha}{2} + 2 + o(1).$$

Si ha quindi

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \sqrt{x^2 + \alpha x} - x + 2 \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \frac{\alpha}{2} + 2 + o(1) \right) = \frac{\alpha}{2} + 2.$$

4. **Esercizio.** Calcolare i seguenti limiti:

(a)  $\lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{\text{Arcsin}(3x)}{3x} \right)^{\frac{1}{x^2}}$  (si può utilizzare l'equivalenza asintotica:  $\text{Arcsin } y - y \sim_{y \rightarrow 0} \frac{1}{6}y^3$ );

(b)  $\lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{\text{Arctg } x}{x} \right)^{\frac{1}{1 - \cos x}}$ .

**Risoluzione.**

(a) Si ha

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{\text{Arcsin}(3x)}{3x} \right)^{\frac{1}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow 0} e^{\frac{1}{x^2} \log \frac{\text{Arcsin}(3x)}{3x}}.$$

Si ha

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^2} \log \frac{\text{Arcsin}(3x)}{3x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^2} \log \left( 1 + \frac{\text{Arcsin}(3x)}{3x} - 1 \right) =$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^2} \log \left( 1 + \frac{\operatorname{Arcsin}(3x) - 3x}{3x} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^2} \frac{\operatorname{Arcsin}(3x) - 3x}{3x} =$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{Arcsin}(3x) - 3x}{3x^3} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{6}(3x)^3}{3x^3} = \frac{27}{6} \frac{1}{3} = \frac{3}{2}.$$

Si ha quindi

$$\lim_{x \rightarrow 0} e^{\frac{1}{x^2} \log \frac{\operatorname{Arcsin}(3x)}{3x}} = e^{\frac{3}{2}}.$$

(b) Si ha

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{\operatorname{Arctg} x}{x} \right)^{\frac{1}{1 - \cos x}} = \lim_{x \rightarrow 0} e^{\frac{1}{1 - \cos x} \log \frac{\operatorname{Arctg} x}{x}}.$$

$$\text{Si ha } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{1 - \cos x} \log \frac{\operatorname{Arctg} x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2}{x^2} \log \left( 1 + \frac{\operatorname{Arctg} x}{x} - 1 \right) =$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2}{x^2} \log \left( 1 + \frac{\operatorname{Arctg} x - x}{x} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2}{x^2} \frac{\operatorname{Arctg} x - x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2}{x^2} \frac{-x^3}{x} =$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2}{x^2} (-x^2) = -\frac{2}{3}.$$

## 12.2 Asintoti

1. **Esercizio.** Dire se le seguenti funzioni ammettono sviluppo asintotico affine per  $x \rightarrow +\infty$ ; in caso affermativo determinare l'asintoto:

(a)  $f(x) = \sqrt{x^2 + x + 1}$ ;

(b)  $f(x) = \sqrt[4]{16x^4 + 3x^3 + 2x^2 + x + 1}$ .

**Risoluzione.**

(a) Si ha

$$\frac{\sqrt{x^2 + x + 1}}{x} \sim_{x \rightarrow +\infty} 1; \text{ quindi si ha}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x^2 + x + 1}}{x} = 1.$$

Si ha

$$\sqrt{x^2 + x + 1} - x = x \left( \sqrt{1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}} \right) \sim_{x \rightarrow +\infty} x \frac{1}{2} \left( \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} \right) \sim_{x \rightarrow +\infty} x \frac{1}{2x} = \frac{1}{2}.$$

Quindi  $f$  ammette sviluppo asintotico affine per  $x \rightarrow +\infty$  e l'asintoto di  $f$  per  $x \rightarrow +\infty$  è la retta

$$y = x + \frac{1}{2}.$$

(b) Si ha

$$\sqrt[4]{16x^4 + 3x^3 + 2x^2 + x + 1} \sim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt[4]{16x^4} = 2x.$$

Si ha

$$\sqrt[4]{16x^4 + 3x^3 + 2x^2 + x + 1} - 2x =$$

$$2x \left( \sqrt[4]{1 + \frac{3}{16} \frac{1}{x} + \frac{1}{8} \frac{1}{x^2} + \frac{1}{16} \frac{1}{x^3} + \frac{1}{16} \frac{1}{x^4}} - 1 \right) \sim_{x \rightarrow +\infty}$$

$$2x \frac{1}{4} \left( \frac{3}{16} \frac{1}{x} + \frac{1}{8} \frac{1}{x^2} + \frac{1}{16} \frac{1}{x^3} + \frac{1}{16} \frac{1}{x^4} \right) \sim_{x \rightarrow +\infty}$$

$$2x \frac{1}{4} \frac{3}{16} \frac{1}{x} = \frac{3}{32}.$$

Quindi  $f$  ammette sviluppo asintotico affine per  $x \rightarrow +\infty$  e l'asintoto di  $f$  per  $x \rightarrow +\infty$  è la retta

$$y = 2x + \frac{3}{32}.$$

2. **Esercizio.** Dire se le seguenti funzioni ammettono sviluppo asintotico affine per  $x \rightarrow -\infty$ ; in caso affermativo determinare l'asintoto:

(a)  $f(x) = \sqrt{x^2 + x + 1}$ ;

(b)  $f(x) = \frac{\sqrt{x^4+1}}{x}$ ;

(c)  $f(x) = \sqrt{\frac{x^3+3}{x}}$ .

**Risoluzione.**

- (a) Si ha

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{x^2+x+1}}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{x^2}}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{|x|}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-x}{x} = -1.$$

Si ha

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -\infty} (f(x) + x) &= \lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{x^2 + x + 1} + x) = \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} \left( |x| \sqrt{1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}} + x \right) &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \left( -x \sqrt{1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}} + x \right) = \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} -x \left( \sqrt{1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}} - 1 \right) &= \lim_{x \rightarrow -\infty} -x \frac{1}{2} \left( \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} \right) = \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} -x \frac{1}{2} \frac{1}{x} &= -\frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Quindi  $f$  ammette asintoto per  $x \rightarrow -\infty$  e l'asintoto di  $f$  per  $x \rightarrow -\infty$  è la retta di equazione  $y = -x - \frac{1}{2}$ .

- (b) Si ha

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{x^4+1}}{x^2} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{x^4}}{x^2} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2}{x^2} = 1 \text{ e} \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) - x &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \left( \frac{\sqrt{x^4+1}}{x} - x \right) = \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} \left( \frac{x^2 \sqrt{1 + \frac{1}{x^4}}}{x} - x \right) &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \left( x \sqrt{1 + \frac{1}{x^4}} - x \right) = \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} x \left( \sqrt{1 + \frac{1}{x^4}} - 1 \right) &= \lim_{x \rightarrow -\infty} x \frac{1}{2} \frac{1}{x^4} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{2} \frac{1}{x^3} = 0. \end{aligned}$$

Quindi  $f$  ammette asintoto per  $x \rightarrow -\infty$  e l'asintoto di  $f$  per  $x \rightarrow -\infty$  è la retta di equazione  $y = x$ .

- (c) Si ha

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x} \sqrt{\frac{x^3+1}{x}} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x} \sqrt{\frac{x^3}{x}} = \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x} \sqrt{x^2} &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{|x|}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-x}{x} = -1 \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) + x &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \left( \sqrt{\frac{x^3+1}{x}} + x \right) = \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} \left( \sqrt{x^2 + \frac{1}{x}} + x \right) &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \left( -x \sqrt{1 + \frac{1}{x^3}} + x \right) = \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} -x \left( \sqrt{1 + \frac{1}{x^3}} - 1 \right) &= \lim_{x \rightarrow -\infty} -x \frac{1}{2} \frac{1}{x^3} = \lim_{x \rightarrow -\infty} -\frac{1}{2} \frac{1}{x^2} = 0. \end{aligned}$$

Quindi  $f$  ammette asintoto per  $x \rightarrow -\infty$  e l'asintoto di  $f$  per  $x \rightarrow -\infty$  è la retta di equazione  $y = -x$ .

