Analisi Matematica I - EDA
Prof. V. Pata

ELEMENTI DI LOGICA

1. Proposizioni

Definizione. Si dicono *formule ben formate* (fbf) quelle successioni di simboli o parole che rispettino una particolare sintassi.

Esempio. La frase "il leone vola" è una fbf, cosiccome la frase "x è maggiore di 2", mentre non lo sono le frasi "$x + ($" e "la, casa (non è; abitata".

Definizione. Si dice *proposizione* una fbf che non contiene variabili libere a cui si può attribuire il valore di *vero* o *falso*.

Le proposizioni vengono indicate con le lettere maiuscole $P, Q, \ldots$.

Definizione. Si dice *predicato* una fbf che contiene variabili libere, il cui valore di verità dipende dal valore delle variabili. Tuttavia, per ogni assegnamento delle variabili, il predicato deve essere vero o falso.

I predicati vengono indicati con le lettere maiuscole $P(x, y, \ldots)$, dove $x, y, \ldots$ sono le variabili libere.

Esempio. La proposizione $P =$ "Socrate è un filosofo" è vera. Il predicato $P(x) =$ "x^2 è maggiore di 2" è vero per $|x| > \sqrt{2}$, mentre è falso per $|x| \leq \sqrt{2}$.

Non tutte le fbf sono necessariamente proposizioni o predicati. Ad esempio la fbf "io sto mentendo" non è né vera né falsa. Questa situazione è nota con il nome di *paradosso* o *antinomia* (l'esistenza dei paradossi dipende dall'aver assunto una teoria non assiomatica degli insiemi).

La richiesta che una proposizione non possa essere congiuntamente vera e falsa è nota in logica come *Principio di non contraddizione*.

2. Connettivi logici

Le proposizioni e i predicati possono essere costituiti da una sola frase, o da più frasi unite tra loro da *connettivi*. La lista dei connettivi è la seguente:

- $\wedge$ **congiunzione** ($P \wedge Q$, p.e. "la casa è rossa *e* il mare è blu").
- $\dot{\vee}$ **disgiunzione esclusiva** ($P \dot{\vee} Q$, p.e. "un numero intero *o* è pari *o* è dispari").
- $\vee$ **disgiunzione inclusiva** ($P \vee Q$, p.e. "vince chi è allenato *o* chi è fortunato").
- $\neg$ **negazione** ($\neg P$, p.e. "3 *non* è pari").
- $\Rightarrow$ **implicazione** ($P \Rightarrow Q$, p.e. "*se* studi *allora* passi l'esame").
- $\Leftrightarrow$ **doppia implicazione** ($P \Leftrightarrow Q$, p.e. "passi l'esame *se e solo se* studi").

Segnaliamo che mentre in latino esiste una distinzione linguistica tra la disgiunzione esclusiva (AUT) e quella inclusiva (VEL), tale distinzione non è presente nella lingua italiana. Anzi, in genere in italiano la congiunzione "o" viene utilizzata solo in senso esclusivo. Per i nostri scopi è invece più importante la disgiunzione inclusiva.

Oltre al Principio di non contraddizione, si assume anche il *Principio del terzo escluso*: una proposizione è vera se e solo se la sua negazione è falsa.

3. Condizioni necessarie e condizioni sufficienti

Analizziamo la proposizione composta $P \Rightarrow Q$ (ad esempio, sia $P =$ "essere un quadrato" e $Q =$ "essere un rettangolo"). Ciò significa che P è una condizione sufficiente per il verificarsi di Q. Allo stesso modo, Q è necessaria per il verificarsi di P. Infatti non essere un rettangolo implica ovviamente non essere un quadrato. Si noti che le proposizioni composte

$$P \Rightarrow Q \qquad \text{e} \qquad \neg Q \Rightarrow \neg P$$

sono *logicamente equivalenti*, ovvero il valore di verità delle due proposizioni composte è il medesimo al variare dei valori di verità di P e Q. La proposizione composta $P \Leftrightarrow Q$ dice invece P è una condizione necessaria e sufficiente per il verificarsi di Q (e viceversa).

