Ingegneria Chimica, dei Materiali e delle Nanotecnologie

PRIMA PROVA IN ITINERE - 14 novembre 2017
Analisi Matematica I e Geometria (PRIMA PARTE)

LE RISPOSTE VANNO MOTIVATE.

1. Provare (usando la definizione) che $\lim_{n\to+\infty} n^2 = +\infty$.

2. Calcolare il limite $\lim_{x\to 1} \dfrac{\ln x}{\sin(x-1)}$

3. Provare che i grafici delle funzioni $f(x) = x^2$ e $g(x) = e^x$ si instersecano.

4. Disegnare un grafico qualitativo di $f(x) = x^{1/2} + x^{5/3}$.

5. Determinare se è derivabile in $x = 0$ la funzione $f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{se } x > 0 \\ 0 & \text{se } x = 0 \\ -x^3 & \text{se } x < 0 \end{cases}$.

6. Determinare $L > 0$ tale che, per ogni $x, y \in [1, 2]$, $|\ln x - \ln y| \leq L|x - y|$.

7. Calcolare il limite $\lim_{x\to 0} \dfrac{e^x - 1 - x}{\sqrt{1+x} - 1}$.

8. Determinare se la funzione $f(x) = (4x^2 + 8x)^{1/2}$ ammette asintoto obliquo per $x \to +\infty$.

9. Calcolare l'integrale definito $\displaystyle\int_{-1}^{1} x\big(\sin(x^2) + 2\big)dx$.

10. Determinare l'equazione della retta tangente al grafico della funzione $F(x) = \displaystyle\int_0^x \cos(t^2)dt$, nel punto di ascissa $x = 0$.

Ingegneria Chimica, dei Materiali e delle Nanotecnologie

PRIMA PROVA IN ITINERE - 14 novembre 2017
Analisi Matematica I e Geometria (SECONDA PARTE)

Teoria. (3 punti) Enunciare e dimostrare il Teorema di Fermat.

Esercizio 1. (10 punti) Studiare la seguente funzione e rappresentarne il grafico:

$$f(x) = 1 - x + \frac{x}{1 + \log^2 x}.$$

In particolare, si richiede di studiare la convessità e il comportamento per $x \to 0$.

SOLUZIONE. La funzione f è definita per $x > 0$. I limiti agli estremi del dominio sono

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = 1 \qquad \text{e} \qquad \lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \left(1 - \frac{\log^2 x}{1+\log^2 x}\, x\right) = -\infty.$$

Inoltre, poiché si ha

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \left(\frac{1}{x} - 1 + \frac{1}{1+\log^2 x}\right) = -1$$
$$\lim_{x\to+\infty} (f(x) + x) = \lim_{x\to+\infty} \left(1 + \frac{x}{1+\log^2 x}\right) = +\infty,$$

la funzione f non possiede asintoto obliquo per $x \to +\infty$.

Si osservi che la funzione f è superiormente limitata da 1, essendo

$$f(x) = 1 - \frac{\log^2 x}{1+\log^2 x}\, x \le 1 \qquad \forall x \in (0, +\infty).$$

La derivata prima è

$$f'(x) = -1 + \left(\frac{1-\log x}{1+\log^2 x}\right)^2 = -\frac{\log x\,(\log x + 1)\left(\log^2 x - \log x + 2\right)}{\left(1+\log^2 x\right)^2}.$$

Per analizzare il comportamento per $x \to 0$ calcoliamo il limite della derivata prima:

$$\lim_{x\to 0^+} f'(x) = -1.$$

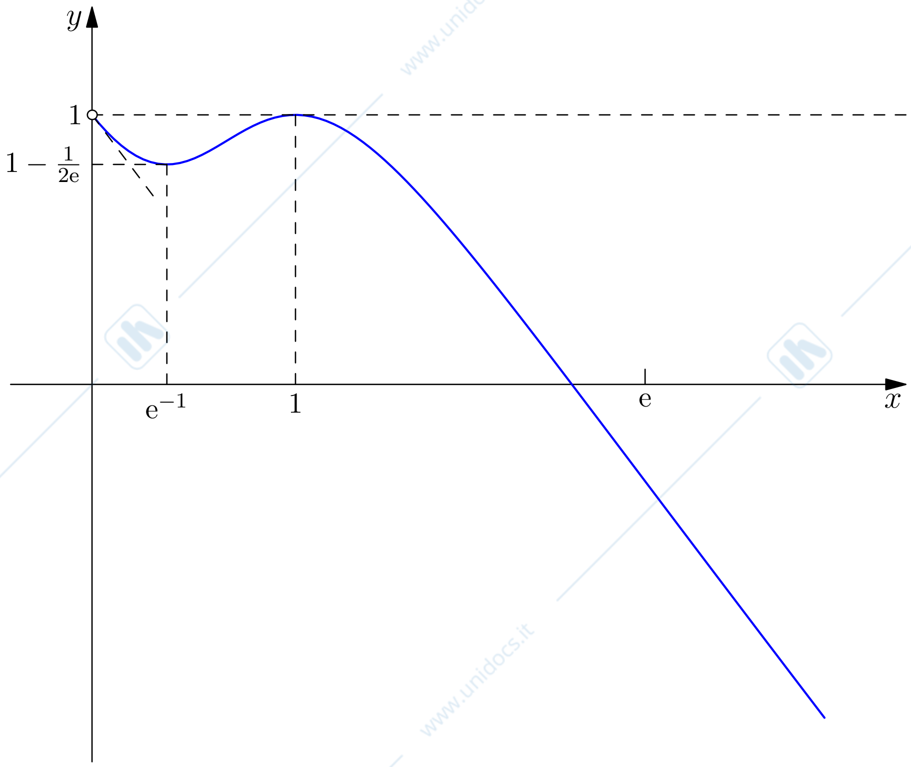
Poiché il polinomio $x^2 - x + 2$ ha sempre segno positivo (avendo discriminante negativo e termine noto positivo), si ha $f'(x) \ge 0$ se e solo se $\log x\,(\log x + 1) \le 0$, e questo accade se e solo se $e^{-1} \le x \le 1$. Più precisamente, $f'(x) > 0$ per $e^{-1} \le x \le 1$, $f'(x) < 0$ per $0 < x < e^{-1}$ e $x > 1$ e $f'(x) = 0$ per $x = e^{-1}$ e $x = 1$. In particolare, f possiede un punto di minimo relativo in e^{-1}, dato da $(e^{-1}, 1 - e^{-1}/2)$, e un punto di massimo assoluto in 1, dato da $(1, 1)$.

