# Continuità delle funzioni reali

## 1. Riepilogo estremi – estremo superiore

$$\sup_f \begin{cases} +\infty & se\ I(f)\ non\ è\ sup.\ limitata \\ \sup\limits_f & se\ I(f)\ è\ sup.\ limitata \end{cases}$$

Se $M = \sup\limits_f \in (-\infty, +\infty] \implies \exists x_n \in D(f) \quad t.c. \quad f(x_n) \to M$

$$\exists y_n \in I(f) \quad t.c. \quad y_n \to \sup_{I(f)} \quad \implies \quad \exists x_n \in D(f) \quad t.c. \quad y_n = f(x_n)$$

## 2. Continuità in un punto

**Definizione**. Sia $x_0 \in D(f)$, si dice che $f$ è continua in $x_0$, se

$$\forall U\big(f(x_0)\big) \quad \exists U(x_0) \quad t.c.$$
$$se\ \ x \in U(x_0) \land x \in D \implies f(x) \in U\big(f(x_0)\big)$$

Equivalentemente:

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad t.c. \quad se\ x \in D(f)\ \ e\ |x - x_0| < \delta \quad \implies \quad |f(x) - f(x_0)| = \varepsilon$$

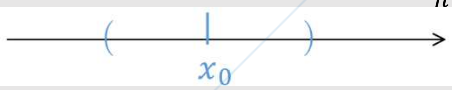
Traduzione della definizione:

1. Se $x_0$ è isolato (per $D(f)$) allora $f$ è continua in $x_0$.
2. Se $x_0$ è un punto di accumulazione (per $D(f)$) allora $f$ è continua in $x_0$.

$$\Leftrightarrow \quad \lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$$

**Teorema. Continuità successionale**. $f$ è continua in $x_0 \in D(f)$

$$\Leftrightarrow \quad \forall\ successione\ a_n \quad t.c. \quad a_n \in D(f)\ \ e\ a_n \to x_0 \quad \implies \quad f(a_n) \to f(x_0)$$




La successione deve essere uguale a $x_0$ *definit.*

**Teorema. Permanenza del segno**. Sia $f$ una funzione continua in $x_0 \in D(f)$.
Se $f(x_0) > 0$ allora $\exists U(x_0) \ \ t.c.$

$$se\ \ x \in U(x_0)\ \ e\ \ x \in D(f) \quad \implies f(x) > 0 \quad [U(x_0) = (x_0 - \delta; x_0 + \delta)]$$

**Teorema. Operazioni con le funzioni continue**. Siano $f$ e $g$ funzioni continue in $x_0$:

$$x_0 \in D(f)$$
$$x_0 \in D(g)$$

Allora:

1. La funzione $f + g$ è continua in $x_0$.
2. La funzione $f \cdot g$ è continua in $x_0$.
3. Se $g(x) \neq 0 \implies \frac{f}{g}$ è continua in $x_0$.

<u>Dimostrazione della 3.</u>: Sia $a_n \in \frac{f}{g} \quad t.c. \quad a_n \to x_0$

$$\left(\frac{f}{g}\right)(x_0) \to ? \left(\frac{f}{g}\right)x_0$$

$$\frac{f(a_n)}{g(a_n)} \to \frac{f(x_0)}{g(x_0)}$$ :→ il loro rapporto tende al rapporto dei limiti.

**Teorema. Continuità rispetto alla composizione**. Sia $f$ continua in $x_0$ (e quindi $x_0 \in D(f)$) e sia $g$ continua in $y_0 = f(x_0)$ (e quindi $y_0 \in D(g)$).
Allora la funzione $g \circ f$ è continua in $x_0$:

$$(g \circ f)(x_0) = g\big(f(x_0)\big)$$

**Esempio**. $f(x) = \sqrt{x}$ $\qquad x_0$ è *punto di accumulazione*

$$g(y) = \sqrt{-y} \quad \Rightarrow \quad g\big(f(x)\big) = \sqrt{-\sqrt{x}} \quad \Rightarrow \quad D(g \circ f) = \{0\}$$

<u>Dimostrazione</u>: Sia $a_n \in D(g \circ f)$ tale che $a_n \to x_0$.
Si deve dimostrare che

$$(g \circ f)(a_n) \to (g \circ f)(x_0) \quad \Leftrightarrow \quad g\big(f(a_n)\big) \to g\big(f(x_0)\big)$$

Se $a_n \in D(g \circ f) \Rightarrow$

$$\Rightarrow \begin{array}{l} 1.\ a_n \in D(f) \\ 2.\ b_n = f(a_n) \in D(g) \end{array}$$