## 12.3 Serie

1. **Esercizio.** Studiare la convergenza delle seguenti serie

(a)  $\sum_{n=1}^{\infty} \left( \sqrt{\frac{1}{n}} - \operatorname{Arctg} \sqrt{\frac{1}{n}} \right);$

(b)  $\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{\frac{1}{n} - \operatorname{Arctg} \frac{1}{n}}.$

**Risoluzione.**

(a) Si ha

$$\sqrt{\frac{1}{n}} - \operatorname{Arctg} \sqrt{\frac{1}{n}} \sim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{3} \left( \sqrt{\frac{1}{n}} \right)^3 = \frac{1}{3n^{\frac{3}{2}}}.$$

Quindi la serie assegnata è convergente.

(b) Si ha

$$\sqrt{\frac{1}{n} - \operatorname{Arctg} \frac{1}{n}} \sim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{\frac{1}{3} \frac{1}{n^3}} = \frac{1}{\sqrt{3}} \frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}.$$

Essendo  $\frac{3}{2} > 1$ , la serie assegnata è convergente.



## Capitolo 13

# Integrali impropri

### 13.1 Integrali impropri

1. **Esercizio.** Dimostrare che  $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x} dx$  è divergente positivamente.

**Risoluzione.** Sia  $y > 1$ ; si ha  
 $\int_1^y \frac{1}{x} dx = [\log x]_1^y = \log y \xrightarrow{y \rightarrow +\infty} +\infty$ .

2. **Esercizio.** Dimostrare che  $\int_0^1 \frac{1}{x} dx$  è divergente positivamente.

**Risoluzione.** Sia  $y \in ]0, 1]$ ; si ha  
 $\int_y^1 \frac{1}{x} dx = [\log x]_y^1 = -\log(y) \xrightarrow{y \rightarrow 0} +\infty$ .

### 13.2 Valore di un integrale improprio

1. **Esercizio.** Dire se i seguenti integrali impropri sono convergenti e in caso affermativo determinarne il valore:

(a)  $\int_{-1}^1 \frac{1}{\sqrt{x+1}} dx$ ;

(b)  $\int_0^1 \frac{x+2}{\sqrt[3]{x}} dx$ .

**Risoluzione.**

- (a) Si tratta dell'integrale improprio su un intervallo limitato aperto a sinistra della funzione

$$f : ]-1, 1] \rightarrow \mathbf{R}, x \rightarrow \frac{1}{\sqrt{x+1}}.$$

Si ha

$$\frac{1}{\sqrt{x+1}} = \frac{1}{(x - (-1))^{\frac{1}{2}}}.$$

Essendo  $\frac{1}{2} < 1$  l'integrale improprio è convergente.

Si ha

$$\int_{-1}^1 \frac{1}{\sqrt{x+1}} dx = \lim_{y \rightarrow -1} \int_y^1 \frac{1}{\sqrt{x+1}} dx = \lim_{y \rightarrow -1} \int_y^1 (1+x)^{-\frac{1}{2}} dx =$$

$$\lim_{y \rightarrow -1} \left[ \frac{(1+x)^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} \right]_y^1 = \lim_{y \rightarrow -1} 2(\sqrt{2} - \sqrt{1+y}) = 2\sqrt{2}.$$

In particolare si ritrova che l'integrale improprio è convergente.

- (b) Si tratta dell'integrale improprio su un intervallo limitato aperto a sinistra della funzione

$$f : ]0, 1] \rightarrow \mathbf{R}, x \rightarrow \frac{x+2}{\sqrt[3]{x}}.$$

Si ha

$$\frac{x+2}{\sqrt[3]{x}} \underset{x \rightarrow 0}{\sim} \frac{2}{x^{\frac{1}{3}}}.$$

Essendo  $\frac{1}{3} < 1$  l'integrale improprio è convergente.

Si ha

$$\int_0^1 \frac{x+2}{\sqrt[3]{x}} dx = \lim_{y \rightarrow 0} \int_y^1 \frac{x+2}{\sqrt[3]{x}} dx = \lim_{y \rightarrow 0} \int_y^1 \left( \frac{x}{\sqrt[3]{x}} + \frac{2}{\sqrt[3]{x}} \right) dx =$$

$$\lim_{y \rightarrow 0} \left( x^{\frac{2}{3}} + 2x^{-\frac{1}{3}} \right), dx = \lim_{y \rightarrow 0} \left[ \frac{x^{\frac{5}{3}}}{\frac{5}{3}} + 2 \frac{x^{\frac{2}{3}}}{\frac{2}{3}} \right]_y^1 =$$

$$\lim_{y \rightarrow 0} \left[ \frac{3}{5} x^{\frac{5}{3}} + 3x^{\frac{2}{3}} \right]_y^1 = \lim_{y \rightarrow 0} \left( \frac{3}{5} + 3 - \frac{3}{5} y^{\frac{5}{3}} - 3y^{\frac{2}{3}} \right) = \frac{3}{5} + 3 = \frac{18}{5}.$$

In particolare si ritrova che l'integrale improprio è convergente.

### 13.3 Convergenza di integrali impropri di funzioni positive

**Esercizio.** Dire se i seguenti integrali impropri sono convergenti, esplicitando dapprima le funzioni che si considerano

1.  $\int_0^{+\infty} \frac{x}{x^2+x+1} dx;$
2.  $\int_0^{+\infty} \frac{x^2}{x^4+1} dx;$
3.  $\int_0^{+\infty} \sqrt{\frac{x+1}{x^2+x+1}} dx;$
4.  $\int_0^{+\infty} \frac{x+3}{2^x+x} dx;$
5.  $\int_0^{+\infty} \frac{1}{1+x^2};$
6.  $\int_0^{+\infty} \frac{x^2+x}{3^x+x^2+1} dx;$
7.  $\int_0^1 \sqrt{\frac{x+1}{x}};$

## 13.3. CONVERGENZA DI INTEGRALI IMPROPRI

179

8.  $\int_0^1 \frac{x+1}{\sqrt{x}} dx;$

9.  $\int_0^1 \frac{\sin x}{1-\cos x} dx;$

10.  $\int_0^1 \frac{\log(1+x)}{\operatorname{ch} x-1} dx;$

11.  $\int_0^1 \frac{1}{1-x^2};$

12.  $\int_0^1 \frac{\operatorname{Arcsin} x+1}{x} dx.$

**Risoluzione.**

1. Si tratta dell'integrale improprio su di una semiretta positiva della funzione  $f: [0, +\infty[ \rightarrow \mathbf{R}, x \rightarrow \frac{x}{x^2+x+1}.$

Si ha  $\frac{x}{x^2+x+1} \sim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{x^2} = \frac{1}{x};$  quindi l'integrale improprio è divergente positivamente.

2. Si tratta dell'integrale improprio su di una semiretta positiva della funzione  $f: [0, +\infty[ \rightarrow \mathbf{R}, x \rightarrow \frac{x^2}{x^4+1}.$

Si ha  $\frac{x^2}{x^4+1} \sim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{x^4} = \frac{1}{x^2};$  quindi l'integrale improprio è convergente.

3. Si tratta dell'integrale improprio su una semiretta positiva della funzione

$$f: [0, +\infty[ \rightarrow \mathbf{R}, x \rightarrow \sqrt{\frac{x+1}{x^2+x+1}};$$

si ha  $\sqrt{\frac{x+1}{x^2+x+1}} \sim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^{\frac{1}{2}}}{x} = \frac{1}{x^{\frac{3}{2}}};$  quindi l'integrale improprio è divergente positivamente.

4. Si tratta dell'integrale improprio su una semiretta positiva di

$$f: [0, +\infty[ \rightarrow \mathbf{R}, x \rightarrow \frac{x-3}{2^x+x}.$$

Si ha  $\frac{x-3}{2^x+x} \sim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{2^x} = x\left(\frac{1}{2}\right)^x.$

Quindi l'integrale improprio assegnato è convergente.

5. Si tratta dell'integrale improprio su una semiretta positiva della funzione

$$f: [0, +\infty[ \rightarrow \mathbf{R}, x \rightarrow \frac{1}{1+x^2}.$$

Si ha  $\frac{1}{1+x^2} \sim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x^2};$  quindi l'integrale improprio è convergente.

6. Si tratta dell'integrale improprio su una semiretta positiva di

$$f : [0, +\infty[ \rightarrow \mathbf{R}, x \rightarrow \frac{x^2 + x}{3^x + x^2 + 1}.$$

Si ha  $\frac{x^2 + x}{3^x + x^2 + 1} \sim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2}{3^x} = x^2 \left(\frac{1}{3}\right)^x$ .