La derivata seconda è

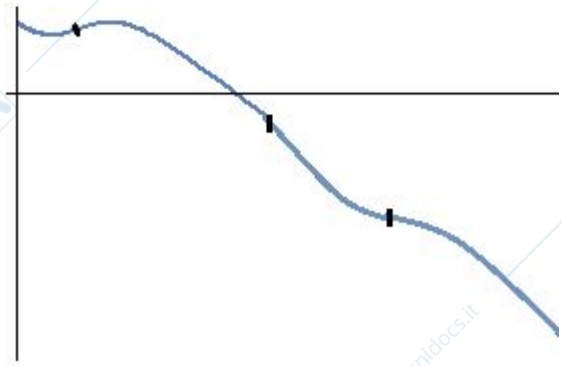
$$f''(x) = \frac{d}{dx}\left(\frac{1-\log x}{1+\log^2 x}\right)^2 = 2\frac{1-\log x}{1+\log^2 x}\,\frac{-\frac{1}{x}(1+\log^2 x) - \frac{2\log x}{x}(1-\log x)}{(1+\log^2 x)^2}$$
$$= -\frac{2(\log x - 1)\left(\log^2 x - 2\log x - 1\right)}{x\left(1+\log^2 x\right)^3}.$$

Poiché $x > 0$, si ha $f''(x) \ge 0$ se e solo se $(\log x - 1)\left(\log^2 x - 2\log x - 1\right) \le 0$, e questo accade se e solo se $0 < x \le e^{1-\sqrt{2}}$ e $e \le x \le e^{1+\sqrt{2}}$. Quindi la funzione presenta concavità verso l'alto (ossia è convessa) per $0 < x < e^{1-\sqrt{2}}$ ed $e < x < e^{1+\sqrt{2}}$, presenta concavità verso il basso (ossia è concava) per $e^{1-\sqrt{2}} < x < e$ e $x > e^{1+\sqrt{2}}$, e presenta tre flessi in $x_0 = e$ e $x_{1,2} = e^{1\pm\sqrt{2}}$.

Il grafico di f è



Nella figura seguente si sono evidenziati cambi di concavità e flessi di f.



Esercizio 2. (6 punti) Calcolare gli integrali

$$(i)\ \int_0^{\pi} \frac{dx}{x^2+9} \qquad (ii)\ \int_0^{1/2} \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}\,dx \qquad (iii)\ \int_0^{\pi} e^x \sin(2x)\,dx\,.$$

SOLUZIONE. Per il primo integrale, si ha

$$I_1 = \int_0^{\pi} \frac{\mathrm{d}x}{x^2+9} = \left[\frac{1}{3}\,\mathrm{artg}\,\frac{x}{3}\right]_0^{\pi} = \frac{1}{3}\,\mathrm{artg}\,\frac{\pi}{3}\,.$$

Per il secondo integrale, si ha

$$\begin{aligned} I_2 &= \int_0^{1/2} \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x = \int_0^{1/2} \frac{1-(1-x^2)}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x = \int_0^{1/2}\left(\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} - \sqrt{1-x^2}\right)\mathrm{d}x \\ &= \int_0^{1/2} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x - \int_0^{1/2} \sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x = \big[\,\mathrm{arsin}\,x\big]_0^{1/2} - \left[\frac{x}{2}\sqrt{1-x^2} + \frac{1}{2}\,\mathrm{arsin}\,x\right]_0^{1/2} \\ &= \mathrm{arsin}\,\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{8} - \frac{1}{2}\,\mathrm{arsin}\,\frac{1}{2} = \frac{1}{2}\,\mathrm{arsin}\,\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{8} = \frac{\pi}{12} - \frac{\sqrt{3}}{8}\,. \end{aligned}$$

Infine, per il terzo integrale, integrando ripetutamente per parti, si ha

$$\begin{aligned} I_3 &= \int_0^{\pi} \mathrm{e}^x \sin 2x\,\mathrm{d}x = \big[\mathrm{e}^x \sin 2x\big]_0^{\pi} - 2\int_0^{\pi} \mathrm{e}^x \cos 2x\,\mathrm{d}x = -2\int_0^{\pi} \mathrm{e}^x \cos 2x\,\mathrm{d}x \\ &= -2\big[\mathrm{e}^x \cos 2x\big]_0^{\pi} - 4\int_0^{\pi} \mathrm{e}^x \sin 2x\,\mathrm{d}x = -2(\mathrm{e}^{\pi}-1) - 4I_3 \end{aligned}$$

ossia

$$5I_3 = 2\,(1-\mathrm{e}^{\pi})$$

ossia

$$I_3 = \frac{2}{5}\,(1-\mathrm{e}^{\pi})\,.$$

Esercizio 3. (4 punti) Determinare il polinomio di McLaurin di quarto grado della funzione

$$g(x) = \cos(x)\cdot\sin(x^2)\,.$$

Determinare poi $g^{(4)}(0)$ e $g^{(5)}(0)$ (la derivata quarta e la derivata quinta di g calcolate in 0).

SOLUZIONE. Utilizzando le formule di MacLaurin delle funzioni elementari, si ha

$$g(x) = \cos x\cdot\sin x^2 = \left(1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o(x^4)\right)\big(x^2 + o(x^4)\big) = x^2 - \frac{x^4}{2} + o(x^4)\,.$$

Pertanto il polinomio di MacLaurin di quarto grado di g è

$$x^2 - \frac{x^4}{2}$$

e quindi $g^{(4)}(0) = -12$. Inoltre $g^{(5)}(0) = 0$, essendo la funzione pari.

Esercizio 4. (4 punti) Determinare il carattere delle successioni

$$a_n = \frac{n^2 + (-1)^n n}{|\cos n|}\,, \qquad b_n = \left(1 + \sin\frac{1}{n}\right)^{n+1}.$$

SOLUZIONE. Essendo $|\cos n| \le 1$ per ogni $n \in \mathbb{N}$, si ha

$$a_n = \frac{n^2 + (-1)^n n}{|\cos n|} \ge \frac{n^2 - n}{|\cos n|} \ge (n^2 - n) \to +\infty \qquad \text{per } n \to +\infty\,.$$

Quindi, per confronto, anche la successione a_n diverge a $+\infty$ per $n \to +\infty$.

Per la seconda successione, si ha

$$b_n = \left(1 + \sin\frac{1}{n}\right)^{n+1} = \mathrm{e}^{(n+1)\ln(1+\sin\frac{1}{n})}\,.$$

Per $n \to +\infty$, si ha $\frac{1}{n} \to 0$, $\sin\frac{1}{n} \to 0$ e

$$(n+1)\ln(1 + \sin\frac{1}{n}) \sim (n+1)\sin\frac{1}{n} \sim \frac{n+1}{n} \to 1\,.$$

Per la continuità della funzione esponenziale, si ha

$$\lim_{n\to+\infty} b_n = e\,.$$

Quindi la successione b_n è convergente.

Ingegneria Chimica, dei Materiali e delle Nanotecnologie

Analisi Matematica I e Geometria (PRIMA PARTE) - 28 giugno 2017

LE RISPOSTE VANNO MOTIVATE.