4. Quantificatori

Per assegnare il valore di verità ad un predicato è necessario quantificare le variabili libere. Il predicato $P(x) =$ "x è il doppio di sette" è vero quando si assegna ad x il valore 14. Dunque possiamo affermare che *esiste* un numero x tale che $P(x)$ è verificata. Tuttavia $P(x)$ non è verificata *per ogni* x. I quantificatori sono di due tipi:

1. il *quantificatore esistenziale*, ovvero "esiste .... tale che" (indicato con $\exists \ldots :$). Il simbolo $\exists!$ significa "esiste ed è unico".
2. il *quantificatore universale*, ovvero "per ogni" (indicato con $\forall$).

Esempio. Consideriamo la seguente proposizione: "per ogni intero x si ha che se $x > 1$ allora $x > 0$". Definendo $P(x) =$ "$x > 1$" e $Q(x) =$ "$x > 0$" possiamo riscrivere la proposizione come

$$\forall \text{ intero } x,\ P(x) \Rightarrow Q(x).$$

Negare questa proposizione significa affermare l'esistenza di un intero x che verifica $P(x)$ ma non $Q(x)$ [ovviamente la negazione dell'esempio proposto è falsa]. Dovremmo allora scrivere

$$\exists \text{ intero } x : P(x) \wedge \neg Q(x).$$

Allo stesso modo per negare la frase "esistono fiori gialli" non dobbiamo dire "esistono fiori non gialli", ma "tutti i fiori sono non gialli". Banalmente, per negare $\forall$ si usa $\exists$, e viceversa.

5. Teorema e dimostrazione

Il *teorema* è un asserto di cui si vuole dimostrare la verità, partendo da alcune ipotesi. L'ipotesi è una proposizione H che è assunta vera. La tesi è una proposizione T. Dimostrare un teorema significa far vedere che la proposizione $H \Rightarrow T$ è vera. Notiamo che far vedere che $H \Rightarrow T$ è vera è equivalente a far vedere che $\neg T \Rightarrow \neg H$. Questo è lo schema della *dimostrazione per assurdo*, ovvero invece di dimostrare che dall'ipotesi consegue la tesi, si dimostra che dalla *negazione* della tesi segue la *negazione* dell'ipotesi.

Esempio. Ipotesi: sia $x \geq 4$; tesi: x è positivo. Si noti la verità della tesi discende automaticamente dalla verità del teorema, cioè della proposizione $H \Rightarrow T$.

La *dimostrazione* è quell'insieme di passaggi da una proposizione ad un altra logicamente equivalente, che ha come punto di partenza H e come punto d'arrivo $H \Rightarrow T$.

Elenchiamo i più comuni metodi di dimostrazione:

1. Metodo deduttivo (dimostrazione diretta).
2. Per assurdo.
3. Per induzione.
4. Per controesempio (nel caso si voglia dimostrare che il teorema è falso).

Il principio di *induzione matematica* è una particolare tecnica dimostrativa utile a provare la verità di una proposizione $P(n)$, che valga per ogni intero maggiore o uguale ad un intero fissato n_0. Il primo passo è stabilire la verità di $P(n_0)$. Il secondo passo è quello di *assumere* $P(n)$ vera per un qualsiasi $n \geq n_0$ e mostrare che da ciò discende la verità di $P(n+1)$.

Esempio. Per $n = 1, 2, \ldots$, sia $P(n)$ la seguente formula:

$$1 + 2 + \ldots + n = \frac{n(n+1)}{2}.$$

Dimostriamo la verità di $P(n)$ usando l'induzione. $P(1)$ è banalmente verificata. Supponiamo allora che lo sia $P(n)$. Allora abbiamo che

$$1 + 2 + \ldots + n + (n+1) = \frac{n(n+1)}{2} + (n+1) = \frac{(n+1)(n+2)}{2},$$

ovvero anche $P(n+1)$ è verificata.

Esercizio. Dimostrare per induzione la formula

$$1 + 2^3 + \ldots + n^3 = (1 + 2 + \ldots + n)^2.$$

Definizione. Si dice *assioma* una proposizione assunta vera senza dimostrazione. Ad esempio "ogni coppia di punti distinti appartiene ad una sola retta" è un assioma.

Ogni teoria matematica si fonda su un certo numero di assiomi, da cui si deducono poi i teoremi attraverso determinate regole.