Quindi l'integrale improprio assegnato è convergente.

7. Si tratta dell'integrale improprio su un intervallo limitato aperto a sinistra della funzione

$$f : ]0, 1] \rightarrow \mathbf{R}, x \rightarrow \sqrt{\frac{x+1}{x}};$$

si ha  $\sqrt{\frac{x+1}{x}} \sim_{x \rightarrow 0} \sqrt{\frac{1}{x}} = \frac{1}{x^{\frac{1}{2}}}$ ; quindi l'integrale improprio è convergente.

8. Si tratta dell'integrale improprio su di un intervallo limitato aperto a sinistra della funzione

$$f : ]0, 1] \rightarrow \mathbf{R}, x \rightarrow \frac{x+1}{\sqrt{x}}.$$

Si ha  $\frac{x+1}{\sqrt{x}} \sim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\sqrt{x}} = \frac{1}{\sqrt{x}} = \frac{1}{x^{\frac{1}{2}}}$ ; quindi l'integrale improprio è convergente.

9. Si tratta dell'integrale improprio su un intervallo limitato aperto a sinistra di

$$f : ]0, 1] \rightarrow \mathbf{R}, x \rightarrow \frac{\sin x}{1 - \cos x}.$$

Si ha  $\frac{\sin x}{1 - \cos x} \sim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\frac{x^2}{2}} = 2\frac{1}{x}$ .

Quindi l'integrale improprio assegnato è divergente positivamente.

10. Si tratta dell'integrale improprio su un intervallo limitato aperto a sinistra di

$$f : ]0, 1] \rightarrow \mathbf{R}, x \rightarrow \frac{\log(1+x)}{\operatorname{ch} x - 1}.$$

Si ha  $\frac{\log(1+x)}{\operatorname{ch} x - 1} \sim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\frac{x^2}{2}} = 2\frac{1}{x}$ .

Quindi l'integrale improprio assegnato è divergente positivamente.

11. Si tratta dell'integrale improprio su un intervallo limitato aperto a destra della funzione

$$f : [0, 1[ \rightarrow \mathbf{R}, x \rightarrow \frac{1}{1 - x^2}.$$

Si ha  $\frac{1}{1 - x^2} = \frac{1}{(1-x)(1+x)} \sim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{2(1-x)}$ ;

quindi l'integrale improprio è divergente positivamente.

12. Si tratta dell'integrale improprio su un intervallo limitato aperto a sinistra della funzione

$$f : ]0, 1] \longrightarrow \mathbf{R}, x \longrightarrow \frac{\operatorname{Arcsin} x + 1}{x}.$$

Si ha

$$\frac{\operatorname{Arcsin} x + 1}{x} \sim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x};$$

quindi l'integrale improprio è divergente positivamente.

### 13.4 Convergenza e valori di integrali impropri

**Esercizio.** Dire se i seguenti integrali impropri sono convergenti e, in caso affermativo, determinarne il valore:

1.  $\int_0^{+\infty} x^5 e^{-2x} dx,$

2.  $\int_0^{+\infty} \frac{\sqrt{x}}{x^2+1} dx;$

3.  $\int_1^{+\infty} \frac{x-1}{x^3+x} dx;$

4.  $\int_0^{+\infty} \frac{x+1}{x^3+8} dx$

5.  $\int_0^{+\infty} \frac{1}{x^3+2} dx.$

Negli esercizi 4 e 5 si può utilizzare la formula

$$\int \frac{ax+b}{x^2+px+q} dx = a \log \sqrt{x^2+px+q} + \frac{2b-pa}{\sqrt{4q-p^2}} \operatorname{Arctg} \frac{2x+p}{\sqrt{4q-p^2}} + c,$$

dove  $p^2 - 4q < 0$ .

**Risoluzione.**

1. Si tratta dell'integrale improprio su una semiretta positiva della funzione

$$f : [0, +\infty[ \longrightarrow \mathbf{R}, x \longrightarrow x^5 e^{-2x}.$$

Si ha

$$x^5 e^{-2x} = x^5 \left( \frac{1}{e^2} \right)^x.$$

Essendo  $\frac{1}{e^2} < 1$ , l'integrale improprio è convergente.

Per ogni  $y \in [0, +\infty[$  si ha

$$\int_0^y x^5 e^{-2x} dx = \left[ x^5 \left( -\frac{1}{2} e^{-2x} \right) \right]_0^y - \int_0^y -\frac{1}{2} e^{-2x} 5x^4 dx =$$

$$\left[ -\frac{1}{2} x^5 e^{-2x} \right]_0^y + \frac{5}{2} \int_0^y x^4 e^{-2x} dx =$$

$$\begin{aligned}
& \left[ -\frac{1}{2}x^5 e^{-2x} \right]_0^y + \frac{5}{2} \left( \left[ x^4 \left( -\frac{1}{2}e^{-5x} \right) \right]_0^y - \int_0^y -\frac{1}{2}e^{-2x} 4x^3 dx \right) = \\
& \left[ -\frac{1}{2}x^5 e^{-2x} - \frac{5}{4}x^4 e^{-2x} \right]_0^y + 5 \int_0^y x^3 e^{-2x} dx = \\
& \left[ -\frac{1}{2}x^5 e^{-2x} - \frac{5}{4}x^4 e^{-2x} \right]_0^y + 5 \left( \left[ x^3 \left( -\frac{1}{2}e^{-2x} \right) \right]_0^y - \int_0^y -\frac{1}{2}e^{-2x} 3x^2 dx \right) = \\
& \left[ -\frac{1}{2}x^5 e^{-2x} - \frac{5}{4}x^4 e^{-2x} - \frac{5}{2}x^3 e^{-2x} \right]_0^y + \frac{15}{2} \int_0^y x^2 e^{-2x} dx = \\
& \left[ -\frac{1}{2}x^5 e^{-2x} - \frac{5}{4}x^4 e^{-2x} - \frac{5}{2}x^3 e^{-2x} \right]_0^y + \\
& \frac{15}{2} \left( \left[ x^2 \left( -\frac{1}{2}e^{-2x} \right) \right]_0^y + 0^y - \int_0^y -\frac{1}{2}e^{-2x} 2x dx \right) = \\
& \left[ -\frac{1}{2}x^5 e^{-2x} - \frac{5}{4}x^4 e^{-2x} - \frac{5}{2}x^3 e^{-2x} - \frac{15}{4}e^{-2x} \right]_0^y + \frac{15}{2} \int_0^y x e^{-2x} dx = \\
& \left[ -\frac{1}{2}x^5 e^{-2x} - \frac{5}{4}x^4 e^{-2x} - \frac{5}{2}x^3 e^{-2x} - \frac{15}{4}x^2 e^{-2x} \right]_0^y + \\
& \frac{15}{2} \left( \left[ x \left( \frac{1}{2}e^{-2x} \right) \right]_0^y - \int_0^y -\frac{1}{2}e^{-2x} dx \right) = \\
& \left[ -\frac{1}{2}x^5 e^{-2x} - \frac{5}{4}x^4 e^{-2x} - \frac{5}{2}x^3 e^{-2x} - \frac{15}{4}x^2 e^{-2x} - \frac{15}{4}x e^{-2x} \right]_0^y + \\
& \frac{15}{4} \int_0^y e^{-2x} dx = \\
& \left[ \left( -\frac{1}{2}x^5 - \frac{5}{4}x^4 - \frac{5}{2}x^3 - \frac{15}{4}x^2 - \frac{15}{4}x - \frac{15}{8} \right) e^{-2x} \right]_0^y = \\
& \left( -\frac{1}{2}y^5 - \frac{5}{4}y^4 - \frac{5}{2}y^3 - \frac{15}{4}y^2 - \frac{15}{4}y - \frac{15}{8} \right) e^{-2y} + \frac{15}{8}.
\end{aligned}$$

Si ha quindi

$$\begin{aligned}
& \int_0^{+\infty} x^5 e^{-2x} dx = \\
& \lim_{y \rightarrow +\infty} \left( \left( -\frac{1}{2}y^5 - \frac{5}{4}y^4 - \frac{5}{2}y^3 - \frac{15}{4}y^2 - \frac{15}{4}y - \frac{15}{8} \right) e^{-2y} + \frac{15}{8} \right) = \frac{15}{8}.
\end{aligned}$$

## 13.4. CONVERGENZA E VALORI DI INTEGRALI IMPROPRI

183

2. Si tratta dell'integrale improprio su una semiretta positiva della funzione

$$f : [0, +\infty[ \rightarrow \mathbf{R}, x \rightarrow \frac{\sqrt{x}}{x^2 + 1}.$$

Si ha

$$\frac{\sqrt{x}}{x^2 + 1} \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{x^{\frac{1}{2}}}{x^2} = \frac{1}{x^{\frac{3}{2}}}.$$

Essendo  $\frac{3}{2} > 1$ , l'integrale improprio è convergente.