Poiché $f$ è continua:

$$a_n \to x \quad \Rightarrow \quad b_n \to y_0 \quad \text{e dunque} \quad f(a_n) \to f(x_0)$$

$$\Rightarrow \quad g(b_n) \to g(y_0) \quad \text{e dunque} \quad g\big(f(a_n)\big) \to g\big(f(x_0)\big)$$

## 3. Continuità globale

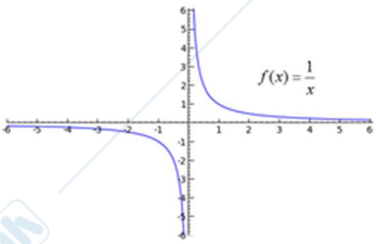
**Definizione**. Una funzione $f$ si dice *continua in un intervallo* $I \in D(f)$ se è continua in ogni punto $x_0 \in I$.

**Definizione**. Una funzione $f$ si dice *continua* se è continua in ogni punto $x_0 \in D(f)$.

**Esempio**. $f(x) = \frac{1}{x}$

$D(f) = \{x \neq 0\}$

$\Rightarrow \quad f$ è *continua*




Sono continue le funzioni:

- Polinomi
- Esponenziali, logaritmi, seno, coseno, ecc. (funzioni elementari)
  E prodotto, somma, rapporto e composte di tali funzioni.

## 4. Punti di discontinuità

**Definizione**. Un punto $x_0 \in D(f)$ è detto *punto di discontinuità* per una funzione $f$ se $f$ <u>non</u> è continua in $x_0$.

Osservazione:

- Se $x_0$ è punto di discontinuità $\Longrightarrow$ $x_0$ è di accumulazione per $D(f)$.
- Se $x_0$ è punto di discontinuità $\Longrightarrow$ $x_0$ è *falso* che $\exists \lim_{x \to x_0} f(x)$

**Definizione. Discontinuità eliminabile – III specie.** $x_0 \in D(f)$ è un punto di *discontinuità eliminabile* se

$$\exists \lim_{x \to x_0} f(x) = L \in \mathbb{R} \quad ma \quad L \neq f(x_0)$$

**Esempio.**

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin x}{x} & se \quad x \neq 0 \\ 0 \quad se \quad x = 0 \end{cases}$$

$$f(0) = 0 \;:\to \; eliminabile \quad :\to \quad \hat{f}(x) = \begin{cases} f(x) & se \quad x \neq x_0 \\ \lim_{x \to x_0} f(x) & se \quad x = x_0 \end{cases}$$

**Esempio.**

$$f(x) = \frac{\sin x}{x} \qquad D(f) = \{x \neq 0\}$$

Non definita in $x = 0$, quindi esso non è punto di discontinuità.

**Definizione. Discontinuità di tipo salto – I specie.** Il punto $x_0 \in D(f)$ è punto di *discontinuità di tipo salto* se

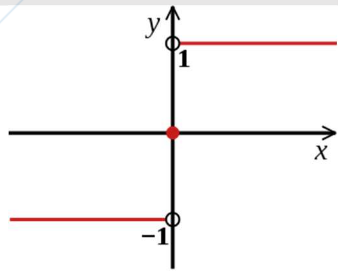
$$\exists \lim_{x \to x_0^+} f(x) \quad \text{e} \quad \exists \lim_{x \to x_0^-} f(x)$$

ma essi non coincidono.

**Esempio.**

$$f(x) = \operatorname{sign}(x) = \begin{cases} 1 & se \quad x > 0 \\ 0 & se \quad x = 0 \\ -1 & se \quad x < 0 \end{cases}$$

$$\lim_{x \to 0^-} f(x) = -1 \quad \neq \quad 1 = \lim_{x \to 0^+} f(x)$$

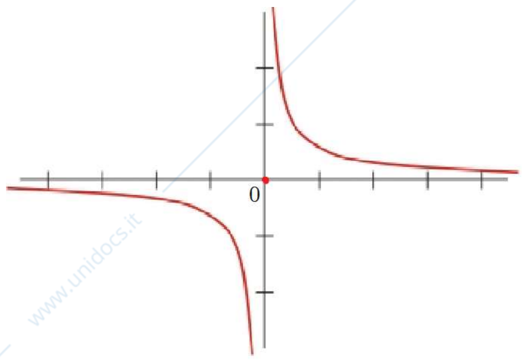



**Definizione. Discontinuità di II specie.** Dato un punto $x_0$, quando uno (o entrambi) tra il limite destro e il limite sinistro (se è definito) è o indeterminato o vale $+\infty$ o $-\infty$, si dice che esso è un punto di *discontinuità di II specie.*