Il problema di una teoria matematica è quello di stabilire in primo luogo che gli assiomi siano coerenti tra loro (ovvero partendo da alcuni assiomi non si possa giungere a dimostrare la falsità di un altro assioma).

In secondo luogo, stabilire se tutti i teoremi veri all'interno della teoria discendano dagli assiomi (completezza della teoria).

La coerenza e la completezza di una teoria matematica sufficientemente complessa costituiscono il problema principe della logica matematica. Accenniamo solo al fatto che un risultato fondamentale di Gödel asserisce che se la teoria è coerente, allora è necessariamente incompleta. Dunque esistono teoremi indimostrabili! (fortunatamente non in Analisi I).

ALGEBRA DEGLI INSIEMI

1. Insiemi e sottoinsiemi

Insieme è un termine primitivo, del quale non si dà una definizione. Un insieme viene assegnato attraverso un criterio obiettivo attraverso il quale si possa stabilire se un elemento appartiene o meno all'insieme.

Esempio. Insieme dei numeri; insieme delle nazioni.

Gli insiemi vengono indicati con le lettere maiuscole $A, B, C, \ldots$, mentre gli elementi di un insieme con le lettere minuscole $a, b, c, \ldots$. La scrittura $a \in A$ significa "a appartiene ad A.

Gli insiemi vengono rappresentati in tre modi:

1. Per elencazione: vengono elencati gli elementi di un insieme, ad esempio $A = \{1, 3, 5\}$ è l'insieme dei primi tre numeri dispari. Tale metodo è utilizzabile per rappresentare insiemi piccoli.
2. Per proprietà caratteristica: gli elementi sono caratterizzati dal fatto di soddisfare una certa proprietà. Riallacciandoci al paragrafo precedente, assegnato un predicato $P(x)$, l'insieme è formato dagli x che rendono vero $P(x)$. Ad esempio $A = \{x : x > 3\}$ è l'insieme di tutti i numeri maggiori di tre.
3. Per rappresentazione grafica: attraverso i diagrammi di Eulero-Venn (utili per visualizzare le operazioni tra insiemi).

Definizione. L'insieme vuoto, indicato con $\emptyset$, è l'insieme che non contiene alcun elemento.

Due insiemi A e B sono uguali se contengono esattamente gli stessi elementi, ovvero

$$A = B \qquad \Leftrightarrow \qquad x \in A \Leftrightarrow x \in B.$$

Definizione. Un insieme B è sottoinsieme di A se ogni elemento di B appartiene ad A (e si scrive $B \subset A$). Particolari sottoinsiemi di un qualsiasi insieme A sono l'insieme A stesso e $\emptyset$.

Definizione. L'insieme delle parti di A, indicato con $\mathcal{P}(A)$ è l'insieme di tutti i sottoinsiemi di A.

Esempio. $A = \{1, 2, 3\}$; allora $\mathcal{P}(A) = \big\{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}, A\big\}$.

Definizione. Il numero di elementi di A è detto *cardinalità* di A, e si indica con $\overline{A}$. Se $\overline{A} = n$ allora $\overline{\mathcal{P}(A)} = 2^n$.

2. Operazioni tra insiemi

- $\cap$ Intersezione: L'insieme $A \cap B$ è dato da $\{x : x \in A \wedge x \in B\}$.
- $\cup$ Unione: L'insieme $A \cup B$ è dato da $\{x : x \in A \vee x \in B\}$.
- $\dot\cup$ Unione disgiunta: L'insieme $A \dot\cup B$ è dato da $\{x : x \in A \dot\vee x \in B\}$.
- $\setminus$ Differenza: L'insieme $A \setminus B$ è dato da $\{x : x \in A \wedge x \notin B\}$.
- ^{C} Complementazione: L'insieme A^C (detto complementare di A) è dato da $\{x : x \notin A\}$.

Tutti gli insiemi si intendono immersi in un insieme universale di riferimento. Pertanto Se $A = \{1, 2, 3\}$, e l'insieme universale di riferimento è l'insieme di tutti gli interi, allora A^C è l'insieme degli interi diversi da 1, 2 e 3. Se l'insieme universale di riferimento è l'insieme di tutti i numeri reali, allora A^C è l'insieme dei numeri reali diversi da 1, 2 e 3.