1. Risolvere il sistema $x + y = 0,\ 3x + 3y = 0$.

2. Calcolare l'integrale $\displaystyle\int_1^e \big(x \log x\big)\, dx$.

3. Stabilire se risulta biunivoca l'applicazione lineare $F(x, y, z) = (x + y, x + z, y + z)$.

4. Determinare il numero di soluzioni dell'equazione $\sinh x = 1 - x$ nell'intervallo $[0, 1]$.

5. Trovare il primo termine significativo del polinomio di McLaurin della funzione $f(x) = \sin^2(\sin x^2)$.

6. Determinare il coefficiente del termine x^3y^5 nello sviluppo di $(2x - y)^8$.

7. Determinare l'angolo formato da i due vettori $u = (1, 2, 3)$ e $v = (1, 3, -2)$.

8. Calcolare l'area del parallelogramma di vertici $A(0, 0)$, $B(1, 1)$, $C(3, 2)$, $D(2, 1)$.

9. Determinare (in forma trigonometrica) le radici quarte del numero complesso: $z = -16i$.

10. Calcolare il determinante della matrice $M = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & \pi \\ 0 & -1 & 1 & \pi \\ 0 & 0 & -1 & \pi \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.

Ingegneria Chimica, dei Materiali e delle Nanotecnologie

Analisi Matematica I e Geometria (SECONDA PARTE) - 28 giugno 2017

Teoria. (3 punti) Enunciare e dimostrare il teorema degli zeri per le funzioni continue.

Soluzione. Confrontare il libro di testo.

1. (8 punti) Si studi la funzione

$$f(x) = \frac{e^x - 1}{e^{|x|} + 1}$$

precisandone in particolare: dominio di definizione, limiti agli estremi del dominio di definizione, eventuali asintoti, derivata, derivabilità in $x = 0$, intervalli di monotonia, eventuali punti di estremo relativo o assoluto. Disegnare poi un grafico qualitativo della funzione, sapendo che il numero di flessi è il minimo compatibile con lo studio effettuato senza il calcolo della derivata seconda.

Soluzione. La funzione è definita su tutto $\mathbb{R}$. Vale

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{e^x - 1}{e^x + 1} & \text{se } x \geq 0 \\ \dfrac{e^x - 1}{e^{-x} + 1} & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

$f(x) > 0$ sse $e^x > 1$, quindi in $(0, +\infty)$, $f(x) < 0$ in $(-\infty, 0)$ e $f(0) = 0$.

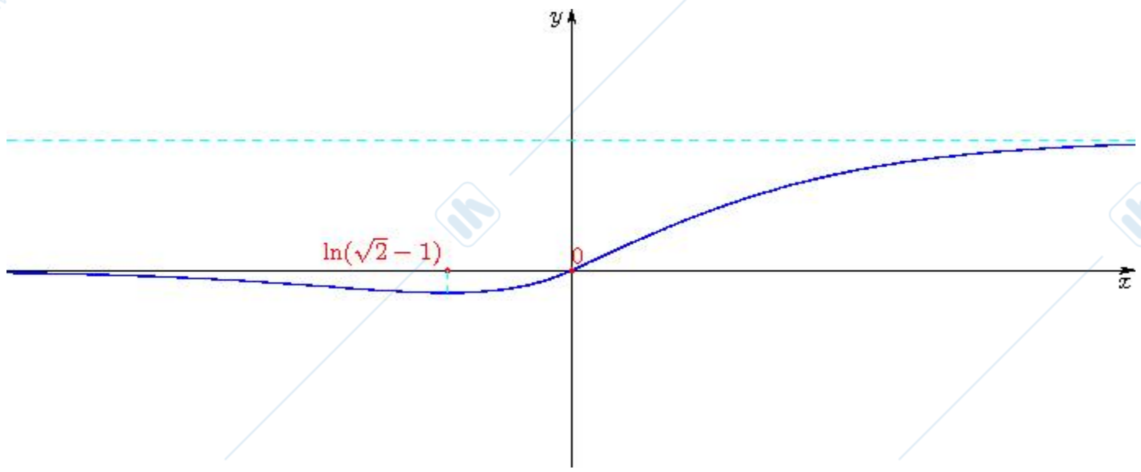
$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = 1, \qquad \lim_{x \to -\infty} f(x) = 0.$$

Calcoliamo la derivata prima:

$$f'(x) = \begin{cases} \dfrac{e^x(e^x+1) - e^x(e^x-1)}{(e^x+1)^2} = \dfrac{2e^x}{(e^x+1)^2} & \text{se } x > 0 \\ \dfrac{e^x(e^{-x}+1) + e^{-x}(e^x-1)}{(e^{-x}+1)^2} = \dfrac{2 + e^x - e^{-x}}{(e^{-x}+1)^2} = \dfrac{e^{2x} + 2e^x - 1}{e^x(e^{-x}+1)^2} & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

$$\lim_{x \to 0^+} f'(x) = \frac{1}{2}, \qquad \lim_{x \to 0^-} f'(x) = \frac{1}{2} \qquad \Longrightarrow \qquad f'(0) = \frac{1}{2} \quad (f \text{ derivabile in } 0).$$

$f'(x) > 0$ per $x \geq 0$ oppure per $x < 0$ e $e^{2x} + 2e^x - 1 > 0$, sse $x < 0$ e $e^x > -1 + \sqrt{2}$ sse $x \in (\ln(\sqrt{2} - 1), 0)$. Quindi f cresce in $(\ln(\sqrt{2} - 1), +\infty)$, f decresce in $(-\infty, \ln(\sqrt{2} - 1))$, $x = \ln(\sqrt{2} - 1)$ è punto di minimo assoluto, $f(\ln(\sqrt{2} - 1) = -(1 - \sqrt{2})^2$.



2. (5 punti) Determinare il polinomio di McLaurin di terzo grado della funzione $f(x) = e^{\sin x} - \cos x$

Soluzione. Calcolando lo sviluppo di McLaurin delle funzioni seno, coseno ed esponenziale otteniamo

$$\begin{aligned} e^{\sin x} - \cos x &= 1 + \sin x + \frac{(\sin x)^2}{2} + \frac{(\sin x)^3}{6} - 1 + \frac{x^2}{2} + o(x^3) \\ &= \left(x - \frac{x^3}{6} + o(x^3)\right) + \frac{(x - \frac{x^3}{6} + o(x^3))^2}{2} + \frac{(x - \frac{x^3}{6} + o(x^3))^3}{6} + \frac{x^2}{2} + o(x^3) \\ &= x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^2}{2} + o(x^3) = x + x^2 + o(x^3). \end{aligned}$$

3. (6 punti) Per ogni $k \in \mathbb{R}$, determinare stabilire se la matrice A_k qui sotto rappresenta una traformazione iniettiva e/o suriettiva

$$A_k = \begin{pmatrix} 1 & k & k \\ k & 1 & k \\ k & k & 1 \end{pmatrix}.$$

Nel caso $k = 1$, determinare poi nucleo e immagine della trasformazione lineare rappresentata da A_1.