**Esempio.**

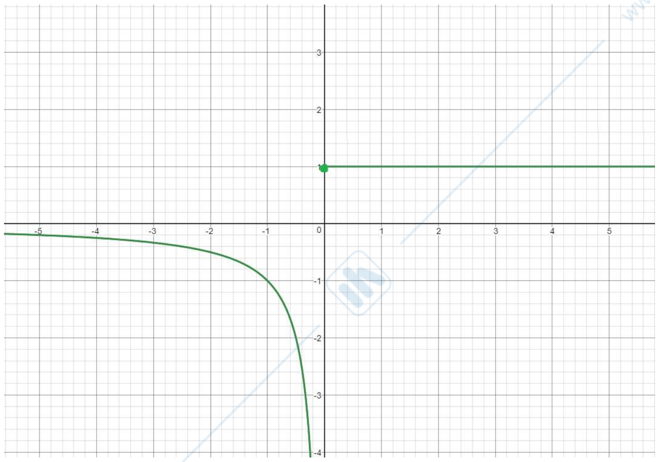
$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x} & se \quad x \neq 0 \\ 0 & se \quad x = 0 \end{cases}$$

$x = 0$ è punto di discontinuità di 2° specie.



**Esempio.**

$$f(x) = \begin{cases} 1 & se \quad x \geq 0 \\ \dfrac{1}{x} & se \quad x < 0 \end{cases}$$

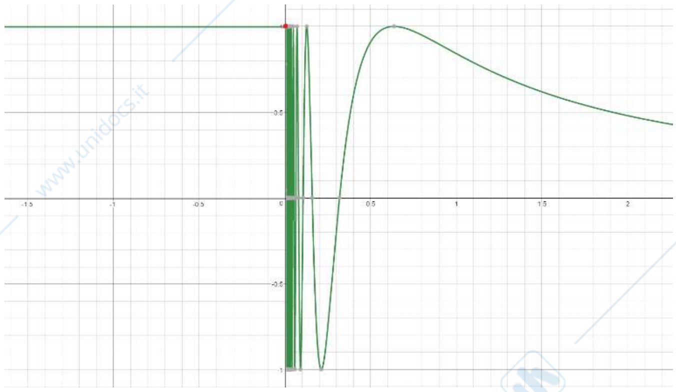


$Limite\ dx\ di\ x = 0$ vale 1
$Limite\ sx\ di\ x = 0$ vale $-\infty$

$x = 1$ è un punto di d. II specie.

**Esempio.**

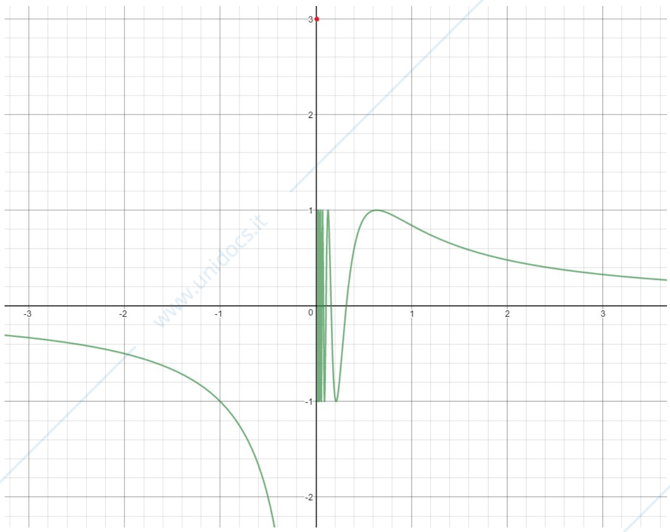
$$f(x) = \begin{cases} \sin\dfrac{1}{x} & se \quad x > 0 \\ 1 \quad se & x \leq 0 \end{cases}$$



$Limite\ dx\ di\ x = 0$ non esiste
$Limite\ sx\ di\ x = 0$ vale 1

**Esempio.**

$$f(x) = \begin{cases} \sin\dfrac{1}{x} & se \quad x > 0 \\ 3 & se \quad x = 0 \\ \dfrac{1}{x} & se \quad x < 0 \end{cases}$$



$Limite\ dx\ di\ x = 0$ non esiste
$Limite\ sx\ di\ x = 0$ vale $-\infty$

## 5. Prolungamento per continuità

Sia $f$ di dominio $D(f)$ e sia $x_0$ punto di accumulazione per $D(f)$, ma $x \notin D(f)$.
Si vuole estendere la $f$ in $x_0$: si costruisce una nuova funzione $\tilde{f}$ con $D(\tilde{f}) = D(f) \cup \{x_0\}$. Dunque

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} f(x) & se \quad x \neq x_0 \\ \alpha \in \mathbb{R} & se \quad x = x_0 \end{cases}$$

È possibile trovare $\alpha\ t.c.$ la funzione $\tilde{f}$ sia continua in $x_0$ se:

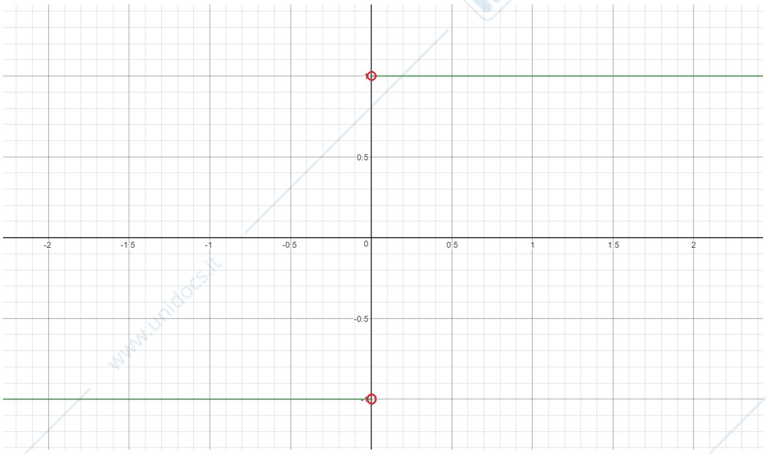
$$\alpha = \lim_{x \to x_0} f(x)$$

Il limite deve, però, esistere.
Si possono avere quattro situazioni:

1. $\tilde{f}$ è continua
2. $\tilde{f}$ ha un punto di discontinuità di I, II o III specie. (Se di III specie $\tilde{f}$ ha continuità eliminabile, dunque esiste il limite).

**Esempio**.

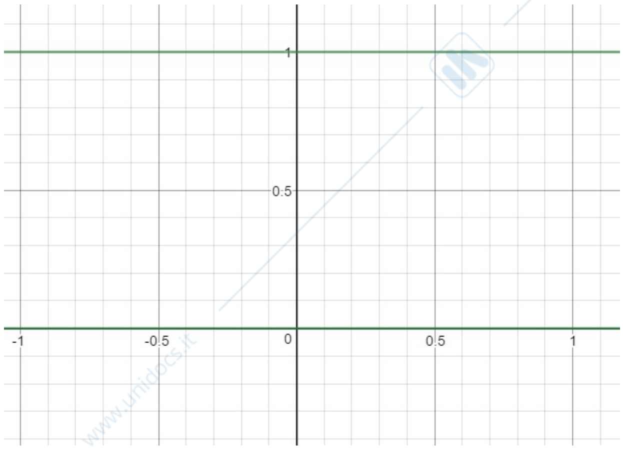
$$f(x) = \frac{x}{|x|}$$



Per qualsiasi valore di $\alpha = f(0)$ la $f$ possiede un salto, quindi un punto di discontinuità di II specie.

**Esempio. Funzione di Dirichlet**.

$$D(x) = \begin{cases} 1 & se \quad x \in \mathbb{Q} \\ 0 & se \quad x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$$

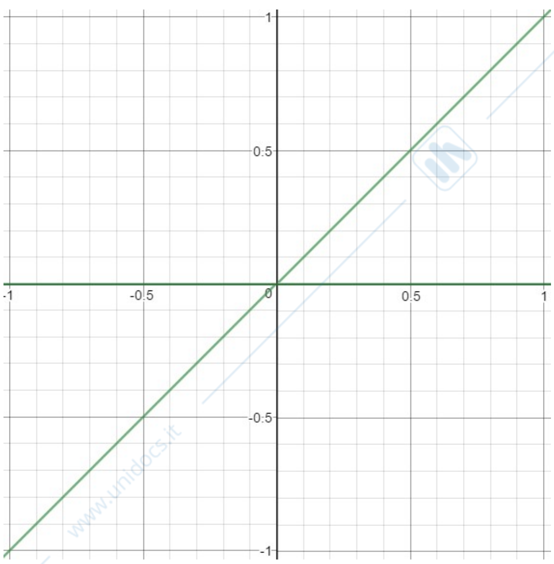



Non è continua. Tutti i punti sono punti di discontinuità di II specie.

**Esempio**.

$$f(x) = x \cdot D(x)$$

Si può dimostrare che $f(x)$ è continua in $x = 0$.