Sia  $y \geq 0$ .

Si ha

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sqrt{x}}{x^2 + 1} dx = \lim_{y \rightarrow +\infty} \int_0^y \frac{\sqrt{x}}{x^2 + 1} dx.$$

Poniamo  $\sqrt{x} = t$ ; si ha  $x = t^2$ ; quindi  $\frac{dx}{dt} = 2t$ ; per  $x = 0$ , si ha  $t = 0$ ; per  $x = y$ , si ha  $t = \sqrt{y}$ .

Si ha quindi

$$\int_0^y \frac{\sqrt{x}}{x^2 + 1} dx = \int_0^{\sqrt{y}} \frac{t}{t^4 + 1} 2t dt = 2 \int_0^{\sqrt{y}} \frac{t^2}{t^4 + 1} dt.$$

Le radici dell'equazione complessa  $t^4 = -1$  sono

$$t_0 = \frac{\sqrt{2}}{2} + i \frac{\sqrt{2}}{2},$$

$$t_1 = -\frac{\sqrt{2}}{2} + i \frac{\sqrt{2}}{2},$$

$$t_2 = -\frac{\sqrt{2}}{2} - i \frac{\sqrt{2}}{2},$$

$$t_3 = \frac{\sqrt{2}}{2} - i \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Si ha quindi

$$\begin{aligned} t^4 - 1 &= ((t - t_0)(t - t_3))((t - t_1)(t - t_2)) = \\ &= \left( (t - \left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i \frac{\sqrt{2}}{2}\right)) (t - \left(\frac{\sqrt{2}}{2} - i \frac{\sqrt{2}}{2}\right)) \right) \left( (t - \left(-\frac{\sqrt{2}}{2} + i \frac{\sqrt{2}}{2}\right)) (t - \left(-\frac{\sqrt{2}}{2} - i \frac{\sqrt{2}}{2}\right)) \right) = \\ &= \left( (t - \frac{\sqrt{2}}{2} - i \frac{\sqrt{2}}{2})(t - \frac{\sqrt{2}}{2} + i \frac{\sqrt{2}}{2}) \right) \left( (t + \frac{\sqrt{2}}{2} - i \frac{\sqrt{2}}{2})(t + \frac{\sqrt{2}}{2} + i \frac{\sqrt{2}}{2}) \right) = \\ &= \left( (t - \frac{\sqrt{2}}{2})^2 + \frac{1}{2} \right) \left( (t + \frac{\sqrt{2}}{2})^2 + \frac{1}{2} \right) = (t^2 - \sqrt{2}t + 1)(t^2 + \sqrt{2}t + 1). \end{aligned}$$

Esistono  $A, B, C, D \in \mathbf{R}$  tali che

$$\frac{t^2}{t^4 + 1} = \frac{At + B}{t^2 - \sqrt{2}t + 1} + \frac{Ct + D}{t^2 + \sqrt{2}t + 1}.$$

Si ha

$$t^2 = (At + B)(t^2 - \sqrt{2}t + 1) + (Ct + D)(t^2 + \sqrt{2}t + 1).$$

Quindi

$$\begin{cases} A + C = 0 \\ \sqrt{2}A + B - \sqrt{2}C + D = 1 \\ A + \sqrt{2}B + C + \sqrt{2}D = 0 \\ B + D = 0 \end{cases};$$

quindi

$$\begin{cases} C = -A \\ D = -B \\ \sqrt{2}A + B + \sqrt{2}A - B = 1 \\ A + \sqrt{2}B - A + \sqrt{2}B = 0 \end{cases};$$

quindi

$$\begin{cases} B = 0 \\ D = 0 \\ A = \frac{\sqrt{2}}{4} \\ C = -\frac{\sqrt{2}}{4} \end{cases}.$$

Si ha quindi

$$\frac{t^2}{t^4 + 1} = \frac{\sqrt{2}}{4} \left( \frac{t}{t^2 - \sqrt{2}t + 1} - \frac{t}{t^2 + \sqrt{2}t + 1} \right).$$

Si ha quindi

$$\begin{aligned} 2 \int_0^{\sqrt{y}} \frac{t^2}{t^4 + 1} dt &= \frac{\sqrt{2}}{2} \int_0^{\sqrt{y}} \left( \frac{t}{t^2 - \sqrt{2}t + 1} - \frac{t}{t^2 + \sqrt{2}t + 1} \right) dt = \\ &= \frac{\sqrt{2}}{2} \left[ \log(t^2 - \sqrt{2}t + 1) + \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} \operatorname{Arctg} \frac{2t - \sqrt{2}}{\sqrt{2}} \right. \\ &\quad \left. - (\log(t^2 + \sqrt{2}t + 1) + \frac{-\sqrt{2}}{\sqrt{2}} \operatorname{Arctg} \frac{2t + \sqrt{2}}{\sqrt{2}}) \right]_0^{\sqrt{y}} = \\ &= \frac{\sqrt{2}}{2} \int_0^{\sqrt{y}} \left( \frac{t}{t^2 - \sqrt{2}t + 1} - \frac{t}{t^2 + \sqrt{2}t + 1} \right) dt = \\ &= \frac{\sqrt{2}}{2} \left[ \frac{1}{2} \log \frac{t^2 - \sqrt{2}t + 1}{t^2 + \sqrt{2}t + 1} + \operatorname{Arctg} \frac{2t - \sqrt{2}}{\sqrt{2}} - \operatorname{Arctg} \frac{2t + \sqrt{2}}{\sqrt{2}} \right]_0^{\sqrt{y}} = \\ &= \frac{\sqrt{2}}{2} \left( \frac{1}{2} \log \frac{y - \sqrt{2}\sqrt{y} + 1}{y + \sqrt{2}\sqrt{y} + 1} + \operatorname{Arctg} \frac{2\sqrt{y} - \sqrt{2}}{\sqrt{2}} - \operatorname{Arctg} \frac{2\sqrt{y} + \sqrt{2}}{\sqrt{2}} \right). \end{aligned}$$

Si ha quindi

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sqrt{x}}{x^2 + 1} dx =$$

$$\lim_{y \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{2}}{2} \left( \frac{1}{2} \log \frac{y - \sqrt{2}\sqrt{y} + 1}{y + \sqrt{2}\sqrt{y} + 1} + \operatorname{Arctg} \frac{2\sqrt{y} - \sqrt{2}}{\sqrt{2}} - \operatorname{Arctg} \frac{2\sqrt{y} + \sqrt{2}}{\sqrt{2}} \right) =$$

$$\frac{\sqrt{2}}{2} \left( \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} \right) = \frac{\sqrt{2}}{2} \pi.$$

3. Si tratta dell'integrale improprio su una semiretta positiva della funzione

$$f : [1, +\infty[ \rightarrow \mathbf{R}, x \rightarrow \frac{x-1}{x^3+x}.$$

Si ha

$$\frac{x-1}{x^3+x} \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{x}{x^3} = \frac{1}{x^2}.$$

Quindi l'integrale improprio è convergente.

Si ha

$$\int_1^{+\infty} \frac{x-1}{x^3+x} dx = \lim_{y \rightarrow +\infty} \int_0^y \frac{x-1}{x^3+x} dx.$$

Sia  $y \geq 0$ .

Si ha

$$x^3 + x = x(x^2 + 1).$$

Esistono  $A, B, C \in \mathbf{R}$  tali che

$$\frac{x-1}{x^3+x} = \frac{A}{x} + \frac{Bx+C}{x^2+1}.$$

Si ha

$$x-1 = A(x^2+1) + (Bx+C)x.$$

Per  $x=0$  si ha  $-1=A$ ; quindi  $A=-1$ .