Esercizio. Visualizare graficamente le operazioni tra gli insiemi utilizzando i diagrammi di Eulero-Venn.

3. Alcune proprietà delle operazioni

Elenchiamo in seguito alcune proprietà delle operazioni insiemistiche:

$$
\begin{aligned}
&A \cup A = A \\
&A \cup \emptyset = A \\
&A \cup B = B \quad \text{se} \quad A \subset B \\
&A \cup B = B \cup A \\
\\
&A \cap A = A \\
&A \cap \emptyset = \emptyset \\
&A \cap B = A \quad \text{se} \quad A \subset B \\
&A \cap B = B \cap A \\
\\
&(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C) \\
&(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C) \\
\\
&A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C) \\
&A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C) \\
\\
&(A \cup B)^C = A^C \cap B^C \\
&(A \cap B)^C = A^C \cup B^C
\end{aligned}
$$

4. Prodotto cartesiano

Definizione. Si dice *coppia ordinata* una coppia di elementi (a, b) in cui viene distinto l'ordinamento. Pertanto $(a, b) \neq (b, a)$.

Definizione. Dati due insiemi A e B si dice *prodotto cartesiano* di A con B (e si indica $A \times B$) l'insieme formato da tutte le possibili coppie ordinate (a, b) con $a \in A$ e $b \in B$.

L'insieme $A \times B$ può essere rappresentato mediante un *diagramma cartesiano*, in cui l'ascissa rappresenta A e l'ordinata rappresenta B. Gli elementi dell'insieme sono allora i punti del grafico di coordinate (a, b), con $a \in A$ e $b \in B$.

5. Relazioni e funzioni

Definizione. si dice *relazione* o *corrispondenza* fra A e B un sottoinsieme di $A \times B$. La scrittura $a\mathcal{R}b$ significa "l'elemento $a \in A$ è in relazione con l'elemento $b \in B$".

Un caso di particolare interesse è la *relazione d'ordine* su un insieme. Una relazione tra A e A (per brevità diciamo una relazione su A) si dice d'ordine se soddisfa le tre seguenti proprietà:

1. $\forall\, a \in A$, $a\mathcal{R}a$ (riflessività).
2. $\forall\, a, b \in A$, se $a\mathcal{R}b$ e $b\mathcal{R}a$ allora $a = b$ (antisimmetria).
3. $\forall\, a, b, c \in A$, $a\mathcal{R}b$ e $b\mathcal{R}c$ allora $a\mathcal{R}c$ (transitività).

Una relazione che invece soddisfa le proprietà 1 e 3 e la

2.′ $\forall\, a, b \in A$, se $a\mathcal{R}b$ allora $b\mathcal{R}a$ (simmetria),

è detta relazione di equivalenza. Si è soliti denotare tale relazione con il simbolo $\sim$.

Esempio. Sia A l'insieme degli interi positivi, e la relazione "essere minore o uguale a". Ovvero se a e b sono interi positivi, allora $a\mathcal{R}b$ significa $a \leq b$. È immediato verificare che questa è una relazione d'ordine.

Esempio. Sia A l'insieme dei triangoli. Due elementi $a, b \in A$ sono in relazione tra loro (cioè $a \sim b$) se sono triangoli simili. Questo è un esempio di relazione di equivalenza.

Definizione. si dice *funzione* fra A e B una particolare relazione tale per cui ad ogni valore $a \in A$ può corrispondere al più un solo valore $b \in B$.

Le funzioni vengono rappresentate con le lettere minuscole $f, g, h \ldots$. Una funzione f da A a B viene denotata con $f : A \to B$. L'elemento $b \in B$ corrispondente all'elemento $a \in A$ viene indicato con $f(a)$.

Esempio. Sia A l'insieme degli studenti di Lecco, B l'insieme delle lingue straniere. Associamo ad ogni studente le lingue straniere conosciute. In generale non avremo una funzione, poiché uno studente potrebbe conoscere più di una lingua straniera. La relazione che associa ad ogni studente la propria altezza è invece una funzione.

