ANALISI MATEMATICA 1

Funzioni elementari

Trovare le soluzioni delle seguenti disequazioni.

(1) $\dfrac{x}{2}+\dfrac{4}{5}>\dfrac{8+5x}{10}$

(2) $5x+10>0, \qquad x-4<0$

(3) $\dfrac{x-2}{x-3}\geq 1$

(4) $\dfrac{x+1}{x+2}>\dfrac{3}{2x+4}$

(5) $5x^2-4x-2\geq (x+2)(x-2)$

(6) $x^2-x+2>0, \qquad x^2+5x+6\leq 0, \qquad x^2>5x$

(7) $\sqrt{x^2+1}<\sqrt{4x^2-1}$

(8) $\sqrt{3x^2-2x-1}<2$

(9) $x+2<\sqrt{4-x^2}$

(10) $5^{2x-1}-5^x+\dfrac{4}{5}>0$

(11) $\dfrac{\mathrm{e}^{3x}-4\,\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^x-1}>0$

(12) $\dfrac{\log_2 x-1}{\log_{1/2} x-1}>0$

(13) $|\log_5(x+1)|-2>0$

(14) $\sin^2 x-2\sin x>0$

(15) $\tan^2 x-\tan x<0$

ANALISI MATEMATICA 1

Numeri complessi

Determinare la forma algebrica o trigonometrica dei seguenti numeri complessi

(1) $\dfrac{1-i}{1+i}+i-\dfrac{1}{i}$

(2) $1+i, \quad \sqrt{3}-i$

(3) $\dfrac{(2+i)\left(5-\frac{1}{2}i\right)}{\left(1+\frac{1}{2}i\right)}$

(4) $3-3i$

Risolvere le seguenti equazioni:

(1) $|z-i|=|z+1|$

(2) $z+|z|^2=2$

(3) $|z|^2-z|z|+z=0$

(4) $z^2+2|z|^2+(\bar{z})^2=1$

(5) $(z+i)^4=4$

(6) $z^6-2iz^3-1=0$

(7) $z^3=i-1$

(8) $z^3=-4+4i$

(9) Trovare le radici dell'equazione complessa $2\sqrt{3}|z|^2z^2=3+i\sqrt{3}$

(10) Dire se il seguente sistema di equazioni ammette soluzioni $z\in\mathbb{C}$

$$\begin{cases}|z-2|=1,\\|z-2-3i|=2\end{cases}$$

ed eventualmente trovarle tutte.

(11) Considerato il polinomio $p(z)=z^4+z^3-11z^2+z-12$ calcolare $p(i)$ dopodiché trovare le radici dell'equazione complessa $p(z)=0$.

(12) Trovare le soluzioni complesse dell'equazione $(z-1)^4+16=0$.

(13) Sapendo che $1+i$ e $2-i$ sono radici del seguente polinomio complesso $p(z)=z^5-12z^4+51z^3-108z^2+118z-60$, dire se $p$ ammette radici puramente reali e/o puramente immaginarie.

(14) Dire se l'equazione $(z+1)^3=e^{i\pi/4}$ ammette radici complesse di modulo maggiore di 3.

ANALISI MATEMATICA 1

**Esercizi sulle successioni e i limiti**

Calcolare i seguenti limiti di successioni:

(1) $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{3n^2-2n+1}{5n^2+3n-1}$

(2) $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{n^3-n+1}{2n^2-3n+2}$

(3) $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{2n^2+3n-1}{n^3+n^2-1}$

(4) $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{n^3-2}{5-n^2}$

(5) $\lim\limits_{n\to+\infty} n-\sqrt{n^2+n}$

(6) $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt{n^2+3n}-\sqrt{n^2+1}$

(7) $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{\sqrt{n^2+3n}+2n}{n-\sqrt{n+1}}$

(8) $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{\log n+3}{\log_{10} n+1}$

(9) $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{n\,\cos n}{n\sqrt{n}+2}$

(10) $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{n^2+n\,\cos n}{\sin n-2n}$

(11) $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{n^{12}+n^4\,\cos n}{\sin n-2^n}$

(12) $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\dfrac{2}{3}\right)^n$

(13) $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(-\dfrac{5}{2}\right)^n$

(14) $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(1+\dfrac{2}{n}\right)^n$