Soluzione. $\det A_k = 1 - k^2 - k(k - k^2) + k(k^2 - k) = (k-1)^2(2k+1) \neq 0$ sse $k \neq 1, -1/2$, in tali casi la trasformazione lineare è iniettiva e suriettiva.

Nel caso $k = 1$,

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

$\mathrm{rk} A_1 = 1$. Dal teorema di nullità più rango si ottiene che la dimensione del nucleo è 2 la dimensione dell'immagine è 1. L'immagine è generata dal vettore $(1, 1, 1)$, quindi

$$\mathrm{Im} L = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \ : \ \alpha \in \mathbb{R} \right\}.$$

Il nucleo è l'insieme delle soluzioni del sistema omogeneo

$$\begin{cases} x + y + z = 0 \\ x + y + z = 0 \\ x + y + z = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x = t \\ y = s \\ z = -t - s \end{cases}, \quad t, s \in \mathbb{R}.$$

Quindi

$$\mathrm{Ker} L = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = t \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \ : \ t, s \in \mathbb{R} \right\}.$$

4. (5 punti) Si considerino i punti $A(-1, 1, 2)$ e $B(1, 3, 4)$.

(*i*) Determinare un'equazione parametrica della retta r che passa per A e B.

(*ii*) Determinare l'equazione cartesiana del piano p ortogonale a r e passante per il punto medio di A e B.

(*iii*) Determinare la distanza tra l'origine e la retta r, e tra l'origine e il piano p.

Soluzione. (i) Un'equazione parametrica di r è:

$$r \ : \ \begin{cases} x = -1 + 2t \\ y = 1 + 2t \\ z = 2 + 2t \end{cases}, \qquad t \in \mathbb{R}.$$

(ii) Il punto medio tra A e B è $P = (0, 2, 3)$ e l'equazione cartesiana di p:

$$x + y - 2 + z - 3 = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad x + y + z - 5 = 0.$$

(iii) Per calcolare la distanza di O dal piano calcoliamo il prodotto scalare tra $\overline{OP}$ e il versore normale al piano $\mathbf{n} = (1/\sqrt{3}, 1/\sqrt{3}, 1/\sqrt{3})$:

$$dist(O, p) = |(0, 2, 3) \cdot (1/\sqrt{3}, 1/\sqrt{3}, 1/\sqrt{3})| = 5/\sqrt{3}.$$

Per calcolare la distanza di O da r calcoliamo

$$\overline{OA} \wedge \overline{AB} = \begin{pmatrix} -2 \\ 6 \\ -4 \end{pmatrix} \implies dist(O, r) = \frac{|\overline{OA} \wedge \overline{AB}|}{|\overline{AB}|} = \sqrt{\frac{14}{3}}.$$

NB. C'erano alcuni modi alternativi per procedere.

Ingegneria Chimica, dei Materiali e delle Nanotecnologie

Analisi Matematica I e Geometria (PRIMA PARTE) - 4 settembre 2017

Cognome:	**Nome:**	**Matricola:**

Prescritto	**Teoria**	**Es.1**	**Es.2**	**Es.3**	**Es.4**	**Totale**

LE RISPOSTE VANNO MOTIVATE.

1. Calcolare il limite
$$\lim_{x\to 1^+} \frac{x-1}{\sqrt{1+\ln x}-1}.$$

2. Al variare di $\alpha > 0$ calcolare il limite
$$\lim_{n\to\infty} n^\alpha \left(\frac{1}{n} - \sin\frac{1}{n}\right).$$

3. Determinare lo sviluppo di McLaurin al terzo ordine della funzione $f(x) = e^{x^2} - \cos x^2$.

4. Calcolare l'integrale $\displaystyle\int_0^1 \sqrt{1-x^2}\, dx$.

5. Stabilire se la funzione $f(x) = \cosh x - e^{-x}$ attraversa l'asse x.

www.unidocs.it - Appunti e dispense per superare i tuoi esami universitari

www.unidocs.it - Appunti e dispense per superare i tuoi esami universitari

6. Determinare le soluzioni complesse dell'equazione $z^2 = \overline{z}$.

7. Determinare le radici terze del numero complesso $z = 1$.

8. Determinare le soluzioni del sistema: $x - y = 0,\ 3x - 3y = 0$.

9. Determinare gli autovalori della matrice $M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ e & 0 & \pi \end{pmatrix}$.

10. Determinare l'immagine dell'applicazione lineare $L(x, y, z) = (x + y, z, x + y)$.

Ingegneria Chimica, dei Materiali e delle Nanotecnologie

Analisi Matematica I e Geometria (SECONDA PARTE) - 4 settembre 2017

Teoria. (3 punti) Enunciare e dimostrare il teorema di monotonia.

1. (8 punti) Si studi la funzione
$$f(x) = \sqrt{2 - e^{x|x|}}$$
precisandone in particolare: dominio di definizione, segno, limiti agli estremi del dominio di definizione, eventuali asintoti, derivata, intervalli di monotonia, eventuali punti di estremo relativo o assoluto, punti di non derivabilità. In base allo studio svolto <u>senza</u> calcolare la derivata seconda, qual è il numero minimo di flessi di f? Disegnare poi un grafico qualitativo della funzione.

SOLUZIONE.

Dominio $(-\infty, \sqrt{\ln 2}]$.

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \sqrt{2}\,, \qquad \lim_{x\to\sqrt{\ln 2}} f(x) = f(\sqrt{\ln 2}) = 0\,.$$

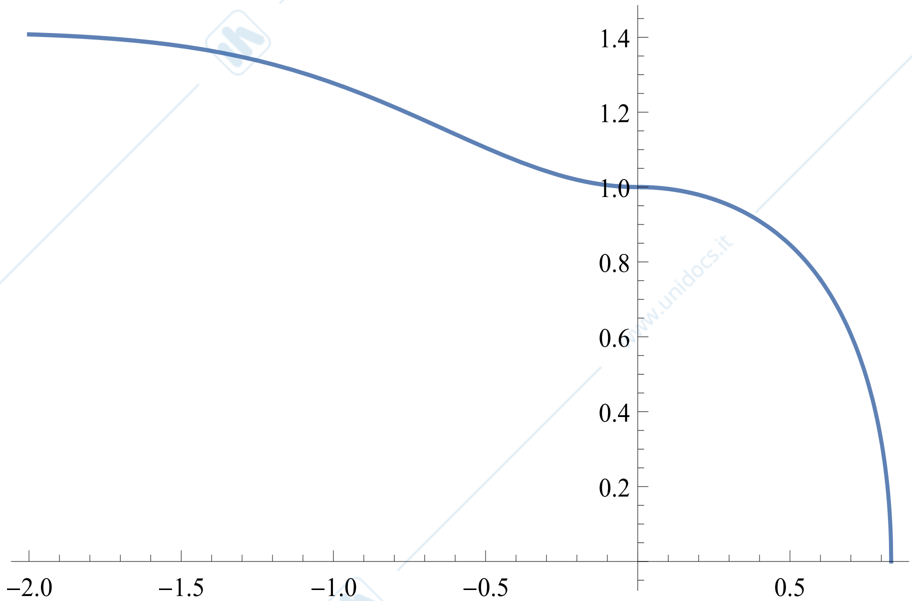
Asintoto orizzontale $y = \sqrt{2}$ per $x \to -\infty$.