Si ha quindi

$$x-1 = -x^2 - 1 + (Bx+C)x; \text{ quindi}$$

$$x^2 + x = (Bx+C)x; \text{ quindi}$$

$$x(x+1) = (Bx+C)x; \text{ quindi}$$

$$x+1 = Bx+C; \text{ quindi}$$

$$B=1, C=1.$$

Si ha quindi

$$\frac{x-1}{x^3+x} = -\frac{1}{x} + \frac{x+1}{x^2+1}.$$

$$\text{Si ha quindi } \int_1^y \frac{x-1}{x^3+x} dx = \int_1^y \left( -\frac{1}{x} + \frac{x+1}{x^2+1} \right) dx =$$

$$\int_1^y \left( -\frac{1}{x} + \frac{1}{2} \frac{2x}{x^2+1} + \frac{1}{x^2+1} \right) dx = \left[ -\log x + \frac{1}{2} \log(x^2+1) + \operatorname{Arctg} x \right]_1^y =$$

$$\left[ -\log x + \log \sqrt{x^2+1} + \operatorname{Arctg} x \right]_1^y = \left[ \log \frac{\sqrt{x^2+1}}{x} + \operatorname{Arctg} x \right]_1^y =$$

$$\log \frac{\sqrt{y^2+1}}{y} + \operatorname{Arctg} - \log \sqrt{2} - \frac{\pi}{4}.$$

Si ha quindi  $\int_1^{+\infty} \frac{x-1}{x^3+x} dx = \lim_{y \rightarrow +\infty} \left( \log \frac{\sqrt{y^2+1}}{y} + \operatorname{Arctg} - \log \sqrt{2} - \frac{\pi}{4} \right) = 0 + \frac{\pi}{2} - \log \sqrt{2} - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2} \log 2$ .

4. Si tratta dell'integrale improprio su una semiretta positiva della funzione

$$f: [0, +\infty[ \rightarrow \mathbf{R}, x \rightarrow \frac{x+1}{x^3+8}.$$

Si ha

$$\frac{x+1}{x^3+8} \sim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{x^3} = \frac{1}{x^2}.$$

Essendo  $2 > 1$ , l'integrale improprio è convergente.

Si ha

$$\int_0^{+\infty} \frac{x+1}{x^3+8} dx = \lim_{y \rightarrow +\infty} \int_0^y \frac{x+1}{x^3+8} dx.$$

Sia  $y \geq 0$ .

Calcoliamo  $\int_0^y \frac{x+1}{x^3+8} dx$

Si ha

$$x^3 + 8 = (x+2)(x^2 - 2x + 4).$$

Esistono  $A, B, C \in \mathbf{R}$  tali che

$$\frac{x+1}{x^3+8} = \frac{A}{x+2} + \frac{Bx+C}{x^2-2x+4}.$$

Si ha

$$x+1 = A(x^2+2x+4) + (Bx+C)(x+2).$$

Per  $x = -2$  si ha  $-1 = 12A$ ; quindi  $A = -\frac{1}{12}$ .

Si ha quindi

$$x+1 = -\frac{1}{12}(x^2-2x+4) + (Bx+C)(x+2); \text{ quindi}$$

$$12x+12 = -x^2+2x-4+12(Bx+C)(x+2); \text{ quindi}$$

$$x^2+10x+16 = 12(Bx+C)(x+2); \text{ quindi}$$

$$(x+2)(x+8) = 12(Bx+C)(x+2); \text{ quindi}$$

$$x+8 = 12Bx+12C; \text{ quindi}$$

$$12B=1 \text{ e } 12C=8; \text{ quindi } B=\frac{1}{12} \text{ e } C=\frac{2}{3}.$$

Si ha quindi

$$\frac{x+1}{x^3+8} = -\frac{1}{12} \frac{1}{x+2} + \frac{1}{12} \frac{x+8}{x^2-2x+4}.$$

Si ha quindi

$$\int_0^{\sqrt{y}} \frac{x+1}{x^3+8} dx = \int_0^{\sqrt{y}} \left( -\frac{1}{12} \frac{1}{x+2} + \frac{1}{12} \frac{x+8}{x^2-2x+4} \right) dx =$$

$$\begin{aligned} & \frac{1}{12} \left[ -\log(x+2) + \log \sqrt{x^2 - 2x + 4} + \frac{16+2}{\sqrt{16-4}} \operatorname{Arctg} \frac{2x-2}{\sqrt{16-4}} \right]_0^y = \\ & \frac{1}{12} \left[ \log \frac{\sqrt{x^2 - 2x + 4}}{x+2} + 3\sqrt{3} \operatorname{Arctg} \frac{x-1}{\sqrt{3}} \right]_0^y = \\ & \frac{1}{12} \left( \log \frac{\sqrt{y^2 - 2y + 4}}{y+2} + 3\sqrt{3} \operatorname{Arctg} \frac{y-1}{\sqrt{3}} - 3\sqrt{3} \operatorname{Arctg} \left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right) \right) = \\ & \frac{1}{12} \left( \log \frac{\sqrt{y^2 - 2y + 4}}{y+2} + 3\sqrt{3} \operatorname{Arctg} \frac{y-1}{\sqrt{3}} - \frac{\sqrt{3}}{2} \pi \right). \end{aligned}$$

Si ha quindi

$$\begin{aligned} & \int_0^{+\infty} \frac{x+1}{x^3+8} dx = \\ & \lim_{y \rightarrow +\infty} \frac{1}{12} \left( \log \frac{\sqrt{y^2 - 2y + 4}}{y+2} + 3\sqrt{3} \operatorname{Arctg} \frac{y-1}{\sqrt{3}} - \frac{\sqrt{3}}{2} \pi \right) \\ & \frac{1}{12} \left( 3\sqrt{3} \frac{\pi}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} \pi \right) = \frac{1}{12} 2\sqrt{3} \pi = \frac{\sqrt{3}}{6} \pi. \end{aligned}$$

5. Si tratta dell'integrale improprio su una semiretta positiva della funzione

$$f: [0, +\infty[ \rightarrow \mathbf{R}, x \rightarrow \frac{1}{x^3+2}.$$

Si ha

$$\frac{1}{x^3+2} \sim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x^3}.$$

Essendo  $3 > 1$ , l'integrale improprio è convergente.

Si ha

$$\int_0^{+\infty} \frac{1}{x^3+2} dx = \lim_{y \rightarrow +\infty} \int_0^y \frac{1}{x^3+2} dx.$$

Sia  $y \geq 0$ .

Calcoliamo  $\int_0^y \frac{1}{x^3+2} dx$

Si ha

$$x^3 + 2 = (x + \sqrt[3]{2})(x^2 - \sqrt[3]{2}x + \sqrt[3]{4}).$$

Esistono  $A, B, C \in \mathbf{R}$  tali che

$$\frac{1}{x^3+2} = \frac{A}{x + \sqrt[3]{2}} + \frac{Bx+C}{x^2 - \sqrt[3]{2}x + \sqrt[3]{4}}.$$

Si ha

$$1 = A(x^2 + \sqrt[3]{2}x + \sqrt[3]{4}) + (Bx + C)(x + \sqrt[3]{2}).$$

Si ha quindi

$$\begin{cases} A + B = 0 \\ -\sqrt[3]{2}A + \sqrt[3]{2}B + C = 0 \\ \sqrt[3]{4} + \sqrt[3]{2}C = 1 \end{cases};$$

quindi

$$\begin{cases} A = -B \\ \sqrt[3]{2}B + \sqrt[3]{2}B + C = 0 \\ -\sqrt[3]{4}B + \sqrt[3]{C} = 1 \end{cases};$$

quindi

$$\begin{cases} A = -B \\ C = -2\sqrt[3]{2}B \\ -\sqrt[3]{4} + \sqrt[3]{2}C = 1 \end{cases};$$

quindi

$$\begin{cases} A = -B \\ 2\sqrt[3]{2}B + C = 0 \\ -\sqrt[3]{4} + \sqrt[3]{2}(-2\sqrt[3]{2})B = 1 \end{cases};$$

quindi

$$\begin{cases} -2\sqrt[3]{4}B = 1 \\ A = -B \\ C = -2\sqrt[3]{2}B \end{cases};$$

quindi

$$\begin{cases} B = -\frac{1}{3\sqrt[3]{4}} \\ A = \frac{1}{3\sqrt[3]{4}} \\ C = \frac{2\sqrt[3]{2}}{3\sqrt[3]{4}} \end{cases}.$$