(15) $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(1-\dfrac{3}{n}\right)^n$

(16) $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(1-\dfrac{1}{2n^2}\right)^{n^2}$

(17) $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{5}{n}\right)^{n^2}$

(18) $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right)^{n^2}$

(19) $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n/2}$

(20) $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\sqrt[n]{\frac{2^{2n}+5^n}{6^n}}$

(21) $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\frac{\log(1+\mathrm{e}^n)}{\sqrt{n^2+1}}$

(22) $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\left(\cos\frac{1}{n}\right)^{\sin^2\frac{1}{n}}$

(23) $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} n\,\cos\frac{\pi}{n}\,\sin\frac{2\pi}{n}$

(24) $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\sin\left(\frac{1}{n^3}\right)\left(\frac{n^4-1}{n+1}\right)$

(25) $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\frac{(2n)!}{2\,n!}$

(26) $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\frac{(2n)!}{(n!)^2}$

(27) $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} a_n$ dove $a_1=\alpha>0,\quad a_{n+1}=\sqrt{1+a_n}-1$

(28) $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} a_n$ dove $a_1=\alpha>0,\quad a_{n+1}=1-a_n+(a_n)^2$

(29) $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} a_n$ dove $a_1=1,\quad a_{n+1}=\frac{a_n}{2}+\frac{1}{a_n}$

ANALISI MATEMATICA 1

**Limiti di funzioni**

Calcolare i seguenti limiti di funzioni:

(1) $\lim_{x\to 0^+} \frac{x-2x^2}{3x^2-2\sqrt{x}}$

(2) $\lim_{x\to -1} \frac{x^2-1}{x^2-2x-3}$

(3) $\lim_{x\to +\infty} \frac{x^{1/3}-x^{1/2}}{\log x^9 + x^7}$

(4) $\lim_{x\to 0} \frac{\log(e^x+x)}{\log(1+3x)}$

(5) $\lim_{x\to +\infty} \frac{\sqrt{x^2-2}-x}{x \arctan\left(\frac{1}{x^2}\right)}$

(6) $\lim_{x\to -\infty} \frac{\sqrt{x^2-2}-x}{x \arctan x^2}$

(7) $\lim_{x\to 0} \frac{\sin x - 3\tan x}{e^{x/2}-1}$

**Esercizi sulle funzioni continue**

(1) Esempi sul Teorema di Weierstrass:
   (a) La funzione $x - x^2$ definita su $(0,1)$ ha massimo ma non ha minimo.
   (b) La funzione $\sqrt{\sin x}$ ha massimo e minimo nel suo dominio.
   (c) La funzione $\dfrac{1}{1+x^2}$ ha massimo ma non ha minimo in $\mathbb{R}$.
   (d) La funzione $\dfrac{x}{1+x^2}$ ha massimo e minimo in $\mathbb{R}$.
   (e) La funzione $\arctan x$ non ha massimo né minimo in $\mathbb{R}$.
   (f) La funzione $\dfrac{1}{x}$ ha massimo e minimo in $[-2,-1] \cup [1,2]$.

(2) Esempi sul Teorema di esistenza degli zeri e dei valori intermedi:
   (a) L'equazione $x^4 - 2x^2 + 1 = k$ ha 2 soluzioni per $k = 0$, 4 soluzioni per $0 < k < 1$, 3 soluzioni per $k = 1$, 2 soluzioni per $k > 1$, nessuna soluzione per $k < 0$.
   (b) L'equazione $|x^2 - 1|^2 = k$ ha, al variare di $k$, lo stesso numero di soluzioni dell'equazione precedente.
   (c) L'equazione $\mathrm{e}^x = x^2 - 2x + k$ ha almeno una soluzione per ogni $k \in \mathbb{R}$.
   (d) Provare che esiste almeno una soluzione in $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ dell'equazione $\tan x + \mathrm{e}^x - 5 = 0$.

(3) Il valore assoluto è una funzione 1-lipschitziana.

(4) La funzione $\sin x^2$ non è uniformemente continua.

(5) La funzione $\sqrt{x}$ è uniformemente in $[0,+\infty)$ ma non è lipschitziana.

ANALISI MATEMATICA 1

**Esercizi sulle derivate**

(1) Calcolare la derivata della funzione $(3x^2-1)^8$.