$$f'(x) = \begin{cases} -\frac{x\,e^{x^2}}{\sqrt{2-e^{x^2}}} & \text{se } 0 \le x < \sqrt{\ln 2} \\ \frac{x\,e^{-x^2}}{\sqrt{2-e^{-x^2}}} & \text{se } x \le 0\,. \end{cases}$$

Pertanto, f è derivabile e si annulla se e solo se $x = 0$, senza cambiare segno, f è strettamente decrescente sul suo intervallo di definizione, f non è derivabile in $x = \sqrt{\ln 2}$ e in tale punto vi è una semi-tangente verticale.

C'è sicuramente un flesso per $x = 0$ (si annulla f' senza cambiare segno) e vi è sicuramente un altro flesso nell'intervallo $(-\infty, 0)$.

Il grafico qualitativo è riportato di seguito.



2. (4 punti) Calcolare i seguenti integrali

$$\int_0^1 \arctan(\sqrt{x}+1)\,dx, \qquad \int_0^{\ln 2} \sqrt{e^{2x}-1}\,dx.$$

SOLUZIONE.

Con il cambio di variabile $t=\sqrt{x}+1$ e integrando per parti, si ottiene:

$$\begin{aligned}\int_0^1 \arctan(\sqrt{x}+1)\,dx &= 2\int_1^2 (t-1)\arctan t\,dt = -\int_1^2 \frac{(t-1)^2}{1+t^2}\,dt + \left[(t-1)^2\arctan t\right]_1^2 \\ &= \int_1^2 \left(\frac{2t}{1+t^2}-1\right)dt + \left[(t-1)^2\arctan t\right]_1^2 \\ &= \left[\ln(1+t^2)-t+(t-1)^2\arctan t\right]_1^2 = -1+\ln\frac{5}{2}+\arctan 2\,.\end{aligned}$$

Con il cambio di variabile $t=\sqrt{e^{2x}-1}$ e integrando per parti, si ottiene:

$$\int_0^{\ln 2}\sqrt{e^{2x}-1}\,dx = \int_0^{\sqrt{3}} \frac{t^2}{1+t^2}\,dt = \int_0^{\sqrt{3}}\left(1-\frac{1}{1+t^2}\right)dt = \left[t-\arctan t\right]_0^{\sqrt{3}} = \sqrt{3}-\frac{\pi}{3}\,.$$

3. (6 punti) Al variare $k \in \mathbb{R}$ deteminare se la matrice A_k è diagonalizzabile

$$A_k = \begin{pmatrix} 1 & k & 1 \\ 0 & k & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Nel caso A_k diagonalizzabile, determinare una matrice diagonale simile ad A_k e la relativa matrice di passaggio.

SOLUZIONE.

Si ha $\det(A_k - \lambda I) = \lambda(\lambda - 2)(k - \lambda)$ e gli autovalori di A_k sono $\{0, 2, k\}$. Se $k \neq 0$ e $k \neq 2$, gli autovalori sono semplici e dunque A_k è diagonalizzabile.

Se $k = 0$, l'autovalore 0 è doppio e si ha

$$A_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Siccome A_0 è simmetrica risulta anche diagonalizzabile.

Se $k = 2$, l'autovalore 2 è doppio e si ha

$$A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Un vettore $u(x, y, z)$ soddisfa $A_2 u = 2u$ se e solo se $y = 0$ e $x = z$; l'autospazio è quindi generato dal vettore $(1, 0, 1)$ e ha dimensione 1. Pertanto, A_2 non è diagonalizzabile.

Per le matrici diagonalizzabili A_k (con $k \neq 2$), una matrice diagonale simile è

$$M_k = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & k & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Gli autovettori associati agli autovalori 0, k, 2, sono, rispettivamente

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} k-1 \\ k-2 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{se } k \neq 0, 2, \qquad \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{se } k = 0.$$

Di conseguenza, le matrici di passaggio sono

$$\begin{pmatrix} 1 & k-1 & 1 \\ 0 & k-2 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{se } k \neq 0, 2, \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{se } k = 0.$$

4. (6 punti) Si considerino i vettori

$$\mathbf{u} = (1, 0, \alpha), \qquad \mathbf{v} = (0, -1, \alpha), \qquad \mathbf{w} = (\alpha, 0, 1)$$

con $\alpha \in \mathbb{R}$.

(a) Determinare per quali α i vettori $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}$ sono linearmente indipendenti.

(b) Nei due casi in cui i vettori $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}$ risultano complanari, determinare l'equazione del piano che li contiene e passa per l'origine e determinare l'equazione parametrica della retta normale a tale piano e passante per il punto $(2, 0, 1)$.

(c) dimostrare che le due rette trovate nel punto precedente sono complanari e calcolare l'angolo da loro formato.

SOLUZIONE.

(a) Risulta

$$\det(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & \alpha \\ 0 & -1 & 0 \\ \alpha & \alpha & 1 \end{vmatrix} = \alpha^2 - 1\,,$$

perciò i vettori sono linearmente indipendenti se e solo se $\alpha \neq \pm 1$.

(b) Se i vettori sono complanari, possiamo prenderne una qualunque coppia non proporzionale per determinare la direzione normale al piano; risulta $\mathbf{u} \wedge \mathbf{v} = \alpha\mathbf{i} - \alpha\mathbf{j} - \mathbf{k}$ e i piani passanti per l'origine hanno equazione

$$x - y - z = 0 \quad \text{se } \alpha = 1\,, \qquad x - y + z = 0 \quad \text{se } \alpha = -1\,.$$

Le equazioni parametriche delle rette richieste sono (per esempio!)

$$r_1 \begin{cases} x = 2 + t \\ y = -t \\ z = 1 - t \end{cases} \qquad r_2 \begin{cases} x = 2 + t \\ y = -t \\ z = 1 + t\,. \end{cases}$$

(c) Dato che le rette r_1 e r_2 si intersecano nel punto $(2, 0, 1)$, sono necessariamanete complanari. L'angolo α che formano è lo stesso dei loro vettori direttori $\mathbf{u}_1(1, -1, -1)$ e $\mathbf{u}_2(1, -1, 1)$; pertanto

$$\cos\alpha = \frac{\mathbf{u}_1 \cdot \mathbf{u}_2}{|\mathbf{u}_1| \cdot |\mathbf{u}_2|} = -\frac{1}{3} \implies \alpha = \arccos\left(-\frac{1}{3}\right)\,.$$

Ingegneria Chimica, dei Materiali e delle Nanotecnologie

Analisi Matematica I e Geometria (PRIMA PARTE) - 31 gennaio 2017

LE RISPOSTE VANNO MOTIVATE.