## 6. Discontinuità delle funzioni monotòne

Sia $f\colon (a;b) \to \mathbb{R}$ monotòna crescente [decrescente] (di interesse è $(a;b) \subset D(f)$); e sia $x_0 \in (a;b)$.

$$\Longrightarrow \exists n_0 \ \ sempre \ \ t.c. \ \ \lim_{x\to x_0^-} f(x) \quad e \quad \lim_{x\to x_0^+} f(x)$$

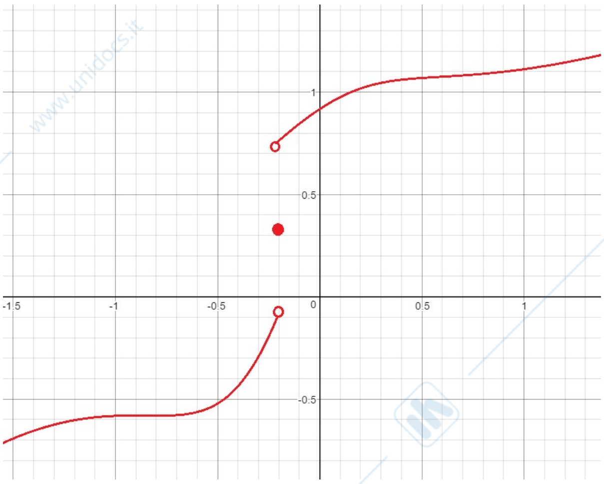
Inoltre

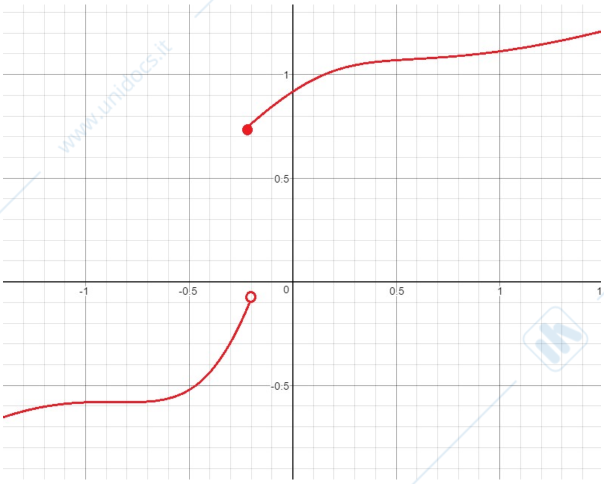
$$\lim_{x\to x_0^-} f(x) \leq f(x) \leq \lim_{x\to x_0^+} f(x)$$

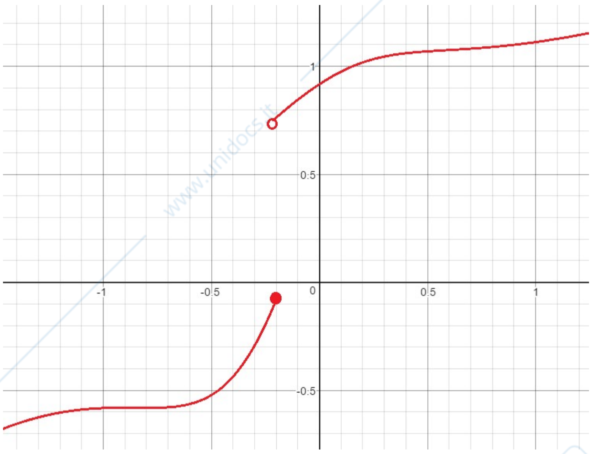
<u>Conclusione</u>:

Se $x_0$ è punto di discontinuità $\Longrightarrow$ è punto di discontinuità di tipo *salto*.

Si possono avere 3 tipi:



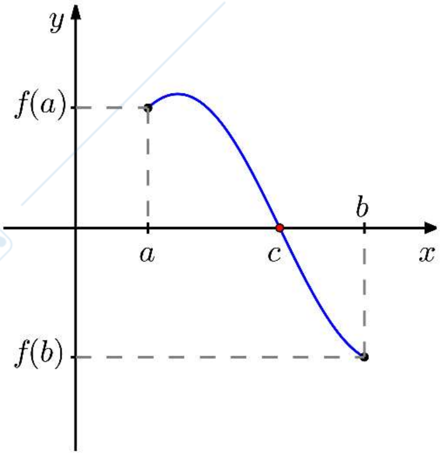



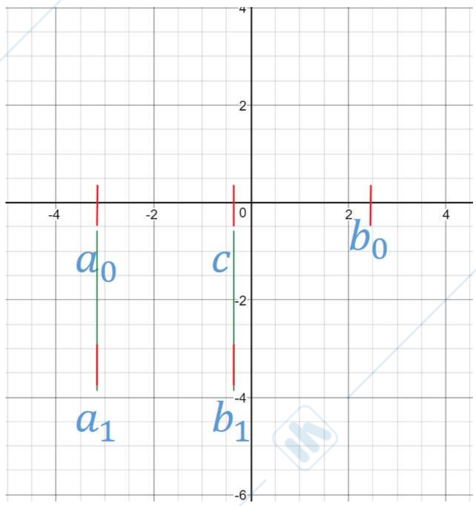

## 7. Teoremi fondamentali sulle funzioni continue definite in un intervallo chiuso e limitato

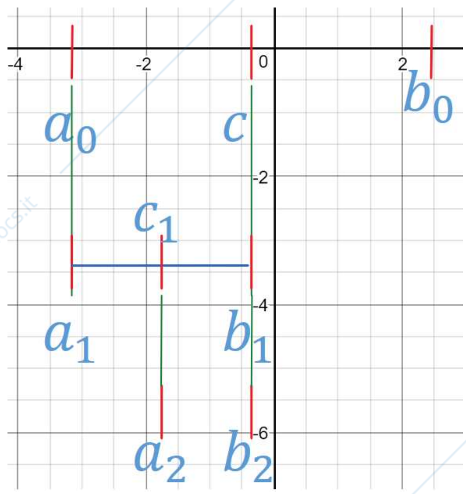
**Teorema degli zeri.** Sia $f\colon [a;b] \to \mathbb{R}$ una funzione continua e tale che

$$f(a) \cdot f(b) < 0$$

Allora $\exists \, x \in (a;b) \ \ t.c. \ \ f(x) = 0$.




<u>Dimostrazione</u>: Sia $c = \frac{b-a}{2}$, e si calcoli

$$f(c) = \begin{cases} > 0 & \text{si calcola } b_1 = c \text{ e } a_1 = a_0 \\ \quad = 0 & verificato \\ < 0 & \text{si calcola } b_1 = b_0 \text{ e } a_1 = c \end{cases}$$

Iterando la procedura, si ottengono più punti $c$. Ad esempio:

$$f(c_1) = \begin{cases} > 0 & \text{si calcola } a_2 = a_1 \text{ e } b_2 = c_1 \\ \quad = 0 & verificato \\ < 0 & \text{si calcola } a_2 = c_1 \text{ e } b_2 = b_1 \end{cases}$$

Con questo metodo si ottengono le successioni

$$a_n \quad \text{e} \quad b_n$$

1. $a_n$ è crescente
2. $b_n$ è decrescente

   Da cui: $\quad a_n \leq b_0 \quad$ e $\quad b_n \geq a_0$
3. $\forall n \;\; a_0 \leq a_n \leq b_n \leq b$
4. $0 < b_n - a_n = \frac{L}{2^n}$ dove $\quad L = b - a$

   (Per cui si avrà $L, \frac{L}{2}, \frac{L}{4}$, ecc.)

Poiché $a_n$ è crescente e limitata

$$a_n \to p \in (a; b)$$

$a_n \to p$ segue dal teorema delle successioni monotòne limitate.

$$\text{Per } permanenza\ del\ segno \begin{cases} a_n \leq b & \Rightarrow \quad p \leq b \\ a_n \geq a & \Rightarrow \quad p \geq a \end{cases}$$

$$(\Rightarrow) \quad \begin{cases} a_n - a \geq 0 \\ a_n - a \to p - a \end{cases} \quad \Rightarrow \quad p - a \geq 0$$

Analogamente

$$b_n \to q \in [a; b] \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} a_n \to p \\ b_n \to p \end{cases}$$

Si dimostra dunque $p = q$

$$|p - q| = |p - a_n + a_n - b_n + b_n - q| \leq$$
$$|p - a_n| + |a_n - b_n| + |b_n - q| = |p - a_n| + |b_n - q| + \frac{L}{2^n} \quad vera\ \forall n$$

Se $n \to 0$

$$\Rightarrow \begin{cases} |p - a_n| \to 0 \\ |b_n - q| \to 0 \\ \dfrac{L}{2^n} \to 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow |p - q| < \{di\ una\ quantità\ che\ può\ essere\ resa\ piccola\ a\ piacere\}$$
$$\Rightarrow |p - q| < \varepsilon$$
$$\Rightarrow \quad |p - q| = 0 \iff p = q$$

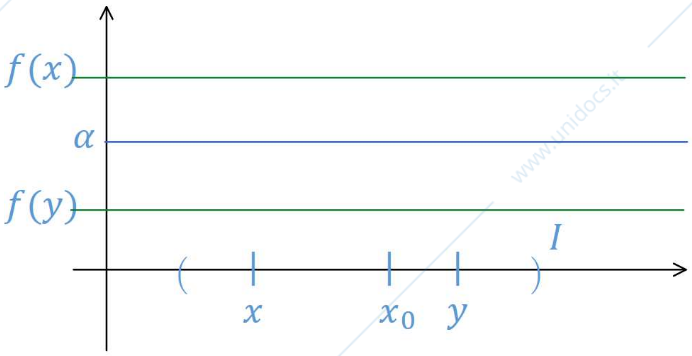
<u>Conclusione</u>: Si chiami $x_0$ il punto $p = q$