Si ha quindi

$$\frac{1}{x^3 + 2} = \frac{1}{3\sqrt[3]{4}} \frac{1}{x + \sqrt[3]{2}} - \frac{1}{3\sqrt[3]{4}} \frac{x - 2\sqrt[3]{2}}{x^2 - \sqrt[3]{2}x + \sqrt[3]{4}}.$$

Si ha quindi

$$\int_0^{\sqrt{y}} \frac{1}{x^3 + 2} dx = \int_0^{\sqrt{y}} \left( \frac{1}{3\sqrt[3]{4}} \frac{1}{x + \sqrt[3]{2}} - \frac{1}{3\sqrt[3]{4}} \frac{x - 2\sqrt[3]{2}}{x^2 - \sqrt[3]{2}x + \sqrt[3]{4}} \right) dx =$$

$$\frac{1}{3\sqrt[3]{4}}.$$

$$\left[ \log(x + \sqrt[3]{2}) - \log \sqrt{x^2 - \sqrt[3]{2}x + \sqrt[3]{4}} - \frac{-4\sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{2}}{\sqrt{4\sqrt[3]{4} - \sqrt[3]{4}}} \operatorname{Arctg} \frac{2x - \sqrt[3]{2}}{\sqrt{4\sqrt[3]{4} - \sqrt[3]{4}}} \right]_0^y$$

$$= \frac{1}{3\sqrt[3]{4}} \left[ \log \frac{x + \sqrt[3]{2}}{\sqrt{x^2 - \sqrt[3]{2}x + \sqrt[3]{4}}} + \frac{3\sqrt[3]{2}}{\sqrt{3\sqrt[3]{2}}} \operatorname{Arctg} \frac{2x - \sqrt[3]{2}}{\sqrt{3\sqrt[3]{2}}} \right]_0^y =$$

$$\frac{1}{3\sqrt[3]{4}} \left( \log \frac{y + \sqrt[3]{2}}{\sqrt{y^2 - \sqrt[3]{2}y + \sqrt[3]{4}}} + \frac{3}{\sqrt{3}} \operatorname{Arctg} \frac{2y - \sqrt[3]{2}}{\sqrt{3}\sqrt[3]{2}} - \frac{3}{\sqrt{3}} \operatorname{Arctg} \left( -\frac{1}{\sqrt{3}} \right) \right) =$$

$$\frac{1}{3\sqrt[3]{4}} \left( \log \frac{y + \sqrt[3]{2}}{\sqrt{y^2 - \sqrt[3]{2}y + \sqrt[3]{4}}} + \frac{3}{\sqrt{3}} \operatorname{Arctg} \frac{2y - \sqrt[3]{2}}{\sqrt{3}\sqrt[3]{2}} + \frac{3}{\sqrt{3}} \frac{\pi}{6} \right).$$

Si ha quindi

$$\int_0^{+\infty} \frac{1}{x^3 + 2} dx =$$

$$\lim_{y \rightarrow +\infty} \frac{1}{3\sqrt[3]{4}} \left( \log \frac{y + \sqrt[3]{2}}{\sqrt{y^2 - \sqrt[3]{2}y + \sqrt[3]{4}}} + \frac{3}{\sqrt{3}} \operatorname{Arctg} \frac{2y - \sqrt[3]{2}}{\sqrt{3}\sqrt[3]{2}} + \frac{3}{\sqrt{3}} \frac{\pi}{6} \right) =$$

$$\frac{1}{3\sqrt[3]{4}} \left( \frac{3}{\sqrt{3}} \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2\sqrt{3}} \right) = \frac{1}{3\sqrt[3]{4}} \frac{2}{\sqrt{3}} \pi = \frac{\sqrt[3]{2}}{3\sqrt{3}} \pi.$$

### 13.5 Integrali impropri su intervalli aperti

1. **Esercizio.** Studiare la convergenza dei seguenti integrali impropri:

- (a)  $\int_0^{+\infty} \log x \, dx$ ;  
 (b)  $\int_1^2 \frac{1}{\sqrt[3]{(x-1)(2-x)}} \, dx$ ;  
 (c)  $\int_0^{+\infty} \frac{x^2+x+1}{2^x \sqrt{x}} \, dx$ .

**Risoluzione.**

- (a) Si tratta dell'integrale improprio su un intervallo aperto della funzione

$$f : [0, +\infty[ \rightarrow \mathbf{R}, x \rightarrow \log x.$$

L'integrale improprio è convergente se e solo se sono convergenti gli integrali impropri  $\int_0^1 \log x \, dx$  e  $\int_1^{+\infty} \log x \, dx$ .

Consideriamo  $\int_1^{+\infty} \log x \, dx$ .

Si ha  $\log x \not\rightarrow_{x \rightarrow +\infty} 1$ .

Quindi l'integrale improprio  $\int_1^{+\infty} \log x \, dx$  è divergente positivamente.

Quindi l'integrale improprio  $\int_0^{+\infty} \log x \, dx$  non è convergente.

- (b) Si tratta dell'integrale improprio su un intervallo aperto della funzione

$$f : ]1, 2[ \rightarrow \mathbf{R}, x \rightarrow \frac{1}{\sqrt[3]{(x-1)(2-x)}}.$$

L'integrale improprio è convergente se e solo se è convergenti l'integrale improprio su un intervallo limitato aperto a sinistra  $\int_1^{\frac{3}{2}} \frac{1}{\sqrt[3]{(x-1)(2-x)}} \, dx$  di

$f|]1, \frac{3}{2}]$  e se è convergente l'integrale improprio su un intervallo limitato aperto a destra  $\int_{\frac{3}{2}}^2 \frac{1}{\sqrt[3]{(x-1)(2-x)}} dx$  di  $f|[\frac{3}{2}, 2[$ .

Consideriamo  $\int_1^{\frac{3}{2}} \frac{1}{\sqrt[3]{(x-1)(2-x)}} dx$ .

Si ha

$$\frac{1}{\sqrt[3]{(x-1)(2-x)}} \sim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{\sqrt[3]{(x-1) \cdot 1}} = \frac{1}{(x-1)^{\frac{1}{3}}}.$$

Essendo  $\frac{1}{3} < 1$  l'integrale improprio  $\int_1^{\frac{3}{2}} \frac{1}{\sqrt[3]{(x-1)(2-x)}} dx$  è convergente.

Consideriamo  $\int_{\frac{3}{2}}^2 \frac{1}{\sqrt[3]{(x-1)(2-x)}} dx$ .

Si ha

$$\frac{1}{\sqrt[3]{(x-1)(2-x)}} \sim_{x \rightarrow 2} \frac{1}{\sqrt[3]{1 \cdot (2-x)}} = \frac{1}{(2-x)^{\frac{1}{3}}}.$$

Essendo  $\frac{1}{3} < 1$  l'integrale improprio  $\int_{\frac{3}{2}}^2 \frac{1}{\sqrt[3]{(x-1)(2-x)}} dx$  è convergente.

Quindi l'integrale improprio assegnato è convergente.

(c) Si tratta dell'integrale improprio su un intervallo aperto della funzione

$$f : ]0, +\infty[ \rightarrow \mathbf{R}, x \rightarrow \frac{x^2 + x + 1}{2^x \sqrt{x}}.$$

L'integrale improprio è convergente se e solo è convergenti l'integrale improprio su un intervallo limitato aperto a sinistra  $\int_0^1 \frac{x^2+x+1}{2^x \sqrt{x}} dx$  di  $f|]0, 1]$  e se è convergente l'integrale improprio su una semiretta positiva  $\int_1^{+\infty} \frac{x^2+x+1}{2^x \sqrt{x}} dx$  di  $f|[1, +\infty[$ .

Consideriamo  $\int_0^1 \frac{x^2+x+1}{2^x \sqrt{x}} dx$ .

Si ha

$$\frac{x^2+x+1}{2^x \sqrt{x}} \sim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt{x}} = \frac{1}{x^{\frac{1}{2}}}.$$

Essendo  $\frac{1}{2} < 1$  l'integrale improprio  $\int_0^1 \frac{x^2+x+1}{2^x \sqrt{x}} dx$  è convergente.

