Prof. Daniela Tonon — **Ingegneria Aerospaziale (Canale B)**
Analisi Matematica I — **Anno 2022-2023**

11/09/2023 - TEMA A

COGNOME E NOME: MATRICOLA:

ES 1:	/6	ES 2:	/6	ES 3:	/6	TOT :	/18
ES 4:	/6	ES 5:	/6	ES 6:	/6	TOT :	/18

QUARTO APPELLO ESERCIZI: **1,2,3,4,5,6** DURATA: 2h30

Esercizio 1
Studiare il seguente limite al variare di $\alpha > 0$

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{e^{-\sinh(\frac{x}{2})} - \cos(x^{\alpha/2}) + x\sqrt{x}\ln x}{\tan(e^{x^\alpha}-1) - \sqrt{x} + e^{-\frac{1}{\sqrt{x}}}}.$$

Soluzione:
Abbiamo per $x \to 0^+$
$x\sqrt{x}\ln x = o(x^\beta)$ per $0 < \beta < 1+\frac{1}{2}$ e $x^\beta = o(x\sqrt{x}\ln x)$ per $\beta \geq 1+\frac{1}{2}$.
$\sinh\frac{x}{2} = \frac{x}{2} + o(x^2)$
$e^{-\sinh\frac{x}{2}} = 1 - (\frac{x}{2}+o(x^2)) + \frac{(-\frac{x}{2}+o(x^2))^2}{2} + o((\frac{x}{2}+o(x^2))^2) = 1 - \frac{x}{2} + \frac{(x)^2}{8} + o(x^2)$
$\cos x^{\alpha/2} = 1 - \frac{x^\alpha}{2} + o(x^{(3\alpha)/2})$
Quindi per $x \to 0^+$

$$e^{-\sinh(\frac{x}{2})} - \cos(x^{\alpha/2}) + x\sqrt{x}\ln x = \begin{cases} \frac{x^\alpha}{2} + o(x^\alpha) & 0<\alpha<1 \\ x\sqrt{x}\ln x + o(x\sqrt{x}\ln x) & \alpha = 1 \\ -\frac{x}{2} + o(x) & \alpha > 1 \end{cases}$$

Inoltre per $x \to 0^+$
Abbiamo $e^{-\frac{1}{\sqrt{x}}} = o(x^\beta)$ per ogni $\beta > 0$
$e^{x^\alpha} - 1 = x^\alpha + \frac{x^{2\alpha}}{2} + o(x^{2\alpha})$
$\tan(e^{x^\alpha}-1) = x^\alpha + \frac{x^{2\alpha}}{2} + o(x^{2\alpha}) + o((x^\alpha + \frac{x^{2\alpha}}{2} + o(x^{2\alpha}))^2) = x^\alpha + \frac{x^{2\alpha}}{2} + o(x^{2\alpha})$
Quindi per $x \to 0^+$

$$\tan(e^{x^\alpha}-1) - \sqrt{x} + e^{-\frac{1}{\sqrt{x}}} = \begin{cases} x^\alpha + o(x^\alpha) & 0<\alpha<1/2 \\ \frac{x}{2} + o(x) & \alpha = 1/2 \\ -\sqrt{x} + o(\sqrt{x}) & \alpha > 1/2 \end{cases}$$

In conclusione

$$\frac{e^{-\sinh(\frac{x}{2})} - \cos(x^{\alpha/2}) + x\sqrt{x}\ln x}{\tan(e^{x^\alpha}-1) - \sqrt{x} + e^{-\frac{1}{\sqrt{x}}}} = \begin{cases} \lim_{x\to0^+} \frac{\frac{x^\alpha}{2}+o(x^\alpha)}{x^\alpha+o(x^\alpha)} = 1/2 & 0<\alpha<1/2 \\ \lim_{x\to0^+} \frac{\frac{\sqrt{x}}{2}+o(x^{1/2})}{\frac{x}{2}+o(x)} = +\infty & \alpha = 1/2 \\ \lim_{x\to0^+} \frac{\frac{x^\alpha}{2}+o(x^\alpha)}{-\sqrt{x}+o(\sqrt{x})} = 0 & 1/2<\alpha<1 \\ \lim_{x\to0^+} \frac{x\sqrt{x}\ln x + o(x\sqrt{x}\ln x)}{-\sqrt{x}+o(\sqrt{x})} = 0 & \alpha = 1 \\ \lim_{x\to0^+} \frac{-\frac{x}{2}+o(x)}{-\sqrt{x}+o(\sqrt{x})} = 0 & \alpha > 1 \end{cases}$$

Esercizio 2
Si consideri, al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$, la serie numerica

$$\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n(1+\sin\frac{\alpha}{n^2})^{n^3}$$

(i) Studiare la convergenza assoluta della serie.