1. Risolvere il sistema $2x + 3y = 1$, $x + 2y = 1$.

2. Scrivere le equazioni parametriche della retta passante per i punti $A(1, 1, 1)$ e $B(2, 2, 2)$.

3. Risolvere in $\mathbb{C}$: $z^2 + 5iz - 7 - i = 0$.

4. Scrivere in forma esponenziale le radici cubiche di i.

5. Calcolare la distanza tra il punto $A(1, -1, 1)$ e il piano di equazione $x - 2y + 3z = 0$.

6. Stabilire se la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ è invertibile .

7. Determinare il rango della matrice $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$.

8. Siano A e B le matrici dei due punti precedenti. Ove possibile, calcolare $A \cdot B$ e $B \cdot A$.

9. Stabilire se la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & \pi \end{pmatrix}$ è diagonalizzabile.

10. Determinare il nucleo dell'applicazione lineare $L : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ definita da $L(x, y, z) = (x + y, 2x + 2y, 3x + 3y)$.

Ingegneria Chimica, dei Materiali e delle Nanotecnologie

Analisi Matematica I e Geometria (SECONDA PARTE) - 31 gennaio 2017

Teoria. (3 punti) Dare la definizione di matrice diagonalizzabile. Enunciare una condizione necessaria e sufficiente per la diagonalizzabilità.

Soluzione. Confrontare il libro di testo.

1. (6 punti) Risolvere in $\mathbb{C}$ l'equazione

$$\mathrm{Im}\left(1+\frac{1}{z}\right)=0, \tag{1}$$

dove Im indica la parte immaginaria del numero. Disegnare nel piano complesso i seguenti insiemi:

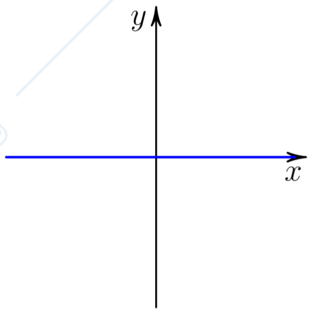
$$A=\{z\in\mathbb{C}\ :\ z \text{ risolve } (1)\},\qquad B=\left\{w=\frac{1}{\sqrt{2}}(1+i)z\ :\ z\in A\right\},\qquad C=\{\xi=w+i\ :\ w\in B\}.$$

Soluzione. Sia $z=x+iy$. Per $z\neq 0$ definiamo il numero complesso

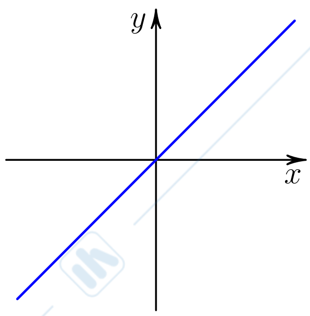
$$w=1+\frac{1}{z}=\frac{z+1}{z}=\frac{x+iy+1}{x+iy}=\frac{(x+iy+1)(x-iy)}{x^2+y^2}=\frac{x^2+y^2+x}{x^2+y^2}+i\frac{-y}{x^2+y^2}.$$

$\mathrm{Im}w=0$ sse $y=0$. Le soluzioni di (1) sono i complessi $z=x$, al variare di $x\in\mathbf{R}\setminus\{0\}$.

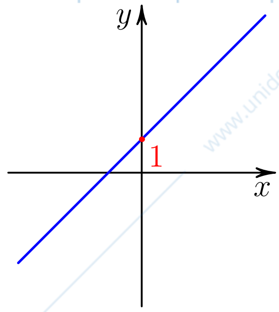
L'insieme delle soluzioni A:



L'insieme B si ottiene ruotando A di un angolo $\theta=\pi/4$:



L'insieme C si ottiene traslando l'insieme B di un'unità lungo l'asse y:



2. (6 punti) Sia data l'applicazione lineare $L : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ definita da

$$L(x, y, z) = (x + y + 2z, x + z, 2x + 2y + 4z, x + z).$$

(a) Determinare se L è iniettiva, suriettiva, biunivoca.

(b) Dimostrare che $\mathbf{v} = (-1, 2, -2, 2) \in \mathrm{Im}L$ e trovare le sue controimmagini.

(c) Trovare un vettore $\mathbf{w} \in \mathbb{R}^4$ tale che $\mathbf{w} \notin \mathrm{Im}L$.

Soluzione.

(a) Associamo ad L la matrice rappresentativa

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 4 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

La sottomatrice $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ ha deteminante non nullo e la terza colonna della matrice è somma delle prime due colonne. Quindi $\mathrm{rk}A = 2$. Dal teorema di nullità più rango si ottiene che la dimensione del nucleo è 1 la dimensione dell'immagine è 2, l'applicazione L non è iniettiva, non è suriettiva, non è biunivoca.

(b) Il vettore $\mathbf{v} = (-1, 2, -2, 2) \in \mathrm{Im}L$, infatti la matrice

$$[A|\mathbf{v}] = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 4 & -2 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

ha rango 2. Le controimmagini di $\mathbf{v}$ sono le soluzioni del sistema

$$\begin{cases} x + y + 2z = -1 \\ x + z = 2 \\ 2x + 2y + 4z = -2 \\ x + z = 2 \end{cases} \iff \begin{cases} x + y + 2z = -1 \\ x + z = 2 \end{cases} \iff \begin{cases} y = t - 2 - 2t - 1 \\ x = -t + 2 \\ z = t \end{cases},$$

quindi i vettori $(x, y, z) = (-t + 2, -t - 3, t)$ al variare di $t \in \mathbf{R}$.

(c) Il vettore $\mathbf{w} = (1,0,0,0) \notin \mathrm{Im}L$, infatti la matrice

$$[A|\mathbf{w}] = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 4 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

ha rango 3, la sottomatrice

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \end{bmatrix}.$$

ha determinate non nullo.

3. (6 punti) Data la matrice

$$A = \begin{bmatrix} 1 & k & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & k & 5 \end{bmatrix}.$$

determinarne autovalori ed autovettori al variare di $k \in \mathbb{R}$. Per quali valori di k la matrice A è diagonalizzabile?

