Analisi Matematica 1 e Geometria - 2 febbraio 2015

Ing. Chimica & Materiali - Proff. Gazzola - Migliavacca - Talamo

Teoria (3 punti) Sia $L : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ un'applicazione lineare: dimostrare che L è iniettiva se e solo se $\ker(L) = \{0\}$.

1) (6 punti) Si considerino i due piani di equazioni rispettive

$$x + y - 2z = 0 , \qquad x - y + 2z + 2 = 0 .$$

• Scrivere le equazioni parametriche della retta r intersezione dei due piani.
• Determinare il simmetrico del punto $P(0, 0, 7)$ rispetto alla retta r.
• Scrivere l'equazione della sfera centrata in P e tangente alla retta r.

2) (6 punti) Per ogni $k \in \mathbb{R}$ sia $L_k : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ l'applicazione lineare associata alla matrice

$$A_k = \begin{pmatrix} 1 & -1 & k \\ -k & 2 & -4 \end{pmatrix} .$$

• Stabilire per quali valori di k è suriettiva e per quali valori di k è iniettiva.
• Per i valori di k per i quali non è suriettiva, determinare l'immagine di L.

3) (6 punti) Risolvere la seguente equazione in campo complesso:

$$(z^3 - 8)(\bar{z} + 8 - 7i)(z^2 - 2iz + 1) = 0 .$$

4) (6 punti) Per ogni $k \in \mathbb{R}$ si consideri la matrice

$$A_k = \begin{pmatrix} 3 & 9 & k \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 9 & 4 \end{pmatrix} .$$

• Determinare il valore λ_1 che risulta autovalore di A_k per qualunque $k \in \mathbb{R}$.
• Determinare k in modo che λ_1 abbia molteplicità algebrica 2 e stabilire se per tale valore di k la matrice A_k risulta diagonalizzabile.
• Stabilire se $A_{-1/4}$ risulta diagonalizzabile.

Politecnico di Milano Ing. Chimica e Ing. dei Materiali	*Analisi Matematica I e Geometria* Prova in itinere – PRIMA PARTE	2 febbraio 2015
Cognome:	**Nome:**	**Matricola:**

1. Determinare l'inversa della matrice
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}.$$

2. Determinare gli autovalori della matrice A dell'esercizio precedente.

3. Calcolare le radici seste del numero complesso $z = i$.

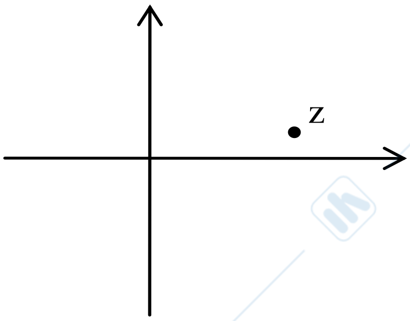
4. Risolvere il sistema lineare
$$\begin{cases} 2x + y = 5 \\ x - y = 1 . \end{cases}$$

5. Stabilire se l'applicazione lineare $L : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definita da $L(x, y, z) = (x + y, y + z, x + z)$ è iniettiva.

6. Sia $\mathcal{B} = \{1 + x^2, x - 1, 7\}$. Sapendo che $\mathcal{B}$ è una base dello spazio dei polinomi di grado minore o uguale a 2 (non è richiesta la verifica di tale affermazione), siano $(1, 3, -1)$ le coordinate rispetto a $\mathcal{B}$ di un certo polinimio $p(x)$. Determinare $p(x)$.

7. Determinare in forma parametrica la retta passante per i punti: $(1, 2, 3)$ e $(4, 2, 1)$.

8. Sia z il numero complesso rappresentato in figura e sia $w = \frac{\sqrt{2}}{4} - i\frac{\sqrt{2}}{4}$. Rappresentare in figura $z \cdot w$.



9. Determinare l'area del triangolo che ha un vertice nell'origine e gli altri due in $(1, 2, 1)$ e $(3, 1, 2)$.

10. Sia r la retta passante per $(-8, 0, 3)$ con direzione $(5, 1, -2)$ e sia s la retta passante per $(-2, 0, 1)$ con direzione $(1, -1, 0)$. Determinare la posizione reciproca delle due rette r ed s.