$$\exists x_0 \in [a; b] \quad t.c. \quad a_n \to x_0 \ \text{ e } \ b_n \to x_0$$
$$\Rightarrow \ Usando\ la\ continuità\ si\ ha$$
$$f(a_n) \to f(x_0) \ \text{ e } \ f(b_n) \to f(x_0) \quad (continuità\ in\ x_0)$$

$$\begin{matrix} f(a_n) \to f(x_0) \\ f(b_n) \to f(x_0) \end{matrix} \quad ma \quad \begin{matrix} f(a_n) \leq 0 \Rightarrow \lim f(a_n) = f(x_0) \leq 0 \\ f(b_n) \geq 0 \Rightarrow \lim f(b_n) = f(x_0) \geq 0 \end{matrix} \quad (permanenza\ del\ segno)$$

$$\Rightarrow \quad 0 \leq f(x_0) \leq 0 \quad \Rightarrow \quad f(x_0) = 0$$

**Teorema di Darboux (dei valori intermedi)**. Sia $f: I \to \mathbb{R}$, con $I$ intervallo in $\mathbb{R}$. Si dice che $f$ soddisfa la *proprietà di Darboux (o dei valori intermedi)* su $I$ se presi $x < y$, con $x, y \in I$, allora la $f$ assume nell'intervallo $[x; y]$ tutti i valori compresi fra $f(x)$ e $f(y)$.




<u>Conseguenza</u>: Se $I$ è un intervallo e la funzione $f: I \to \mathbb{R}$ segue il teorema di Darboux, allora $f(I)$ è un intervallo.

**Teorema. Proprietà di Darboux**. Sia $f: [a; b] \to \mathbb{R}$ continua $\Rightarrow$ $f$ è di Darboux.

<u>Dimostrazione</u>: Siano $c, d$ tali che $a \leq c < d \leq b$.

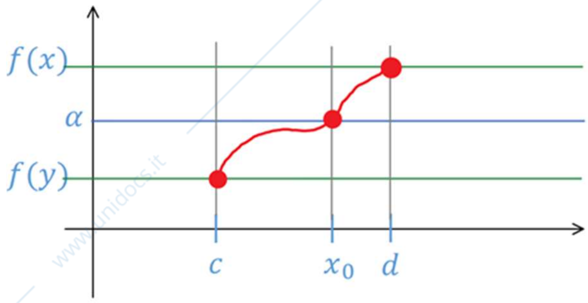
Si supponga che $f(c) < f(d)$.

Si sceglie un qualsiasi valore

$$f(c) < \alpha < f(d)$$

dunque si vuole trovare $x_0 \in (c; d) \quad t.c.$

$$f(x_0) = \alpha$$



Successivamente si sceglie $g(x) = f(x) - \alpha$, con

$$g: [c; d] \to \mathbb{R} \quad (g \; continua \text{ in } [c; d])$$

Inoltre

$$\begin{cases} g(c) = f(c) - \alpha < 0 \\ g(d) = f(d) - \alpha > 0 \end{cases} \implies$$

<u>Conclusione</u>: la funzione $g$ soddisfa il teorema degli zeri in $[c; d]$, dunque

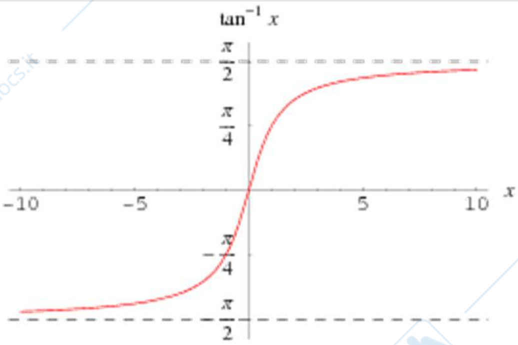
$$\implies \exists x \in (c; d) \quad t.c. \quad g(x) = 0$$

$$\implies f(x_0) - \alpha = 0 \implies f(x_0) = \alpha$$

**Teorema di Weierstrass.** Sia la funzione $f: [a; b] \to \mathbb{R}$ continua $\implies$ allora la funzione $f$ *ammette minimo* e *massimo*.

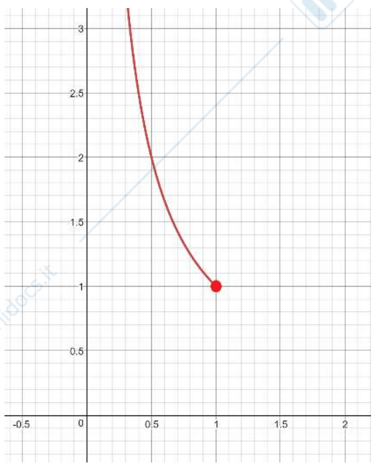
<u>Controesempi</u>:

- $f(x) = \arctan x \qquad I(f) = \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$




Essa non ha intervallo chiuso e limitato $\implies$ non ha min e max.
Non essendo limitata in $\mathbb{R}$, non è applicabile il teorema di Weierstrass.