Soluzione. Calcoliamo gli autovalori della matrice, come radici del polinomio caratteristico:

$$P(\lambda) = \det(A - \lambda I) = \det \begin{bmatrix} 1-\lambda & k & 1 \\ 0 & 1-\lambda & 0 \\ 0 & k & 5-\lambda \end{bmatrix} = (1-\lambda)(1-\lambda)(5-\lambda) = 0$$

sse

$$\lambda = 1, 5.$$

L'autovalore $\lambda = 5$ ha molteplicità algebrica 1 quindi è regolare.

L'autovalore $\lambda = 1$ ha molteplicità algebrica 2. Per determinare se è regolare calcoliamo la sua molteplicità geometrica $d_1 = 3 - \mathrm{rango}(A - I)$. Essendo

$$A - I = \begin{bmatrix} 0 & k & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & k & 4 \end{bmatrix},$$

il rango è 2 sse $k \neq 0$. In questo caso l'autovalore 1 non è regolare, e la matrice A diagonalizzabile. Se $k = 0$ il rango è 1, l'autovalore 1 è regolare e la matrice A è diagonalizzabile.

Per determinare gli autovettori raltivi a $\lambda = 5$ risolviamo il sistema

$$\begin{cases} -4x + ky + z = 0 \\ -4y = 0 \\ ky = 0 \end{cases} \qquad \text{sse} \qquad \begin{cases} x = t \\ y = 0 \\ z = 4t \end{cases}$$

Otteniamo che gli autovettori relativi a $\lambda = 5$ sono i vettori $(x, y, z) = (t, 0, 4t)$ al variare di $t \in \mathbf{R} \setminus \{0\}$.

Per determinare gli autovettori raltivi a $\lambda = 1$ risolviamo il sistema

$$\begin{cases} ky + z = 0 \\ ky + 4z = 0 \end{cases} \qquad \text{sse} \qquad k = 0,\ z = 0 \ \text{ oppure } \ k \neq 0,\ y = z = 0.$$

Otteniamo che gli autovettori relativi a $\lambda = 1$, nel caso $k = 0$, sono i vettori $(x, y, z) = (t, s, 0)$ al variare di $t, s \in \mathbf{R}$, con $(t, s) \neq (0, 0)$; nel caso $k \neq 0$ sono i vettori $(x, y, z) = (t, 0, 0)$ al variare di $t \in \mathbf{R} \setminus \{0\}$.

4. (6 punti) Sia dato il piano π di equazione cartesiana $x + y - z = 0$.

   (a) Determinare la retta r_1 ortogonale al piano π e passante per il punto $A = (1, 0, 0)$.

   (b) Determinare la retta r_2 simmetrica di r_1 rispetto al punto $B = (1, 1, 1)$.

   (c) Stabilire se la retta di equazioni cartesiane $x = y = z$ interseca π.

Soluzione.

(a) Il piano π è ortogonale al vettore $\mathbf{n} = (1, 1, -1)$, quindi l'equazione parametrica di r_1 è

$$\begin{cases} x = 1 + t \\ y = t \\ z = -t \end{cases}$$

(b) La retta r_2 è parallela a r_1 e passa per il punto A' simmetrico di A rispetto al punto $B = (1, 1, 1)$. Essendo $\overline{AB} = \overline{BA'}$, si ottiene $A' = 2B - A$, da cui $A' = (2 - 1, 2, 2) = (1, 2, 2)$. L'equazione parametrica di r_2 è

$$\begin{cases} x = 1 + t \\ y = 2 + t \\ z = 2 - t \end{cases}$$

(c) La retta ed il piano passano per l'origine, quindi la loro intersezione non è vuota.

Ingegneria Chimica, dei Materiali e delle Nanotecnologie

Analisi Matematica I e Geometria (PRIMA PARTE) - 16 febbraio 2017

LE RISPOSTE VANNO MOTIVATE.

1. Risolvere il sistema $x + 2y = 0,\ 3x + y = 0$.

2. Calcolare l'integrale $\displaystyle\int_{-1}^{1} \Big(x\cosh(x^3) - x|x|\Big)\, dx$.

3. Determinare gli autovalori della matrice $M = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 9 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$.

4. Determinare il nucleo dell'applicazione lineare $\Phi(x, y) = (x + y, x + 2y, x + 3y)$.

5. Risolvere l'equazione in campo complesso: $z^2 = i|z|$.

6. Provare che una funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ che soddisfa $|f(x)-f(y)| \le |x-y|^2$, per ogni $x, y \in \mathbb{R}$, è costante.

7. Determinare il polinomio di McLaurin di ottavo grado della funzione $f(x) = \sin x^3$.

8. Data la funzione integrale $F(x) = \int_0^x \sin(t^2)dt$, calcolare $F'(1)$.

9. Determinare l'equazione del piano passante per i punti $A = (0, 0, 0)$, $B = (1, 1, 1)$, $C = (1, 0, 1)$.

10. Calcolare $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \left(1 - \frac{1}{n^2}\right)^n$.

Ingegneria Chimica, dei Materiali e delle Nanotecnologie

Analisi Matematica I e Geometria (SECONDA PARTE) - 16 febbraio 2017

Teoria. (3 punti) Enunciare e dimostrare il teorema del valor medio di Lagrange.

Soluzione. Confrontare il libro di testo.

1. (8 punti) Si studi la funzione

$$f(x) = 2x + 3\sqrt[3]{(e^x-2)^2}$$

precisandone in particolare: dominio di definizione, limiti agli estremi del dominio di definizione, eventuali asintoti, derivata, intervalli di monotonia, eventuali punti di estremo relativo o assoluto, limiti della derivata, eventuali punti di non derivabilità, derivata seconda, convessità. Disegnare poi un grafico qualitativo della funzione.