(2) Calcolare la derivata della funzione
$$\log\left(\frac{3x+1}{4x^2+2}\right).$$

(3) Calcolare la derivata della funzione $x^x$ e della funzione $f(x)^{g(x)}$, supponendo che $f$ e $g$ siano derivabili.

(4) Calcolare la derivata della funzione $3^{\sin^2 x}$.

(5) Calcolare la derivata della funzione $\arcsin 9x$.

(6) Definizioni e proprietà delle funzioni iperboliche e delle loro inverse.

(7) Calcolare la derivata della funzione $f(x)=|x^2+3\,x-4|$.

(8) Calcolare la derivata della funzione $\arcsin\left(\sqrt{1-x^2}\right)$.

(9) Scrivere l'equazione della retta tangente al grafico della funzione $f(x)=x^2+3x-1$ nel punto $x=1$. Scrivere il vettore normale e il vettore tangente.

(10) Calcolare la derivata della funzione
$$f(x)=\begin{cases} x^2\cos\left(\dfrac{1}{x}\right) & x\neq 0\\ 0 & x=0\,. \end{cases}$$

(11) Studiare la funzione $f(x)=x^3\ \mathrm{e}^{-x^2}$.

(12) Studiare la funzione $f(x)=x\ \log x$.

## Studi di funzioni

Tracciare i grafici delle funzioni così definite

(1) $f(x) = \dfrac{x^2+1}{x^2-x}$.

(2) $f(x) = \log|x|\,\sqrt{x}$.

(3) $f(x) = |x-1|\,\sqrt{x+1}$.

(4) $f(x) = \dfrac{1}{3}x^3\,\sqrt{1-x^2}$.

(5) $f(x) = \log|x| - |x^2-3x+2|$.

(6) $f(x) = x\,\mathrm{e}^{\frac{1}{1-|x|}}$.

(7) $f(x) = \dfrac{1}{x^2}\,\sqrt{|x^4-16|}$.

(8) $f(x) = \log|x^2+x| - x$.

(9) $f(x) = x\,\log|x-2|$.

(10) $f(x) = \log\Big(|x| - \sqrt{2+x}\Big)$.

(11) $f(x) = \arctan\sqrt{\left|\dfrac{2-x}{x}\right|}$.

(12) $f(x) = x - \left(\dfrac{4x}{1-\log|x|}\right)$.

(13) $f(x) = 2|x| - \left(\dfrac{\log|x|+1}{\log|x|-1}\right)$.

(14) $f(x) = |4x-2x^2|\,\mathrm{e}^{-x/2}$.

ANALISI MATEMATICA 1

**Uso della formula di Taylor per il calcolo di limiti**

(1) $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} \frac{\sin^2 x - \arctan x^2}{x^\alpha}$ al variare del parametro $\alpha \in \mathbb{R}$.

(2) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{x^2+x^3} - \sin x}{\tan(x+x^2)}$.

(3) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{2x^4 - 1 + \cos x^2}{x^8 + x^4}$.

(4) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \left( \frac{1}{\sin(x+x^2)} - \frac{1}{\log(1+x)} \right)$.

(5) $\displaystyle\lim_{x\to 3} \frac{(x^2-5x+6)^2}{(\mathrm{e}^{(x^2-9)} - 1)^4}$.

(6) $\displaystyle\lim_{x\to 4} \frac{(x^2-3x-4)^2}{\sqrt{x^2-15} - 1}$.

(7) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\sin(x+x^2) - \sin x - x^2}{1 - \frac{x^2}{2} - \cos x}$.

(8) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\cos x - \cos(\sin x)}{\sin(1/x)}$.

(9) $\displaystyle\lim_{x\to +\infty} x^\alpha (1-\cos x)\left(\sqrt{1+\frac{1}{x}} - 1\right)$ al variare del parametro $\alpha \in \mathbb{R}$.

(10) $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} \frac{\mathrm{e}^{-x} - \cos\sqrt{2x}}{(\sqrt{x+x^2} - \sqrt{x})^2} \log\left(2 - \sin\left(\frac{1}{x}\right)\right)$.

(11) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{2\sin(x\sqrt{1+x}) - 2x - x^2}{\log[\cos x + \frac{1}{2}\tan^2 x]}$.