Ingegneria Chimica, dei Materiali e delle Nanotecnologie

Analisi Matematica I e Geometria (PRIMA PARTE) - 27 novembre 2015

1. Determinare l'equazione della retta tangente al grafico di $f(x) = \arctan x$ nel punto di ascissa $x = 1$.

2. Calcolare $\lim_{n \to +\infty} \dfrac{n^2 + \sinh(n)}{n^2 + \cosh(2n)}$.

3. Senza fare calcoli, disegnare il grafico qualitativo della funzione $f(x) = x^{2/3} + x^{5/4}$.

4. Nello sviluppo del binomio $(2x - y)^7$, calcolare il coefficiente del termine $x^2 y^5$.

5. Stabilire se è invertibile su $\mathbb{R}$ la funzione $f(x) = e^x - x$.

6. Determinare il polinomio di McLaurin di quarto grado della funzione $f(x) = \sin x - x$.

7. Stabilire quante soluzioni ammette l'equazione $\arcsin x = \arccos x$ nell'intervallo $[0, 1]$.

8. Calcolare $\int_0^1 (3x+1)^5 \, dx$.

9. Determinare la pendenza massima delle rette tengenti al grafico della funzione $f(x) = \log(1 + x^2)$.

10. Stabilire per quali valori di $\alpha \in \mathbb{R}$ risulta finito e diverso da 0 il limite

$$\lim_{n \to \infty} n^\alpha \left(1 - \cos \frac{1}{n^2}\right).$$

Ingegneria Chimica, dei Materiali e delle Nanotecnologie

Analisi Matematica I e Geometria (SECONDA PARTE) - 27 novembre 2015

Teoria. (3 punti) Enunciare e dimostrare il teorema fondamentale del calcolo (I) (teorema di valutazione).

Soluzione. Confrontare il libro di testo.

1. (8 punti) Si studi la funzione

$$f(x) = \arctan\left(\frac{|x|}{x+1}\right)$$

precisandone in particolare: dominio di definizione, segno e zeri, limiti agli estremi del dominio di definizione, eventuali asintoti, derivata, intervalli di monotonia, eventuali punti di estremo relativo o assoluto, limiti della derivata, eventuali punti di non derivabilità, derivata seconda, concavità. Disegnare poi un grafico qualitativo della funzione.

Soluzione. La funzione è definita per $x \neq -1$. In $x = 0$ è nulla, è positiva in $(-1, 0) \cup (0, +\infty)$ e negativa in $(-\infty, -1)$.

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \frac{\pi}{4}, \qquad \lim_{x\to-\infty} f(x) = -\frac{\pi}{4}, \qquad \lim_{x\to-1^+} f(x) = \frac{\pi}{2}, \qquad \lim_{x\to-1^-} f(x) = -\frac{\pi}{2}.$$

La retta di equazione $y = \pi/4$ è asintoto orizzontale per la funzione quando $x \to +\infty$, mentre la retta di equazione $y = -\pi/4$ è asintoto orizzontale quando $x \to -\infty$.
Calcolando la derivata prima si ha, per $x > 0$:

$$f'(x) = \frac{1}{1 + \frac{x^2}{(x+1)^2}} \frac{x+1-x}{(x+1)^2} = \frac{1}{2x^2 + 2x + 1},$$

mentre per $x < 0$, $x \neq -1$,

$$f'(x) = \frac{1}{1 + \frac{x^2}{(x+1)^2}} \frac{-x-1+x}{(x+1)^2} = -\frac{1}{2x^2 + 2x + 1}.$$

Essendo

$$\lim_{x\to0^+} f'(x) = 1 \qquad \text{e} \qquad \lim_{x\to0^-} f'(x) = -1,$$

$x = 0$ è un punto angoloso. $f'(x) < 0$ in $(0, +\infty)$ ove f risulta crescente e $f'(x) < 0$ in $(-\infty, -1) \cap (-1, 0)$, ove f risulta decrescente. Inoltre, osserviamo che

$$\lim_{x\to-1^+} f'(x) = 1 \qquad \text{e} \qquad \lim_{x\to-1^-} f'(x) = -1.$$

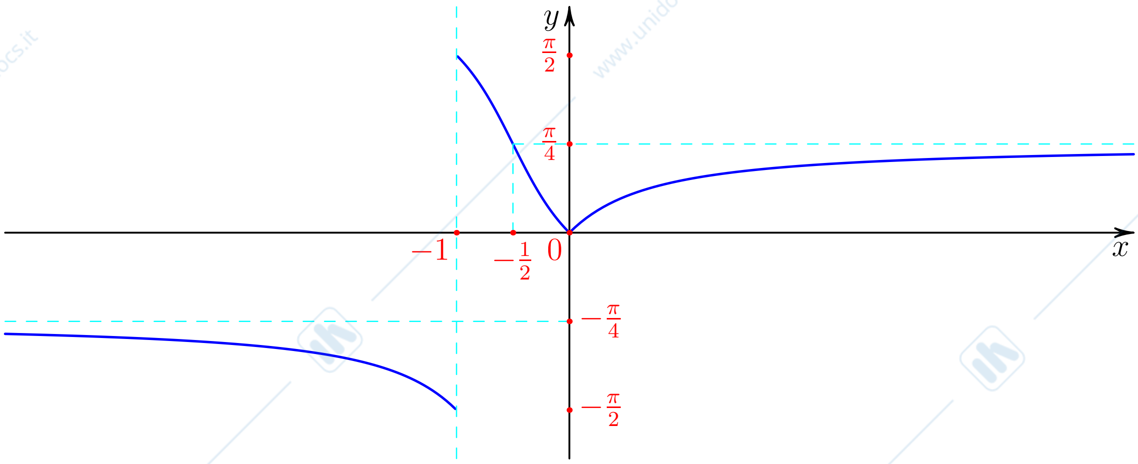
La derivata seconda per $x > 0$ è

$$f''(x) = -\frac{1}{(2x^2 + 2x + 1)^2}(4x + 2),$$

mentre per $x < 0$, $x \neq -1$,

$$f''(x) = \frac{1}{(2x^2 + 2x + 1)^2}(4x + 2).$$

Da cui si ricava che è positiva per $x \in (-1/2, 0)$. Dunque f è convessa nell'intervallo $(-1/2, 0)$. f'' è negativa in $(-\infty, -1) \cup (-1, -1/2) \cup (0, +\infty)$, ove f risulta concava. Il punto $x = -1/2$ è un punto di flesso.