Consideriamo  $\int_1^{+\infty} \frac{x^2+x+1}{2^x \sqrt{x}} dx$ .

Si ha

$$\frac{x^2+x+1}{2^x \sqrt{x}} \sim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{2^x \sqrt{x}} = x^{\frac{3}{2}} \left(\frac{1}{2}\right)^x.$$

Essendo  $\frac{1}{2} < 1$  l'integrale improprio  $\int_1^{+\infty} \frac{x^2+x+1}{2^x \sqrt{x}} dx$  è convergente.

Quindi l'integrale improprio assegnato è convergente.

2. **Esercizio.** Dire se il seguente integrale improprio è convergente e, in caso affermativo, determinarne il valore:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+x^4} dx.$$

**NB 1.** Si può utilizzare la formula  $\int \frac{ax+b}{x^2+px+q} dx = a \log \sqrt{x^2+px+q} + \frac{2b-pa}{\sqrt{4q-p^2}} \operatorname{Arctg} \frac{2x+p}{\sqrt{4q-p^2}} + c$ , dove  $p^2 - 4q < 0$ .

## 13.5. INTEGRALI IMPROPRI SU INTERVALLI APERTI

191

**Risoluzione.**

Si tratta dell'integrale improprio su un intervallo aperto della funzione

$$f : ] - \infty, +\infty[ \rightarrow \mathbf{R}, x \rightarrow \frac{1}{1+x^4}.$$

L'integrale improprio assegnato è convergente, se sono convergenti gli integrali impropri  $\int_0^{+\infty} \frac{1}{1+x^4} dx$  e  $\int_{-\infty}^0 \frac{1}{1+x^4} dx$ .

Si ha

$$\frac{1}{1+x^4} \sim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x^4}.$$

Quindi l'integrale improprio  $\int_0^{+\infty} \frac{1}{1+x^4} dx$  è convergente.

Si ha

$$\frac{1}{1+x^4} \sim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x^4}.$$

Quindi l'integrale improprio  $\int_{-\infty}^0 \frac{1}{1+x^4} dx$  è convergente.

Quindi l'integrale improprio assegnato è convergente.

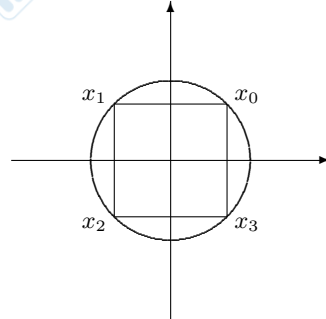
Determiniamo il valore dell'integrale improprio. Si ha

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+x^4} dx = \int_{-\infty}^0 \frac{1}{1+x^4} dx + \int_0^{+\infty} \frac{1}{1+x^4} dx.$$

Calcoliamo  $\int \frac{1}{1+x^4} dx$ .

Per fattorizzare il polinomio  $x^4+1$  determiniamo le radici complesse di  $x^4 = -1$ .

Si ha  $|-1| = 1$  e  $\pi \in \arg(-1)$ .



Tenendo conto della posizione delle radici, si trova

$$x_0 = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i,$$

$$x_1 = -\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i,$$

$$x_2 = -\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i,$$

$$x_3 = \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i.$$

Si ha

$$x^4 + 1 = ((x - x_0)(x - x_3))((x - x_1)(x - x_2)) =$$

$$\begin{aligned} & \left( \left( x - \frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2} \right) \left( x - \frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2} \right) \right) \left( \left( x + \frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2} \right) \left( x + \frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2} \right) \right) = \\ & \left( \left( x - \frac{\sqrt{2}}{2} \right)^2 + \frac{1}{2} \right) \left( \left( x + \frac{\sqrt{2}}{2} \right)^2 + \frac{1}{2} \right) = (x^2 - \sqrt{2}x + 1)(x^2 + \sqrt{2}x + 1). \end{aligned}$$

Esistono  $A, B, C, D \in \mathbf{R}$  tali che

$$\frac{1}{x^4 + 1} = \frac{Ax + B}{x^2 - \sqrt{2}x + 1} + \frac{Cx + D}{x^2 + \sqrt{2}x + 1}.$$

Per ogni  $x \in \mathbf{R}$  si ha

$$1 = (Ax + B)(x^2 + \sqrt{2}x + 1) + (Cx + D)(x^2 - \sqrt{2}x + 1).$$

Si ha quindi

$$\begin{cases} A + C = 0 \\ \sqrt{2}A + B - \sqrt{2}C + D = 0 \\ A + \sqrt{2}B + C - \sqrt{2}D = 0 \\ B + D = 1 \end{cases},$$

cioè

$$\begin{cases} C = -A \\ D = 1 - B \\ \sqrt{2}A + \sqrt{2}A + 1 - B = 0 \\ A + \sqrt{2}B + -A - \sqrt{2}(1 - B) = 0 \end{cases},$$

cioè

$$\begin{cases} C = -A \\ D = 1 - B \\ 2\sqrt{2}A = -1 \\ 2\sqrt{2}B = \sqrt{2} \end{cases},$$

cioè

$$\begin{cases} A = -\frac{\sqrt{2}}{4} \\ C = \frac{\sqrt{2}}{4} \\ B = \frac{1}{2} \\ D = \frac{1}{2} \end{cases}$$

Si ha quindi

$$\frac{1}{x^4 + 1} = \frac{1}{4} \frac{-\sqrt{2}x + 2}{x^2 - \sqrt{2}x + 1} + \frac{1}{4} \frac{\sqrt{2}x + 2}{x^2 + \sqrt{2}x + 1}.$$

Si ha quindi

$$\int \frac{1}{x^4 + 1} dx = \frac{1}{4} \int \left( \frac{\sqrt{2}x + 2}{x^2 + \sqrt{2}x + 1} - \frac{\sqrt{2}x - 2}{x^2 - \sqrt{2}x + 1} \right) dx =$$

$$\begin{aligned} & \frac{1}{4} \left( \sqrt{2} \log \sqrt{x^2 + \sqrt{2}x + 1} + \frac{4-2}{\sqrt{4-2}} \operatorname{Arctg} \frac{2x + \sqrt{2}}{\sqrt{4-2}} - \right. \\ & \left. (\sqrt{2} \log \sqrt{x^2 - \sqrt{2}x + 1} + \frac{-4+2}{\sqrt{4-2}} \operatorname{Arctg} \frac{2x - \sqrt{2}}{\sqrt{4-2}}) \right) + C = \\ & \frac{1}{4} \left( \sqrt{2} \log \sqrt{\frac{x^2 + \sqrt{2}x + 1}{x^2 - \sqrt{2}x + 1}} + \frac{2}{\sqrt{2}} \operatorname{Arctg} \frac{2x + \sqrt{2}}{\sqrt{2}} - \frac{2}{\sqrt{2}} \operatorname{Arctg} \frac{2x - \sqrt{2}}{\sqrt{2}} \right) + C = \\ & \frac{\sqrt{2}}{4} \left( \log \sqrt{\frac{x^2 + \sqrt{2}x + 1}{x^2 - \sqrt{2}x + 1}} + \operatorname{Arctg} \frac{2x + \sqrt{2}}{\sqrt{2}} - \operatorname{Arctg} \frac{2x - \sqrt{2}}{\sqrt{2}} \right) + C. \end{aligned}$$

Per ogni  $y \in \mathbf{R}_+^*$  si ha quindi

$$\begin{aligned} & \int_0^y \frac{1}{x^4 + 1} dx = \\ & \frac{\sqrt{2}}{4} \left[ \log \sqrt{\frac{x^2 + \sqrt{2}x + 1}{x^2 - \sqrt{2}x + 1}} + \operatorname{Arctg} \frac{2x + \sqrt{2}}{\sqrt{2}} - \operatorname{Arctg} \frac{2x - \sqrt{2}}{\sqrt{2}} \right]_0^y = \\ & \frac{\sqrt{2}}{4} \left( \log \sqrt{\frac{y^2 + \sqrt{2}y + 1}{y^2 - \sqrt{2}y + 1}} + \right. \\ & \left. \operatorname{Arctg} \frac{2y + \sqrt{2}}{\sqrt{2}} + \operatorname{Arctg} \frac{2y - \sqrt{2}}{\sqrt{2}} - \operatorname{Arctg} 1 - \operatorname{Arctg}(-1) \right) = \\ & \frac{\sqrt{2}}{4} \left( \log \sqrt{\frac{y^2 + \sqrt{2}y + 1}{y^2 - \sqrt{2}y + 1}} + \operatorname{Arctg} \frac{2y + \sqrt{2}}{\sqrt{2}} + \operatorname{Arctg} \frac{2y - \sqrt{2}}{\sqrt{2}} \right). \end{aligned}$$