(12) $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} \frac{x^2\cos x + 2\log\cos x}{(2^{\sqrt{x}} - \sqrt{x}\log 2 - 1)^2 - x^2}$.

**Calcolo di integrali**

(1) $\displaystyle\int_3^5 \frac{\log(x^2-4)}{x^3}\,dx\,.$

(2) $\displaystyle\int_0^\infty \mathrm{e}^{-2x}\sqrt{1-\mathrm{e}^{-4x}}\,dx\,.$

(3) $\displaystyle\int \frac{4}{\sqrt{x+1}(4x+12\sqrt{x+1}+14)}\,dx\,.$

(4) $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{2^x-4}}\,dx\,.$

(5) $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{2x^2-3x+4}}\,dx\,.$

(6) $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{2x-x^2}}\,dx\,.$

(7) Dire se il seguente integrale è convergente:
$\displaystyle\int_0^{+\infty} \arctan\left(\frac{x^2+1}{x^3+3x+1}\right)\,dx\,.$

(8) $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{x^2+4x+\alpha}\,dx \qquad (\alpha\geq 4)\,.$

(9) $\displaystyle\int_2^3 \frac{1}{2x\sqrt{x-2}}\,dx\,.$

(10) $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \frac{\sin^3 x}{1+\cos^2 x}\,dx\,.$

(11) $\displaystyle\int_1^2 x\log(1+x^2)\,dx\,.$

(12) $\displaystyle\int_0^{\pi/6} \frac{\sin x\,\cos x}{\cos^2 x-\sin^2 x}\,dx\,.$

(13) $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{\mathrm{e}^x-\mathrm{e}}}\,dx\,.$

ANALISI MATEMATICA 1

**Esercizi sulle serie**

(1) Studiare la convergenza della serie
$$\sum_{n=2}^{\infty}\left[\sin\left(n\,\pi+\frac{1}{\log n}\right)\right]^{n}.$$
(2) Studiare la convergenza della serie
$$\sum_{n=1}^{\infty}\left[1-\sin\left(\frac{\pi}{2}\left(1+\frac{1}{n}\right)\right)\right].$$
(3) Studiare la convergenza della serie
$$\sum_{n=1}^{\infty}\log\left(\cos\left(\frac{1}{n}\right)\right).$$
(4) Studiare la convergenza della serie
$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\tan\frac{1}{n}-\sin\frac{1}{n^{\alpha}}\right)\qquad(\alpha>0).$$
(5) Studiare la convergenza della serie
$$\sum_{n=1}^{\infty}\left[\sin\left(\tan\left(\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}\right)\right)-\frac{1}{n^2}\right]^{\alpha}\qquad(\alpha>0).$$
(6) Studiare la convergenza della serie
$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\sqrt[3]{8n^3+3n}-2n\right)^{\alpha}\qquad(\alpha>0).$$
(7) Studiare la convergenza della serie
$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{\log\left(\mathrm{e}-\frac{1}{n}\right)}{\alpha}\right)^{n}\qquad(\alpha>0).$$
(8) Studiare la convergenza semplice ed assoluta della serie
$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\sqrt{2n+n^2}}.$$
(9) Studiare la convergenza della serie
$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2}\alpha^{-n+1}.$$
al variare del parametro $\alpha>0$.

(10) Studiare la convergenza della serie
$$\sum_{n=2}^{\infty}\left[\frac{2n}{\sin(1/n)}-n^2-\frac{1}{\sin^2(1/n)}\right].$$
(11) Studiare la convergenza semplice ed assoluta della serie
$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{(n+1)!}{n^n}.$$

(12) Studiare la convergenza semplice ed assoluta della serie

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\Big(\frac{n}{\sqrt{1+n^2}}-\cos\frac{1}{n}\Big)\log(n!)$$

(13) Studiare la convergenza della serie

$$\sum_{n=2}^{\infty}\Big(\frac{\log(n-1)}{\log n}\Big)^{n\sqrt{n}}.$$

(14) Studiare la convergenza semplice ed assoluta della serie

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{n^2}{1+|x|^n}$$

al variare del parametro $x \in \mathbb{R}$.