2. (4 punti) Calcolare il limite

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin(1-\cos x) + 1 - e^{\frac{x^2}{2}}}{\sqrt{1+x^2}-1}.$$

Soluzione. Essendo, per $x \to 0$,

$$\sqrt{1+x^2} - 1 = \frac{x^2}{2} + o(x^2),$$

è sufficiente calcolare lo sviluppo di McLaurin della funzione al denominatore fino all'ordine 2. Abbiamo

$$\sin(1-\cos x) = 1 - \cos x + o((1-\cos x)) = \frac{x^2}{2} + o(x^2) \qquad \text{e} \qquad e^{\frac{x^2}{2}} = 1 + \frac{x^2}{2} + o(x^2),$$

da cui

$$\sin(1-\cos x) + 1 - e^{\frac{x^2}{2}} = o(x^2).$$

Otteniamo quindi

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin(1-\cos x) + 1 - e^{\frac{x^2}{2}}}{\sqrt{1+x^2}-1} = \lim_{x\to 0} \frac{o(x^2)}{x^2} = 0.$$

3. (4 punti) Al variare del parametro $a > 0$ calcolare il limite

$$\lim_{n\to\infty} n^a \left(e^{\frac{1}{n}} - \log(1 + \tfrac{1}{n}) - a \right).$$

Soluzione. Osserviamo che, per $n \to \infty$

$$e^{\frac{1}{n}} - \log(1+\tfrac{1}{n}) - a = 1 + \frac{1}{n} + \frac{1}{2n^2} + o\Big(\frac{1}{n^2}\Big) - \frac{1}{n} + \frac{1}{2n^2} + o\Big(\frac{1}{n^2}\Big) - a = 1 - a + \frac{1}{n^2} + o\Big(\frac{1}{n^2}\Big).$$

Se $a \neq 1$, per $n \to \infty$,

$$n^a \Big(e^{\frac{1}{n}} - \log(1+\tfrac{1}{n}) - a \Big) \sim n^a(1-a) \to \begin{cases} +\infty & \text{se } 0 < a < 1 \\ -\infty & \text{se } a > 1. \end{cases}$$

Se $a = 1$,

$$n^a \Big(e^{\frac{1}{n}} - \log(1+\tfrac{1}{n}) - a \Big) \sim n \frac{1}{n^2} \to 0.$$

4. (8 punti) Calcolare i seguenti integrali

$$(a)\ \int_0^{1/\sqrt{2}} \frac{x}{\sqrt{1-x^4}}\,dx\ , \qquad (b)\ \int_0^{\sqrt{3}-1} \frac{dx}{x^2+2x+4}\ , \qquad (c)\ \int_0^1 \log(1+x^2)\,dx\ .$$

Soluzione. (a) Con la sostituzione $x^2 = \sin t$, da cui $t = \arcsin x^2$, abbiamo

$$\int \frac{x}{\sqrt{1-x^4}}\,dx = \frac{1}{2}\int \frac{\cos t}{\cos t}\,dt = \frac{1}{2}t + c = \frac{1}{2}\arcsin x^2 + c.$$

L'integrale richiesto è

$$\int_0^{1/\sqrt{2}} \frac{x}{\sqrt{1-x^4}}\,dx = \frac{1}{2}\arcsin\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\arcsin 0 = \frac{1}{2}\frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{12}.$$

(b) Abbiamo

$$\int \frac{dx}{x^2+2x+4} = \int \frac{dx}{(x+1)^2+3} = \frac{1}{3}\int \frac{dx}{\frac{(x+1)^2}{3}+1} = \frac{1}{3}\sqrt{3}\arctan\frac{x+1}{\sqrt{3}} + c,$$

da cui

$$\int_0^{\sqrt{3}-1} \frac{dx}{x^2+2x+4} = \frac{1}{\sqrt{3}}\arctan 1 - \frac{1}{\sqrt{3}}\arctan\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}}\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\pi}{12\sqrt{3}}.$$

(c) Integrando per parti si ottiene

$$\begin{aligned}\int \log(1+x^2)\,dx &= x\log(1+x^2) - \int \frac{2x^2}{1+x^2}\,dx = x\log(1+x^2) - 2\int \left(1-\frac{1}{1+x^2}\right)dx \\ &= x\log(1+x^2) - 2x + 2\arctan x + c,\end{aligned}$$

da cui

$$\int_0^1 \log(1+x^2)\,dx = \log 2 - 2 + 2\arctan 1 = \log 2 - 2 + \frac{\pi}{2}.$$