Soluzione. La funzione è definita su tutto $\mathbb{R}$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty, \qquad \lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty.$$

Ricerca di asintoti obliqui:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{e^{\frac{2x}{3}}}{x} = +\infty.$$

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = 2 \quad \text{e} \quad \lim_{x\to-\infty} (f(x)-2x) = 3\sqrt[3]{4},$$

la retta di equazione $y = 2x + 3\sqrt[3]{4}$ è asintoto obliquo per $x \to -\infty$. Calcoliamo la derivata prima:

$$f'(x) = 2 + 2\frac{e^x}{\sqrt[3]{e^x-2}}.$$

La derivata di f non esiste in $x = \ln 2$ che risulta una cuspide, infatti

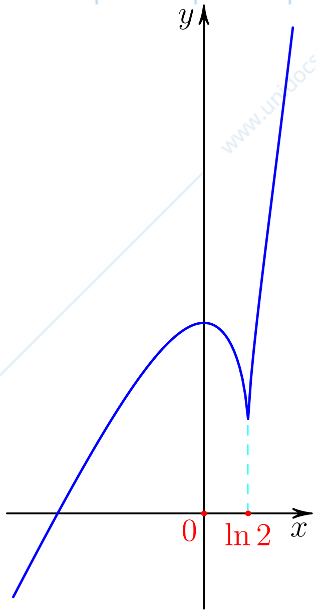
$$\lim_{x\to\ln 2^+} f'(x) = +\infty, \qquad \lim_{x\to\ln 2^-} f'(x) = -\infty.$$

$$f'(x) > 0 \iff \frac{e^x}{\sqrt[3]{e^x-2}} > -1.$$

In $(\ln 2, +\infty)$, $\sqrt[3]{e^x-2} > 0$, quindi f' è positiva ed f crescente. In $(-\infty, \ln 2)$, $f'(x) > 0$ sse $e^x < -\sqrt[3]{e^x-2} = \sqrt[3]{2-e^x}$. Si ottiene che $f'(0) = 0$, $f'(x) > 0$ in $(-\infty, 0)$ (ove f risulta crescente) e $f'(x) < 0$ in $(0, \ln 2)$ (ove f risulta decrescente). Il punto $x_0 = 0$ è punto di massimo locale (non assoluto) per f.

$$f''(x) = 2\frac{e^x}{\sqrt[3]{e^x-2}} - \frac{2}{3}\frac{e^{2x}}{\sqrt[3]{(e^x-2)^4}} = \frac{2}{3}\frac{e^x}{\sqrt[3]{(e^x-2)^4}}(2e^x-6).$$

$f''(x) > 0$ in $(\ln 3, +\infty)$ ove f risulta convessa. $f''(x) < 0$ in $(-\infty, \ln 2) \cup (\ln 2, \ln 3)$ ove f risulta concava. Il punto $x_1 = \ln 3$ è di flesso.



2. (5 punti) Calcolare gl'integrali

$$(i)\ \int_1^e \log^2 x\, dx\ , \qquad (ii)\ \int_0^1 \sqrt{e^x - 1}\, dx\ .$$

Soluzione. (i) Integrando per parti otteniamo

$$\int \log^2 x\, dx = x \log^2 x - \int \frac{x 2 \log x}{x}\, dx = x \log^2 x - 2x \log x + \int 2\, dx$$
$$= x \log^2 x - 2x \log x + 2x + c = F(x) + c,$$

da cui

$$\int_1^e \log^2 x\, dx = F(e) - F(1) = e - 2.$$

(ii) Con la sostituzione $\sqrt{e^x - 1} = t$, otteniamo

$$\int \sqrt{e^x - 1}\, dx = \int t \frac{2t}{t^2 + 1}\, dt = 2t - 2 \arctan t + c = 2\sqrt{e^x - 1} - 2 \arctan\left(\sqrt{e^x - 1}\right) + c = F(x) + c,$$

da cui

$$\int_0^1 \sqrt{e^x - 1}\, dx = F(1) - F(0) = 2\sqrt{e - 1} - 2 \arctan\left(\sqrt{e - 1}\right).$$

3. (6 punti) Sia r la retta di $\mathbf{R}^3$ che congiunge $A(2, 3, 1)$ con $B(1, 2, 3)$ e sia s la retta intersezione dei piani d'equazioni $3x - y + z = 4$ e $x + y - k = 0$.
Studiare la posizione reciproca di r e s al variare del parametro k.

Soluzione. Le equazioni parametriche delle rette r e s sono:

$$r\ :\quad \begin{cases} x = 2 - t \\ y = 3 - t \\ z = 1 + 2t \end{cases}, \qquad t \in \mathbb{R};$$

e

$$s \ : \quad \begin{cases} x = \tau \\ y = k - \tau \\ z = 4 + k - 4\tau \end{cases}, \qquad \tau \in \mathbb{R}.$$

Le rette non sono parallele per nessun valore di k, per vedere se sono sghembe o si intersecano in un punto analizziamo la risolubilità del sistema

$$\begin{cases} 2 - t = \tau \\ 3 - t = k - \tau \\ 1 + 2t = 4 + k - 4\tau \end{cases} \qquad \iff \qquad \begin{cases} t + \tau = 2 \\ t - \tau = 3 - k \\ 2t + 4\tau = 3 + k \end{cases}$$

Essendo

$$rk \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} = rk \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 3-k \\ 2 & 4 & 3+k \end{bmatrix}.$$

per ogni $k \in \mathbb{R}$, le rette si intersecano per ogni $k \in \mathbb{R}$.

4. (5 punti) Sia $L : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ l'applicazione lineare rappresentata dalla matrice

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

- Determinare il nucleo e l'immagine di L.
- Stabilire se vi sono rette invarianti tramite L.
- Determinare un vettore $\mathbf{u} \notin \ker L$ tale che $L\mathbf{u} \perp \mathbf{u}$.

Soluzione. • La sottomatrice $\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$ ha deteminante non nullo e il determinante di A è nullo. Quindi $\mathrm{rk}A = 2$. Dal teorema di nullità più rango si ottiene che la dimensione del nucleo è 1 la dimensione dell'immagine è 2. L'immagine di L è generata dalle prime due colonne della matrice A:

$$\mathrm{Im}L = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \ : \ \alpha, \beta \in \mathbb{R} \right\}.$$

Il nucleo di L è l'insieme delle soluzioni del sistema omogeneo

$$\begin{cases} -x + 2z = 0 \\ 2x + y + z = 0 \\ 3x + y - z = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} -x + 2z = 0 \\ 2x + y + z = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x = 2t \\ y = -5t \\ z = t \end{cases}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

• Per determinare se esistono rette invarianti basta determinare se la matrice ammette autovettori. Calcoliamo gli autovalori della matrice, come radici del polinomio caratteristico:

$$P(\lambda) = \det(A - \lambda I) = \det \begin{bmatrix} -1-\lambda & 0 & 2 \\ 2 & 1-\lambda & 1 \\ 3 & 1 & -1-\lambda \end{bmatrix} = -\lambda(\lambda^2 + \lambda - 8) = 0$$

sse

$$\lambda = 0, \frac{-1 \pm \sqrt{33}}{2}.$$

Ammette quindi rette invarianti.

• Basta determinare una soluzione di $L\mathbf{u} \cdot \mathbf{u} = 0$, che non stia nel nucleo, i.e. $\mathbf{u} = (x, y, z)$ tale che

$$(-x + 2z)x + (2x + y + z)y + (3x + y - z)z = 0 \qquad \Longleftrightarrow \qquad y^2 - x^2 - z^2 + 2xy + 2yz + 5xz = 0.$$

Ad esempio il vettore $\mathbf{u} = (1, -1 + \sqrt{2}, 0)$ soddisfa le richieste.