ANALISI MATEMATICA 1

**Esercizi sulle successioni di funzioni**

(1) Studiare la successione di funzioni

$$f_n(x) = \frac{n^2 x}{3 + n^4 x^4}, \qquad x \in [0,1]$$

e dire se vale l'uguaglianza

$$\lim_{n\to+\infty} \int_0^1 f_n(x)\,dx = \int_0^1 \lim_{n\to+\infty} f_n(x)\,dx\,.$$

(2) Studiare la convergenza puntuale ed uniforme della successione di funzioni definite su tutto $\mathbb{R}$ da

$$f_n(x) = \left(\frac{1}{n} + \cos^2 x\right)^n$$

e calcolare

$$\lim_{n\to+\infty} \int_0^{\frac{\pi}{2}} f_n(x)\,dx.$$

Rispondere alle stesse domande nel caso $f_n(x) = \left(\frac{1}{n} + \cos^2 x\right)^{n^2}$.

(3) Dopo aver studiato la convergenza della successione di funzioni

$$f_n(x) = \frac{n}{\sqrt{n^2 x + 1}}, \qquad x \in [0,1],$$

calcolare il $\lim\limits_{n\to+\infty} \int_0^1 f_n(x)\,dx$; si poteva prevedere il risultato?

(4) Data la successione di funzioni $f_n(x) = \dfrac{n}{x^2 + n^2}$ $(x \in \mathbb{R})$, studiarne la convergenza, calcolare il $\lim\limits_{n\to\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f_n(x)\,dx$ e verificare l'applicabilità dei teoremi noti sul passaggio al limite sotto il segno d'integrale.

(5) Studiare la convergenza puntuale e uniforme della successione di funzioni

$$f_n(x) = n\sin(nx)\,\mathrm{e}^{-nx}, \qquad x \in \mathbb{R}$$

(6) Studiare la convergenza puntuale e uniforme della successione di funzioni

$$f_n(x) = (x^2 - x)^n, \qquad x \in \mathbb{R}$$

(7) Studiare la convergenza puntuale e uniforme della successione di funzioni

$$f_n(x) = n\left(x^{(n+1)/n} - x\right), \qquad x > 0.$$

(8) Studiare la convergenza puntuale e uniforme della successione di funzioni

$$f_n(x) = \frac{n^2 x^2}{1 + n^2 x^2}, \qquad x \in \mathbb{R}$$

(9) Studiare la convergenza puntuale e uniforme della successione di funzioni

$$f_n(x) = \frac{x}{1 + n^2 x^2}, \qquad x \in \mathbb{R}$$

**Esercizi sulle serie di funzioni**

(1) Studiare la serie
$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n n}{(x-1)^n}$$
e determinarne la somma.

(2) Studiare la convergenza puntuale ed uniforme della serie
$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} \left( \frac{1-x^2}{3x-1} \right)^n .$$
Calcolarne la somma.

(3) Studiare la convergenza puntuale ed uniforme della serie
$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n} \, (1+\log x)^n .$$
Calcolarne la somma.

(4) Studiare la serie
$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n}{(\sqrt{x}-1)^n}$$
e calcolarne la somma.

(5) Studiare, al variare del parametro $\alpha > 0$, la convergenza puntuale, uniforme e totale della serie di funzioni
$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^{2n}}{n^\alpha} \log\left(1+\frac{x^2}{n^\alpha}\right) .$$

(6) Studiare la convergenza della serie
$$\sum_{n=1}^{+\infty} \left( \frac{x^2-4}{\sqrt{8+x^2}} \right)^n$$
e calcolarne la somma.

(7) Studiare la convergenza puntuale, uniforme e totale della serie
$$\sum_{n=1}^{+\infty} \arctan \frac{1}{n^3 (x-1)^n}.$$

(8) Studiare la convergenza semplice, assoluta, uniforme e totale della serie
$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\log(n+x^2)}, \qquad x \in \mathbb{R}.$$

(9) Determinare l'insieme di convergenza e la somma della serie
$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{n+1};$$
giustificare i passaggi e il significato del risultato.

(10) Studiare la convergenza puntuale ed uniforme della serie
$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{e^{-nx}}{n}, \qquad x \in \mathbb{R}$$
e calcolarne la somma.

(11) Calcolare la somma della serie:
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n+2} \frac{x^n}{(1+x^2)^n}$$
giustificando i passaggi e precisando l'insieme di convergenza.