Definizione. Data una funzione $f : A \to B$ il *dominio* di f è il sottoinsieme $D(f) \subset A$ formato dagli elementi di A che hanno un corrispondente in B attraverso la f. L'*immagine* di f è il sottoinsieme $I(f) \subset B$ formato dagli elementi di B che vengono raggiunti da A mediante la f.

Esempio. Sia $A = \{a, b, c, d, e\}$ e $B = \{1, 2, 3, 4, 5\}$. Consideriamo la $f : A \to B$ di seguito definita:

$$f(a) = 1, \quad f(b) = 1, \quad f(c) = 2, \quad f(e) = 5.$$

Allora

$$D(f) = \{a, b, c, e\} \qquad \text{e} \qquad I(f) = \{1, 2, 5\}.$$

Attenzione! A patto di restringere l'insieme di partenza A, possiamo sempre supporre che A coincida con $D(f)$. D'ora in avanti quando scriviamo $f : A \to B$ sottindendiamo $D(f) = A$.

Definizione. Una funzione $f : A \to B$ è *iniettiva* se due punti distinti del dominio hanno immagini distinte

Definizione. Una funzione $f : A \to B$ è *suriettiva* se $I(f) = B$, ovvero tutti i punti di B sono immagine di punti di A attraverso la f.

Una funzione iniettiva e suriettiva si dice *biunivoca*. In tale caso possiamo costruire la funzione inversa $f^{-1} : B \to A$. La funzione inversa è definita nel seguente modo:

$$f^{-1}(b) = a : f(a) = b.$$

Esempio. Siano $A = \{1, 2, 3\}$ e $B = \{a, b, c\}$. Definiamo $f : A \to B$ come

$$f(1) = a, \quad f(2) = b, \quad f(3) = c.$$

Allora f è invertibile, e l'inversa è data dalla funzione $f^{-1} : B \to A$ definita da

$$f^{-1}(a) = 1, \quad f^{-1}(b) = 2, \quad f^{-1}(c) = 3.$$

Assumiamo ora di avere tre insiemi A, B e C, e due funzioni $f : A \to B$ e $g : B \to C$. Allora possiamo costruire la *funzione composta* $g \circ f : A \to C$ che trasporta ogni elemento $a \in A$ nell'elemento $g(f(a)) \in C$. Graficamente,

$$A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C.$$

Se la f e la g sono entrambe biunivoche, allora anche $g \circ f$ è biunivoca. È facile verificare che risulta

$$(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}.$$

6. Insiemi numerici

Assumiamo noti i seguenti insiemi numerici.

N : Insieme dei numeri naturali $\{0, 1, 2, 3, \ldots\}$
Z : Insieme dei numeri interi relativi $\{0, 1, -1, 2, -2, \ldots\}$
Q : Insieme dei numeri razionali, ossia i numeri della forma p/q, con $p, q \in \mathbf{Z}$ e $q \neq 0$

Sono definite in **Q** due operazioni ($+$ e $\cdot$) che soddisfano le seguenti proprietà:

S1. $\forall\, a, b \in \mathbf{Q}$ vale $a + b = b + a$.
S2. $\forall\, a, b, c \in \mathbf{Q}$ vale $(a + b) + c = a + (b + c)$.
S3. Esiste l'elemento neutro per la somma, chiamato 0, tale che $\forall\, a \in \mathbf{Q}$ vale $a + 0 = a$.
S4. $\forall\, a \in \mathbf{Q}$ esiste l'elemento inverso di a rispetto alla somma, chiamato $-a$, tale che $a + (-a) = 0$.

P1. $\forall\, a, b \in \mathbf{Q}$ vale $a \cdot b = b \cdot a$.
P2. $\forall\, a, b, c \in \mathbf{Q}$ vale $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$.
P3. Esiste l'elemento neutro per il prodotto, chiamato 1, tale che $\forall\, a \in \mathbf{Q}$ vale $a \cdot 1 = a$.
P4. $\forall\, a \in \mathbf{Q}$, $a \neq 0$ esiste l'elemento inverso di a rispetto al prodotto, chiamato a^{-1}, tale che $a \cdot a^{-1} = 1$.

SP. $\forall\, a, b, c \in \mathbf{Q}$ vale $(a + b) \cdot c = (a \cdot c) + (b \cdot c)$.