(ii) Studiare la convergenza della serie.

Soluzione:

(i) Consideriamo la serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\left|(-1)^n(1+\sin\frac{\alpha}{n^2})^{n^3}\right| = \sum_{n=1}^{+\infty}(1+\sin\frac{\alpha}{n^2})^{n^3}$$

(notare : $1+\sin\frac{\alpha}{n^2} \geq 0, \forall n \geq 1$)

Per $\alpha = 0$ la serie evidentemente diverge. Per $\alpha \neq 0$, si ha

$$\left(1+\sin\frac{\alpha}{n^2}\right)^{n^3} \sim \left(1+\frac{\alpha}{n^2}\right)^{n^3},$$

(notare : per $\alpha < 0$ avremo $1+\frac{\alpha}{n^2} \geq 0$ per n abbastanza grande)

per cui la serie ha lo stesso carattere della serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\left(1+\frac{\alpha}{n^2}\right)^{n^3}$$

il cui termine generale è definitivamente a segno positivo. Applicando a quest'ultima il criterio della radice, risulta

$$\lim_{n\to+\infty}\sqrt[n]{\left(1+\frac{\alpha}{n^2}\right)^{n^3}} = \lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{\alpha}{n^2}\right)^{n^2} = \lim_{n\to+\infty} e^{n^2\ln(1+\frac{\alpha}{n^2})} = e^{\alpha}$$

Che ci permette di concludere che la serie converge per $e^{\alpha} < 1$ e diverge per $e^{\alpha} > 1$. Il caso limite è già stato verificato. La serie pertanto converge se e solo se $\alpha < 0$.

(ii) La serie converge assolutamente (e quindi semplicemente) se $\alpha < 0$. Dove abbiamo divergenza assoluta dobbiamo tuttavia verificare se sussiste convergenza semplice. Ora per tutti gli $\alpha > 0$ abbiamo

$$(-1)^n(1+\sin\frac{\alpha}{n^2})^{n^3} = (-1)^n e^{n^3\ln(1+\sin\frac{\alpha}{n^2})}$$

e

$$\lim_{n\to+\infty} e^{n^3\ln(1+\sin\frac{\alpha}{n^2})} = \lim_{n\to+\infty} e^{n^3\frac{\alpha}{n^2}} = +\infty$$

quindi il termine generale non è infinitesimo e la serie non può convergere.

Nel caso limite $\alpha = 0$ abbiamo la serie oscillante $\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n$ che non converge.

Esercizio 3
Si consideri la funzione $f(x) = \ln(4 - |e^x - 2|)$,

(i) Determinare il dominio D, eventuali simmetrie, il segno e stabilire se la funzione è continua.

(ii) Determinare asintoti orizzontali, verticali o obliqui.

(iii) Studiare la derivabilità della funzione, calcolarne la derivata, stabilirne la continuità e determinare eventuali massimi e minimi locali e/o globali di f.

(iv) Calcolare la derivata seconda dove possibile e studiare la concavità e la convessità di f.

v) Disegnare il grafico della funzione con gli elementi dei ricavati nei punti precedenti.

Soluzione:

(i) Il dominio è dato dalla condizione $|e^x - 2| < 4$ cioè $-2 < e^x < 6$. La prima condizione è automaticamente verificata, mentre la seconda dà $D =]-\infty, \ln 6[$. Non ci sono simmetrie. Si ha inoltre $f(x) \geq 0$ se e solo se $4 - |e^x - 2| \geq 1$, che equivale a $x \leq \ln 5$.

La funzione è continua sul suo dominio come composizione di funzioni continue.

(ii) Si ha $\lim_{x\to-\infty} |e^x - 2| = 2$, per cui $\lim_{x\to-\infty} f(x) = \ln 2$, abbiamo quindi un asintoto orizzontale $y = \ln 2$.

Inoltre $\lim_{x\to\ln 6^-} f(x) = -\infty$, dato che in $x = \ln 6$ l'argomento del logaritmo si annulla, $x = \ln 6$ è quindi asintoto verticale.

(iii) f è sicuramente derivabile in $D \setminus \{\ln 2\}$ dove si possono applicare le regole di derivazione, e cioè dove non si annulla l'argomento del modulo. Si ha

$$f(x) = \begin{cases} \ln(2 + e^x) & \text{per } x \leq \ln 2 \\ \ln(6 - e^x) & \text{per } \ln 2 < x < \ln 6 \end{cases}$$

per cui

$$f'(x) = \begin{cases} \frac{e^x}{e^x+2} & \text{per } x < \ln 2 \\ \frac{e^x}{e^x-6} & \text{per } \ln 2 < x < \ln 6. \end{cases}$$

La funzione f risulta pertanto strettamente crescente per $x < \ln 2$ e strettamente decrescente per $\ln 2 < x < \ln 6$. Si ha inoltre $\lim_{x\to\ln 2^-} f'(x) = \frac{1}{2}$, mentre $\lim_{x\to\ln 2^+} f'(x) = -\frac{1}{2}$, per cui $\ln 2$ è un punto angoloso e la funzione non è derivabile in $x = \ln 2$. La derivata è continua in $D \setminus \{\ln 2\}$.