Si ha quindi

$$\begin{aligned} & \int_0^{+\infty} \frac{1}{x^4 + 1} dx = \\ & \lim_{y \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{2}}{4} \left( \log \sqrt{\frac{y^2 + \sqrt{2}y + 1}{y^2 - \sqrt{2}y + 1}} + \operatorname{Arctg} \frac{2y + \sqrt{2}}{\sqrt{2}} + \operatorname{Arctg} \frac{2y - \sqrt{2}}{\sqrt{2}} \right) = \\ & \frac{\sqrt{2}}{4} \left( \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} \right) = \frac{\sqrt{2}}{4} \pi. \end{aligned}$$

Per ogni  $y \in \mathbf{R}$ ,  $y < 0$  si ha

$$\int_y^0 \frac{1}{x^4 + 1} dx =$$

$$\begin{aligned} & \frac{\sqrt{2}}{4} \left[ \log \sqrt{\frac{x^2 + \sqrt{2}x + 1}{x^2 - \sqrt{2}x + 1}} + \operatorname{Arctg} \frac{2x + \sqrt{2}}{\sqrt{2}} - \operatorname{Arctg} \frac{2x - \sqrt{2}}{\sqrt{2}} \right]_y^0 = \\ & \frac{\sqrt{2}}{4} \left( \operatorname{Arctg} 1 + \operatorname{Arctg}(-1) - \log \sqrt{\frac{y^2 + \sqrt{2}y + 1}{y^2 - \sqrt{2}y + 1}} - \right. \\ & \quad \left. \operatorname{Arctg} \frac{2y + \sqrt{2}}{\sqrt{2}} - \operatorname{Arctg} \frac{2y - \sqrt{2}}{\sqrt{2}} \right) = \\ & \frac{\sqrt{2}}{4} \left( -\log \sqrt{\frac{y^2 + \sqrt{2}y + 1}{y^2 - \sqrt{2}y + 1}} - \operatorname{Arctg} \frac{2y + \sqrt{2}}{\sqrt{2}} - \operatorname{Arctg} \frac{2y - \sqrt{2}}{\sqrt{2}} \right). \end{aligned}$$

Si ha quindi

$$\begin{aligned} & \int_{-\infty}^0 \frac{1}{x^4 + 1} dx = \\ & \lim_{y \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{2}}{4} \left( -\log \sqrt{\frac{y^2 + \sqrt{2}y + 1}{y^2 - \sqrt{2}y - 1}} + \operatorname{Arctg} \frac{2y + \sqrt{2}}{\sqrt{2}} - \operatorname{Arctg} \frac{2y - \sqrt{2}}{\sqrt{2}} \right) = \\ & \frac{\sqrt{2}}{4} \left( \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} \right) = \frac{\sqrt{2}}{4} \pi. \end{aligned}$$

Si ha quindi

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{x^4 + 1} dx = \frac{\sqrt{2}}{4} \pi + \frac{\sqrt{2}}{4} \pi = \frac{\sqrt{2}}{2} \pi.$$

### 13.6 Integrali impropri su intervalli privati di punti

1. **Esercizio.** Dire se il seguente integrali improprio è convergente e, in caso affermativo, determinarne il valore:

$$\int_{-1}^1 \frac{1}{x} dx.$$

**Risoluzione.** Si tratta dell'integrale improprio su un intervallo privato di punti della funzione

$$f: [-1, 1] - \{0\} \rightarrow \mathbf{R}, x \rightarrow \frac{1}{x}.$$

L'integrale improprio è convergente se e solo se sono convergenti gli integrali impropri  $\int_{-1}^0 \frac{1}{x} dx$  e  $\int_0^1 \frac{1}{x} dx$ .

L'integrale improprio  $\int_0^1 \frac{1}{x} dx$  è divergente positivamente.

Quindi l'integrale improprio  $\int_{-1}^1 \frac{1}{x} dx$  non è convergente.

## 13.6. INTEGRALI IMPROPRI SU INTERVALLI PRIVATI DI PUNTI

195

2. **Esercizio.** Dire se il seguente integrali improprio è convergente e, in caso affermativo, determinarne il valore:

$$\int_{-1}^1 \frac{1}{\sqrt{|x|}} dx .$$

**Risoluzione.** Si tratta dell'integrale improprio su un intervallo privato di punti della funzione

$$f : [-1, 1] - \{0\} \rightarrow \mathbf{R}, x \rightarrow \frac{1}{\sqrt{|x|}} .$$

L'integrale improprio è convergente se e solo se sono convergenti gli integrali impropri  $\int_{-1}^0 \frac{1}{\sqrt{|x|}} dx$  e  $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{|x|}} dx$ .

Si ha

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{|x|}} dx = \int_0^1 \frac{1}{x^{\frac{1}{2}}} dx .$$

Essendo  $\frac{1}{2} < 1$ , l'integrale improprio  $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{|x|}} dx$  è convergente.

Analogamente si vede che l'integrale improprio  $\int_{-1}^0 \frac{1}{\sqrt{|x|}} dx$  è convergente.

Quindi l'integrale improprio  $\int_{-1}^1 \frac{1}{\sqrt{|x|}} dx$  è convergente.

Si ha

$$\begin{aligned} \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{|x|}} dx &= \lim_{y \rightarrow 0} \int_y^1 \frac{1}{x^{\frac{1}{2}}} dx = \lim_{y \rightarrow 0} \int_y^1 x^{-\frac{1}{2}} dx = \lim_{y \rightarrow 0} \left[ \frac{x^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} \right]_y^1 = \\ &= 2 \lim_{y \rightarrow 0} (1 - \sqrt{y}) = 2 . \end{aligned}$$

Analogamente si vede che

$$\int_{-1}^0 \frac{1}{\sqrt{|x|}} dx = 2 .$$

Si ha quindi

$$\int_{-1}^1 \frac{1}{\sqrt{|x|}} dx = \int_{-1}^0 \frac{1}{\sqrt{|x|}} dx + \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{|x|}} dx = 2 + 2 = 4 .$$

3. **Esercizio.** Dire se il seguente integrali improprio è convergente e, in caso affermativo, determinarne il valore:

$$\int_0^4 \frac{1}{x^2 - 5x + 6} dx .$$

**Risoluzione.** Si ha  $x^2 - 5x + 6 = 0$  se e solo se  $x = 2$  o  $x = 3$ . Si tratta quindi dell'integrale improprio su un intervallo privato di punti della funzione

$$f : [0, 4] - \{2, 3\} \rightarrow \mathbf{R}, x \rightarrow \frac{1}{x^2 - 5x + 6}.$$

L'integrale improprio è convergente se e solo se sono convergenti gli integrali impropri

$$\int_0^2 \frac{1}{x^2 - 5x + 6} dx, \int_2^3 \frac{1}{x^2 - 5x + 6} dx, \int_3^4 \frac{1}{x^2 - 5x + 6} dx.$$

Consideriamo  $\int_0^2 \frac{1}{x^2 - 5x + 6} dx$ .

Si tratta quindi dell'integrale improprio su un intervallo limitato aperto a destra della funzione

$$f : [0, 2[ \rightarrow \mathbf{R}, x \rightarrow \frac{1}{x^2 - 5x + 6}.$$

Si ha

$$\frac{1}{x^2 - 5x + 6} = \frac{1}{(x-2)(x-3)} \sim_{x \rightarrow 2} -\frac{1}{x-2}.$$

Quindi l-integrale improprio  $\int_0^2 \frac{1}{x^2 - 5x + 6} dx$  non è convergente.

Quindi l-integrale improprio  $\int_0^4 \frac{1}{x^2 - 5x + 6} dx$  non è convergente.