(12) Determinare gli insiemi di convergenza puntuale, assoluta ed uniforme della serie di funzioni:
$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x+n}{x^2+n^4+\log n}.$$

(13) Studiare la convergenza semplice, uniforme e totale della serie
$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n}{(\sqrt{x}-1)^n}$$
e calcolarne la somma.

(14) Studiare la serie di potenze
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n!}.$$

(15) Studiare la serie di potenze
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{2^n} x^n.$$

(16) Studiare la serie di potenze
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{5^n}.$$

(17) Studiare la serie di potenze
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^n}.$$

(18) Studiare la serie di potenze
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!x^n}{n^n}.$$

(19) Studiare la serie di potenze
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{(n+1)2^n}.$$

(20) Studiare la serie di potenze
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{\sqrt{n+3}} x^n.$$

(21) Studiare la serie di potenze
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+2)^n}{n^2}.$$
(22) Studiare la serie di potenze
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+3)^n}{2^n n^3}.$$
(23) Sviluppare in serie di Mac Laurin la funzione
$$f(x) = \frac{3x-4}{(x-1)^2}$$
e studiare la convergenza puntuale ed uniforme della serie ottenuta.

(24) Studiare la convergenza puntuale ed uniforme della serie
$$\sum_{n=1}^{+\infty} \left( nx^{n-1} + \frac{\log^n 2}{n!} \right) .$$
Calcolarne la somma.

(25) Studiare la convergenza puntuale ed uniforme della serie
$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1}(1-4x^2)^{2n}.$$
(26) Studiare la serie
$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n}{(\sqrt{x}-1)^n}.$$
e calcolarne la somma.

(27) Studiare, al variare del parametro $\alpha > 0$, la convergenza puntuale, uniforme e totale della serie di funzioni
$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^{2n}}{n^\alpha} \log\left(1 + \frac{x^2}{n^\alpha}\right).$$
(28) Calcolare l'insieme di convergenza della serie
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^\alpha} \sqrt{1 + \frac{x^2}{n^\alpha}}$$
al variare del parametro $\alpha > 0$.

(29) Studiare la convergenza puntuale, uniforme e totale della serie di funzioni
$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n} \left( \frac{x-1}{x^2+1} \right)^n.$$
(30) Studiare la convergenza puntuale, uniforme e totale della serie di funzioni
$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^2 x + 1}{3^{nx}}.$$

(31) Studiare la convergenza puntuale, uniforme e totale della serie di funzioni

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{e^{-nx^2} \sin(nx)}{n^2 x}.$$

(32) Studiare la convergenza semplice e totale della serie

$$\sum_{n=2}^{+\infty} \left( \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1} \right)^{\log n}.$$

(33) Studiare la convergenza semplice e totale della serie di funzioni definita da

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^x + (\log n)^x}.$$

(34) Studiare la convergenza semplice e totale della serie di funzioni definita da

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \left( \frac{x + 2}{x^2 + 1} \right)^n.$$

(35) Studiare la convergenza semplice e totale della serie di funzioni definita da

$$\sum_{n=1}^{+\infty} n\, e^{-n(x^2 + x + 1)}.$$

(36) Sviluppare in serie di potenze di punto iniziale 0 la funzione

$$f(x) = \log \sqrt{\frac{x - 1}{3x - 2}}.$$

(37) Sviluppare in serie di Taylor centrata nel punto $x = 0$ la funzione

$$f(x) = \log\left(x^2 + 3x + 2\right) .$$

(38) Studiare la convergenza semplice e totale della serie di funzioni definita da

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \left( \frac{x^2 - 1}{2x + 1} \right)^{n/2}.$$

(39) Determinare l'insieme di convergenza e la somma della serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sin^{n-1} x.$$

(40) Sviluppare in serie di Mac Laurin la seguente funzione:

$$f(x) = \log(x + \sqrt{1 + x^2}),$$

precisando la convergenza della serie ottenuta. (*Suggerimento:* utilizzare lo sviluppo in serie della derivata di $f$)

(41) Studiare la convergenza puntuale e totale della serie di funzioni

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{nx}}{2^{nx^2}}, \qquad x \in \mathbb{R}.$$

(42) Sviluppare in serie di Fourier la funzione 2-periodica

$$f(x) = \begin{cases} 2x^2 + x & -1 < x < 0 \\ x & 0 \leq x \leq 1\,. \end{cases}$$

e studiare la convergenza della serie ottenuta.