Un insieme dotato di due operazioni che soddisfano gli assiomi S1-S4, P1-P4, e SP si dice *campo*. Dunque **Q** è un campo rispetto alla somma e al prodotto usuale.

I numeri razionali vengono rappresentati mediante la notazione decimale, e possono essere visualizzati come punti ordinati sulla retta euclidea. Ricordiamo che la rappresentazione decimale dei numeri razionali ha un numero finito di cifre dopo la virgola, oppure un numero infinito di cifre periodico. Sono ad esempio numeri razionali

$$\frac{2}{5} = 0.4 \qquad \text{e} \qquad \frac{1}{3} = 0.333333\ldots := 0.\bar{3}.$$

Un caso a parte merita il periodo 9, in cui si hanno due possibili rappresentazioni dello stesso numero. Ad esempio $1 = 0.\bar{9}$.

È evidente che **Q** è un insieme ordinato rispetto alla relazione d'ordine $\leq$. Inoltre la relazione d'ordine è compatibile con la struttura di campo, ovvero

O1. $\forall\, a, b, c \in \mathbf{Q}$ se $a \leq b$ allora $a + c \leq b + c$.
O2. $\forall\, a, b, c \in \mathbf{Q}$ con $c > 0$ se $a \leq b$ allora $a \cdot c \leq b \cdot c$.

Un campo dotato di una relazione d'ordine che soddisfi O1 e O2 si dice *campo ordinato*. Dunque **Q** è un campo ordinato.

Il problema è ora il seguente: con **Q** abbiamo rappresentato tutti i numeri, oppure nella retta euclidea sono rimasti dei buchi?

Ad esempio, vorremmo certamente includere nella lista dei numeri a nostra disposizione quel numero che elevato al quadrato dà come risultato 2 (indicato con $\sqrt{2}$). Tuttavia tale numero non figura tra gli elementi di **Q**.

Teorema. $\sqrt{2}$ *non è razionale.*

Dimostrazione. Per assurdo sia $\sqrt{2} = p/q$. Possiamo assumere che p e q siano primi fra loro (altrimenti semplifichiamo la frazione). Allora abbiamo l'uguaglianza

$$2q^2 = p^2. \tag{$*$}$$

Dalla $(*)$ deduciamo che p è un numero pari (poichè il quadrato di un dispari è dispari), cioè $p = 2k$. L'uguaglianza $(*)$ diventa allora

$$2q^2 = 4k^2 \qquad \Rightarrow \qquad q^2 = 2k^2,$$

da cui ricaviamo che q^2 è pari e pertanto q è pari. Ma se entrambi p e q sono pari, non possono essere primi fra loro. Abbiamo quindi raggiunto l'assurdo, e il teorema è dimostrato.

Abbiamo dunque trovato dei "buchi" nei numeri razionali. D'altro canto, se pensiamo alla rappresentazione decimale è evidente che i numeri con un numero illimitato di cifre decimali non periodici non rientrano nei numeri razionali. L'idea è dunque di ampliare il campo ordinato dei razionali per avere una corrispondenza biunivoca tra numeri e retta euclidea.

Definizione. Diciamo allora numero reale un qualsiasi allineamento decimale (periodico e non). L'insieme dei reali è indicato con $\mathbf{R}$. I numeri irrazionali sono gli elementi di $\mathbf{R} \setminus \mathbf{Q}$.

Su $\mathbf{R}$ si estendono le operazioni di somma e prodotto, e continuano a valere tutte le proprietà di $\mathbf{Q}$ sopra elencate. Pertanto $\mathbf{R}$ è un campo ordinato.

Facciamo solo osservare che in realtà la costruzione del campo dei reali è assiomatica. La presentazione che abbiamo dato è di tipo intuitivo e pertanto poco rigorosa (e tuttavia sufficiente per i nostri scopi).