(iv) Si ha

$$f''(x) = \begin{cases} \frac{2e^x}{(e^x+2)^2} & \text{per } x < \ln 2 \\ \frac{-6e^x}{(e^x-6)^2} & \text{per } \ln 2 < x < \ln 6, \end{cases}$$

per cui f è convessa in $]-\infty, \ln 2[$ ed è concava in $]\ln 2, \ln 6[$.

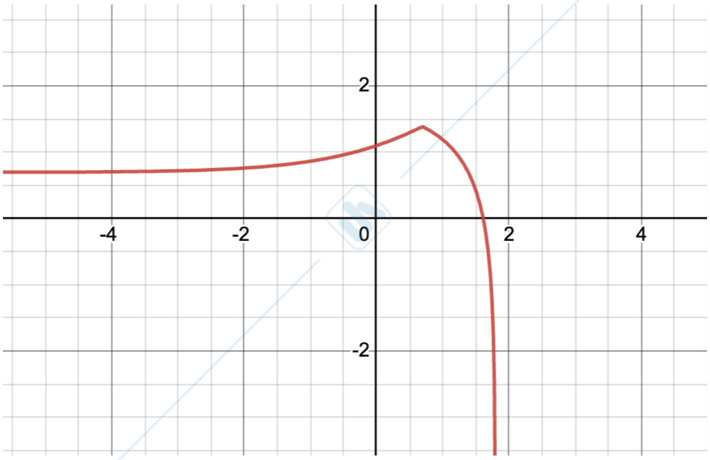
(v) vedi figura.

Esercizio 4
Si consideri la funzione integrale $F(x) = \int_0^x \frac{\arctan t^3}{\sqrt{1+t}}dt$.

(i) Determinare il dominio D, eventuali simmetrie e segno.

(ii) Studiare la derivabilità della funzione, calcolare la derivata, stabilirne la continuità, determinare eventuali punti di massimo e minimo locali/globali.

(iii) Stabilire se F è limitata superiormente e/o inferiormente.



(iv) Disegnarne il grafico della funzione.

Soluzione:

(i) La funzione integranda $\frac{\arctan t^3}{\sqrt{1+t}}$ è ben definita, limitata, continua su $]-1,+\infty[$, quindi è integrabile su tutti gli intervalli della forma $]0,x[$ con $x \in]-1,+\infty[$.

In -1 abbiamo che

$$\frac{\arctan t^3}{\sqrt{1+t}} \sim_{-1} \frac{\arctan(-1)}{(1+t)^{\frac{1}{2}}}$$

$F(-1)$ è quindi un valore finito e il dominio di F è $[-1,+\infty[$

Dato il dominio la funzione F non presenta simmetrie.

Abbiamo $F(0)=0$ e dato il segno della funzione integranda (positiva per $t>0$ e negativa per $-1<x<0$) avremo F positiva su $]-1,+\infty[$.

(ii) Per il teorema fondamentale del calcolo F è $C^1(]-1,+\infty[)$ e la sua derivata è

$$F'(x) = f(x) = \frac{\arctan x^3}{\sqrt{1+x}}$$

Avendone già studiato il segno possiamo concludere che F è strettamente decrescente su $[-1,0[$ e strettamente crescente su $]0,+\infty[$ e abbiamo un minimo globale nel punto $x=0$ e un massimo locale in $x=-1$.

(iii) La funzione F è limitata inferiormente e illimitata superiormente.

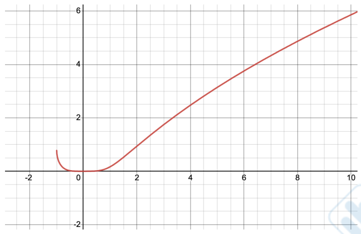
Infatti dato che

$$\frac{\arctan t^3}{\sqrt{1+t}} \sim_{+\infty} \frac{\pi}{2(t)^{\frac{1}{2}}} =$$

per il confronto abbiamo che

$$\lim_{x\to+\infty} \int_0^x \frac{\arctan t^3}{\sqrt{1+t}} dt = +\infty$$

(iv) Si veda il grafico in figura.



Esercizio 5
Si consideri, al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$, l'integrale

$$\int_0^{+\infty} \frac{\ln(1+x)}{x^\alpha} dx.$$

(i) Studiare la convergenza dell'integrale al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$.

(ii) Calcolare l'integrale per $\alpha = 2$.