- $f(x) = \frac{1}{x}$, definita in $(0; 1]$




L'immagine di $f$ è

$$I(f) = [1; +\infty)$$

Non essendo un insieme essendo chiuso e limitato, la funzione non ammette max.

<u>Dimostrazione</u>: (caso del massimo)
Sia $M = \sup_f \in (-\infty; +\infty]$

$$\exists x_n \in [0; 1] \quad t.c. \quad f(x_n) \to M$$

$x_n$ (successione) è limitata, poiché contenuta in $[a; b]$.
Dal teorema di Bolzano-Weierstrass:
$\implies \exists x \in \mathbb{R}$ e un successione $x_{n_k} \to x$

$$\left.\begin{array}{l} \text{Poichè } x_{n_k} \le b \implies x \le b \quad (permanenza\; del\; segno) \\ \text{Poichè } x_{n_k} \ge a \implies x \ge a \quad (permanenza\; del\; segno) \end{array}\right. \implies x \in [a; b]$$

Dunque:

- $x_{n_k} \to x \;\; (continuità) \implies f(x_{n_k}) \to f(x)$
- $f(x_0) \to M \implies f(x_{n_k}) \to M$

$$\implies (unicità\; del\; limite) \;\; M = f(x)$$

**Teorema**. Data $f: [a;b] \to \mathbb{R}$ continua $\Longrightarrow$ $f([a;b]) = [n;M]$.
Dove $m = \min_f$ e $M = \max_f$.

**Corollario**. Sia $f: [a;b] \to \mathbb{R}$ una funzione monotòna crescente/decrescente.
$\Longrightarrow$ allora $f$ è continua $\Leftrightarrow$ $f([a;b]) = [m;M]$

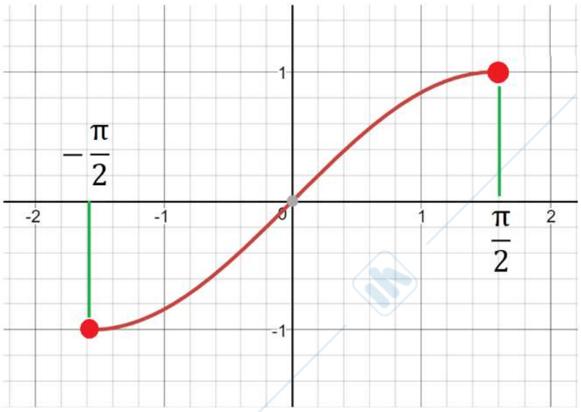
Dimostrazione:

- $\Longrightarrow$ è verificata
- $\Longleftarrow$ :

se $f$ non è continua $\Longrightarrow \exists$ almeno un punto di discontinuità.
$\Longrightarrow \exists$ almeno un *salto* (l'immagine non ha buchi).

**Corollario**. Sia $f: [a;b] \to [m;M]$ continua e invertibile. Allora la funzione inversa $f^{-1}: [m;M] \to [a;b]$ è continua.

Dimostrazione: $f^{-1}([m;M]) = [a;b]$




**Esempio**. $\lim_{x \to x_0} \sin x = \sin x_0$

$$\lim_{n \to 0} \sin(x_0 + h) = \sin x_0$$

$$\sin(x_0 + h) = \sin x_0 \cos h \, \{\to 0\} + \cos x_0 \sin h \, \{\to 0\}$$

$$f: \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right] \to [-1;1]$$

$f^{-1}(x) = \arcsin x$ è continua, perché $\sin x$ è continua.

**Teorema**. La funzione $f$ è crescente e invertibile $\Longrightarrow f^{-1}$ è crescente.

**Esempio**. $f(x) = x \ :\to \ crescente$

$$f^{-1}(x) = x \ :\to \ crescente$$

Dimostrazione: $y_1 < y_2 \Longrightarrow f^{-1}(y_1) < f^{-1}(y_2)$

$$y_1 = f(x_1) \quad \text{e} \quad y_2 = f(x_2) \qquad [perch\grave{e}\ f\ strett.cresc.]$$

$$\Longrightarrow x_1 < x_2$$

$$f^{-1}(y_1) = f^{-1}\big(f(x_1)\big) = x_1$$

$$f^{-1}(y_2) = f^{-1}\big(f(x_2)\big) = x_2$$

**Teorema**. Sia la funzione $f: [a;b] \to [m;M]$ continua e biunivoca, e dunque invertibile. Allora $f$ è necessariamente monotòna.

**Esempio - controesempio**. $f: [0;1] \to [0;1]$
La funzione è non continua e non monotòna.
(Non essendo monotòna non è neppure continua)