6. Distanza in R, intervalli di R

Si definisce *valore assoluto* (o *modulo*) di $x \in \mathbf{R}$ il numero reale positivo

$$|x| = \begin{cases} x & \text{se } x \geq 0 \\ -x & \text{se } x < 0. \end{cases}$$

Si noti che $|x| = 0$ se e solo se $x = 0$. dati $x, y \in \mathbf{R}$, la quantità $|x - y|$ misura la distanza (euclidea) tra i due numeri sulla retta euclidea. Vale inoltre la *disuguaglianza triangolare*, ovvero

$$|x + y| \leq |x| + |y|, \qquad \forall\, x, y \in \mathbf{R}.$$

Dati due numeri reali $a < b$, si definisce *intervallo* uno dei seguenti sottoinsiemi di $\mathbf{R}$:
$[a, b]$ (intervallo chiuso), ovvero $\{x \in \mathbf{R} : a \leq x \leq b\}$.
(a, b) (intervallo aperto), ovvero $\{x \in \mathbf{R} : a < x < b\}$.
$[a, b)$ (intervallo aperto a destra), ovvero $\{x \in \mathbf{R} : a \leq x < b\}$.
$(a, b]$ (intervallo aperto a sinistra), ovvero $\{x \in \mathbf{R} : a < x \leq b\}$.

La parentesi quadra indica che il punto appartiene all'insieme; la parentesi tonda indica che il punto non appartiene all'insieme.

Gli intervalli sopra indicati sono limitati. Sono invece intervalli illimitati quelli del tipo $[a, +\infty)$, $(a, +\infty)$, $(-\infty, b)$, $(-\infty, b]$, o l'intera retta $\mathbf{R} = (-\infty, +\infty)$.

Sottolineamo che $+\infty$ e $-\infty$ *non* sono numeri reali.

7. Densità di Q in R

L'insieme $\mathbf{Q}$ è *denso* in $\mathbf{R}$, cioè qualsiasi numero reale può essere approssimato con precisione arbitraria da un numero razionale. Tradotto in formule,

$$\forall\, x \in \mathbf{R} \quad \wedge \quad \forall\, \varepsilon > 0 \quad \exists\, p \in \mathbf{Q} : |p - x| < \varepsilon.$$

Analogamente $\mathbf{R} \setminus \mathbf{Q}$ è denso in $\mathbf{R}$. Chiaramente né $\mathbf{N}$ né $\mathbf{Z}$ sono densi in $\mathbf{R}$.

8. Estremo superiore e inferiore

Il campo ordinato $\mathbf{R}$ presenta un'ulteriore proprietà che è di fondamentale importanza nell'analisi. Ovvero, in parole povere, è "privo di buchi". Per caratterizzare meglio questa proprietà dobbiamo introdurre alcuni concetti.

Definizione. Un insieme $A \subset \mathbf{R}$ si dice *limitato* se esiste un numero positivo N tale che

$$-N \leq x \leq N, \qquad \forall\, x \in A.$$

A è *superiormente limitato* se

$$x \leq N, \qquad \forall\, x \in A,$$

inferiormente limitato se

$$-N \leq x, \qquad \forall\, x \in A.$$

Definizione. Un elemento x è *massimo* per A (indicato con $\max_A$) se

$$x \in A \qquad \text{e} \qquad y \leq x, \quad \forall\, y \in A.$$

Analogamente si definisce il *minimo* (indicato con $\min_A$).

Definizione. Un elemento x è *maggiorante* per A se

$$y \leq x, \quad \forall\, y \in A.$$

Analogamente si definisce il *minorante*.

L'insieme dei maggioranti di A può essere vuoto (se A non è superiormente limitato), oppure contenere infiniti elementi. Indichiamo con $\sup_A$ (estremo superiore di A) il più piccolo dei maggioranti (se esiste). Analogamente $\inf_A$ (estremo inferiore di A) è il più grande dei minoranti (se esiste).

Perché diciamo "se esiste"? Perché non è scontato che un insieme superiormente limitato (e quindi dotato di maggioranti) abbia estremo superiore. Se lavoriamo ad esempio in $\mathbf{Q}$, e consideriamo il sottoinsieme $A = \{p \in \mathbf{Q} : p^2 < 2\}$, abbiamo che tutti i razionali maggiori di $\sqrt{2}$ sono maggioranti; tuttavia non esiste il più piccolo maggiorante (in $\mathbf{Q}$), poiché se esistesse sarebbe maggiore di $\sqrt{2}$, e dalla densità di $\mathbf{Q}$ in $\mathbf{R}$ potremmo trovare un ulteriore razionale compreso tra $\sqrt{2}$ e quest'ultimo. Ovviamente il problema è rappresentato dal fatto che $\sqrt{2}$ è un buco nei razionali. In $\mathbf{R}$ tale problema non c'è. Vale infatti l'ulteriore proprietà

C. Ogni insieme $A \subset \mathbf{R}$ non vuoto e superiormente (inferiormente) limitato ammette estremo superiore (inferiore).