Soluzione:

(i) L' integrando è positivo e continuo in $]0, +\infty[$, per cui si deve studiare la convergenza in 0 e per $x \to +\infty$ e si può usare il criterio del confronto asintotico. Risulta

$$\frac{\ln(1+x)}{x^\alpha} \sim \frac{x}{x^\alpha} \text{ per } x \to 0^+,$$

il cui integrale converge per $\alpha - 1 < 1$ e

$$\frac{\ln(1+x)}{x^\alpha} \sim \frac{\ln x}{x^\alpha} \text{ per } x \to +\infty,$$

il cui integrale (di Bertrand) converge per $\alpha > 1$. Per cui l'integrale converge se e solo se $1 < \alpha < 2$.

(ii) Si ha inoltre

$$\begin{aligned}\int \frac{\ln(1+x)}{x^2}\,\mathrm{d}x &= -\frac{\ln(1+x)}{x} + \int \frac{1}{x(x+1)}\mathrm{d}x \\ &= -\frac{\ln(1+x)}{x} + \int \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{1+x}\right)\mathrm{d}x \\ &= \ln\frac{x}{1+x} - \frac{\ln(1+x)}{x} + c, \quad c \in \mathbb{R}.\end{aligned}$$

Perciò

$$\begin{aligned}\int_0^{+\infty} \frac{\ln(1+x)}{x^2}\,\mathrm{d}x &= \lim_{a\to 0^+}\int_a^1 \frac{\ln(1+x)}{x^2}\,\mathrm{d}x + \lim_{b\to+\infty}\int_1^b \frac{\ln(1+x)}{x^2}\,\mathrm{d}x \\ &= \lim_{a\to 0^+} \ln\frac{1}{2} - \ln 2 - \left(\ln\frac{a}{1+a} - \frac{\ln(1+a)}{a}\right) \\ &+ \lim_{b\to+\infty}\left(\ln\frac{b}{1+b} - \frac{\ln(1+b)}{b}\right) - \ln\frac{1}{2} + \ln 2 \\ &= +\infty\end{aligned}$$

Esercizio 6
Si consideri l'equazione differenziale a variabili separabili

$$y'(t) = (y^2(t) - 4)\cos(t).$$

(i) Determinare le eventuali soluzioni costanti.

(ii) Verificare che il problema di Cauchy con $y(0) = 0$ ammette soluzione unica e calcolarla.

Soluzione:

(i) Le soluzioni costanti sono gli y tali che il secondo membro dell' equazione si annulla, cioè $y = \pm 2$.

ii) Tenendo conto che il secondo membro dell'equazione differenziale è di classe $\mathcal{C}^1$ rispetto a y e continuo rispetto a t, la soluzione del problema di Cauchy è unica.

Dato che nessuna delle due soluzioni costanti verifica il dato iniziale possiamo usare, il metodo di separazione delle variabili

$$\int \frac{\mathrm{d}y}{y^2 - 4} = \int \cos t \; \mathrm{d}t$$

Si ha

$$\frac{1}{y^2 - 4} = \frac{1}{4}\left(\frac{1}{y-2} - \frac{1}{y+2}\right)$$

da cui

$$\int \frac{\mathrm{d}y}{y^2 - 4} = \frac{1}{4}\ln\frac{|y-2|}{|y+2|} + c, c \in \mathbb{R}.$$

$$\int \cos t \; \mathrm{d}t = \sin t + c, \;\; c \in \mathbb{R}.$$

Uguagliando i due risultati si ottiene

$$\ln\frac{|y(t)-2|}{|y(t)+2|} = 4\sin t + c', c' \in \mathbb{R}.$$

Si può togliere il modulo osservando che se $y(0) = 0$ avremo $y(t) < 2$ in un intorno di 0:

$$\frac{2 - y(t)}{y(t) + 2} = e^{4\sin t + c'}, c' \in \mathbb{R}.$$

Imponendo la condizione iniziale risulta $1 = e^{c'}$, cioè $c = 0$, da cui, esplicitando la y,

$$y(t)\left(e^{4\sin t} + 1\right) = 2 - 2e^{4\sin t}$$

Si ottiene quindi

$$y(t) = \frac{2 - 2e^{4\sin t}}{e^{4\sin t} + 1}.$$

il cui dominio è tutto $\mathbb{R}$.

Sviluppi asintotici utili per $x \to 0$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o(x^5) \qquad \ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + o(x^2) \qquad \sinh x = x + \frac{x^3}{6} + o(x^4)$$

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + o(x^2) \qquad \tan x = x + \frac{x^3}{3} + o(x^4) \qquad \arctan x = x - \frac{x^3}{3} + o(x^4)$$

$$\sqrt{1+x} = 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + o(x^2) \qquad \sin x = x - \frac{x^3}{6} + o(x^4)$$