(43) Studiare la serie di Fourier relativa al prolungamento periodico della funzione

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\pi+x}{2} & x \in [-\pi, 0] \\ \frac{\pi-x}{2} & x \in [0, \pi]\,. \end{cases}$$

(44) Calcolare la serie di Fourier della funzione

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1+x}{2} & -1 < x \leq 0, \\ \frac{1-x}{2} & 0 < x \leq 1\,. \end{cases}$$

e precisarne la convergenza puntuale ed uniforme.

(45) Determinare la serie di Fourier della funzione 2-periodica definita in $[-1, 1)$ da

$$f(x) = x^2\,.$$

Precisare il tipo di convergenza della serie trovata.

(46) Calcolare la serie di Fourier della funzione $2\pi$-periodica definita nell'intervallo $[-\pi, \pi]$ da

$$f(x) = x^2$$

e precisarne la convergenza puntuale ed uniforme. Esplicitare nel caso in esame l'uguaglianza di Parseval.

(47) Scrivere la serie di Fourier della funzione

$$f(x) = \begin{cases} x - 1 & 0 \leq x \leq \pi \\ -1 & -\pi < x < 0\,. \end{cases}$$

(48) Determinare la serie di Fourier della funzione periodica di periodo 2 definita da

$$f(x) = (x^2 - 1)^2 \qquad x \in [-1, 1[.$$

- Dire se tale serie converge puntualmente, assolutamente, uniformemente, totalmente su $\mathbb{R}$.
- Utilizzare il risultato ottenuto per calcolare la somma della serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^4}\,.$$

- Si può utilizzare il teorema di derivazione per serie per ottenere la serie di Fourier delle derivate della funzione $f$?

(49) Calcolare lo sviluppo in serie di Fourier della funzione $2\pi$-periodica definita da $f(x) = e^x$ per $x \in (-\pi, \pi)$ e discutere la convergenza della serie ottenuta.

(50) Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la funzione 2–periodica definita nell'intervallo $[0, 2]$ da

$$f(x) = \begin{cases} 2x & x \in [0,1] \\ 4 - 2x & x \in [1,2] \, . \end{cases}$$

Dire se $f$ è sviluppabile in serie di Fourier e determinarne la serie.

Dedurre dal risultato precedente la somma della serie

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} \, .$$

(51) Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la funzione 2–periodica definita nell'intervallo $[0, 2]$ da

$$f(x) = \begin{cases} x & x \in [0,1] \\ 1 & x \in [1,2] \, . \end{cases}$$

Dire se $f$ è sviluppabile in serie di Fourier e determinarne la serie.

(52) Sviluppare in serie di Fourier la funzione

$$f(x) = |\sin x| \, .$$

(53) Sviluppare in serie di Fourier la funzione $2\pi$-periodica definita in $[-\pi, \pi]$ da

$$f(x) = x(\pi^2 - x^2)$$

(54) Sviluppare in serie di Fourier la funzione $2\pi$ periodica definita in $[-\pi, \pi]$ da $f(x) = x(\pi - |x|)$. Utilizzare il risultato precedente e il teorema di derivazione per serie per calcolare la somma della serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} .$$

(55) Sviluppare in serie di soli coseni la funzione $f$ definita nell'intervallo $0 < x < 2$ come segue:

$$f(x) = \begin{cases} x & 0 < x \leq 1 \\ 1 & 1 \leq x < 2 \, . \end{cases}$$

(56) Calcolare lo sviluppo in soli seni della funzione 2-periodica definita da $f(x) = 1 - x^2$ per $x \in (0, 1)$ e discutere la convergenza della serie ottenuta.

(57) Sviluppare in serie di soli seni la funzione $f(x) = x^2$, definita nell'intervallo $0 \leq x \leq \pi$.

(58) Sviluppare in serie di soli seni la funzione 4-periodica definita in $[0, 2[$ da

$$f(x) = e^x - 1.$$

e studiare la convergenza della serie ottenuta.

(59) Sviluppare in serie di Fourier di soli seni la funzione 2-periodica definita in $[0, 1[$ da

$$f(x) = x^2(1 - x)$$

e, successivamente, precisare gli intervalli di convergenza puntuale e uniforme della serie ottenuta.