La proprietà C dei reali è nota come *Assioma di completezza*. Un campo ordinato che soddisfi C si dice *campo ordinato completo*. Pertanto $\mathbf{R}$ è un campo ordinato completo. È possibile dimostrare che ogni campo ordinato completo può essere identificato con $\mathbf{R}$.

Esempio. Siano $A = (0, 1]$. L'insieme A è limitato. $\inf_A = 0$, $\sup_A = \max_A = 1$, mentre non esiste $\min_A$.

9. Cardinalità degli insiemi numerici

Valgono le inclusioni insiemistiche $\mathbf{N} \subset \mathbf{Z} \subset \mathbf{Q} \subset \mathbf{R}$. Da un certo punto di vista è allora lecito affermare che, ad esempio, $\mathbf{Z}$ è più piccolo di $\mathbf{Q}$. Tuttavia, entrambi sono insiemi di cardinalità infinita, ovvero che contengono infiniti elementi. Che senso ha allora asserire che tra due insiemi infiniti uno è più grande (nel senso di più numeroso) di un altro? L'idea è quella di mutuare la procedura utilizzata per calcolare la cardinalità degli insiemi finiti. Cosa significa che un insieme A ha 5 elementi? Significa che possiamo costruire una corrispondenza biunivoca tra A e l'insieme $\{1, 2, 3, 4, 5\}$, etichettando con un numero da 1 a 5 ogni elemento di A. Dunque dal punto di vista del numero di elementi, due insiemi sono da ritenersi di uguale grandezza (equipotenti) se esiste una corrispondenza biunivoca tra loro. È facile vedere che $\mathbf{N}$ e $\mathbf{Z}$ sono equipotenti (basta considerare la corrispondenza biunivoca $0 \mapsto 0$, $1 \mapsto 1$, $2 \mapsto -1$, $3 \mapsto 2$, $4 \mapsto -2$ ecc.) È meno immediato (e tuttavia vero) che anche $\mathbf{N}$ e $\mathbf{Q}$ sono equipotenti. Notiamo che un insieme A è equipotente ad $\mathbf{N}$ se e solo se esiste una procedura che permette di elencare in successione (ovvero di contare) gli elementi di A. Gli insiemi equipotenti ad $\mathbf{N}$ si dicono avere cardinalità *numerabile*. Dunque $\mathbf{N}$, $\mathbf{Z}$ e $\mathbf{Q}$ hanno cardinalità numerabile. L'insieme $\mathbf{R}$ non può invece essere messo in corrispondenza biunivoca con $\mathbf{N}$. Tuttavia $\mathbf{N}$ può essere messo in corrispondenza biunivoca con un sottoinsieme di $\mathbf{R}$ (ad esempio lo stesso $\mathbf{N}$). Possiamo allora affermare che $\mathbf{R}$ ha una cardinalità maggiore della cardinalità numerabile (detta cardinalità continua). La cardinalità numerabile è la più piccola cardinalità infinita. L'*Ipotesi del continuo* asserisce che un sottoinsieme infinito di $\mathbf{R}$ può avere o cardinalità numerabile o cardinalità continua (non esistono cioè cardinalità intermedie). Ad esempio l'intervallo $(0, 1)$ ha cardinalità continua. Abbiamo quindi a che fare con due diverse gerarchie di infinito. Segnaliamo che si possono costruire insiemi con cardinalità anche maggiore della cardinalità continua, ad esempio $\mathcal{P}(\mathbf{R})$ ha cardinalità maggiore di $\mathbf{R}$, $\mathcal{P}(\mathcal{P}(\mathbf{R}))$ ha cardinalità maggiore di $\mathcal{P}(\mathbf{R})$, e così via. Il piano cartesiano $\mathbf{R} \times \mathbf{R}$ è invece equipotente ad $\mathbf{R}$ (la qual cosa è poco intuitiva).