Logica e calcolo proposizionale

venerdì 21 settembre 2018 14:56

① **PROPOSIZIONE**: Frase di cui si può stabilire il valore di verità.

ES: $3 > 2$ ✓

OGGI PIOVE ✓

② **CONNETTIVI LOGICI**: elementi che "legano" le proposizioni

⊙ **CONGIUNZIONE**; "e"; $\wedge$

Date due proposizioni P, Q la proposizione $P \wedge Q$ è vera solo quando sono vere sia P che Q.

⊙ **DISGIUNZIONE**; "o"; $\vee$

Date due proposizioni P, Q la proposizione $P \vee Q$ è vera solo quando è vera almeno 1 tra P e Q.

⊙ **IMPLICAZIONE**; "se... allora..."; $\Rightarrow$

Date due prop. P, Q la proposizione $P \Rightarrow Q$ è vera quando Q discende da P. Si dice allora che P è condizione sufficiente per Q, ovvero che Q è condizione necessaria per P.

⊙ **DOPPIA IMPLICAZIONE**: "...se e solo se..."; $\Leftrightarrow$

" " " $P \Leftrightarrow Q$ è vera quando sono entrambe vere o entrambe false.

⊙ **NEGAZIONE**: "non"; $\neg$

Una prop. P costituisce $\neg P$ vera solo quando P è falsa.

TAVOLE DI VERITÀ:

Q	$P \wedge Q$	$P \vee Q$	$P \Rightarrow Q$	$P \Leftrightarrow Q$	$\neg P$
V	V	V	V	V	F
F	F	V	F	F	F
V	F	V	V	F	V
F	F	F	V	V	V

OSS: 2 proposizioni sono **EQUIVALENTI** se hanno le stesse tavole di verità

ES: $P \Rightarrow Q$ è EQUIVALENTE a $\neg Q \Rightarrow \neg P$.

3) QUANTIFICATORI

In una frase possono naturalmente comparire delle variabili:

ES $x > 1$

- $\forall$ PER OGNI
- $\exists$ ESISTE
- $\exists!$ ESISTE UNICO.

ES
$\forall x \quad x > 1 \quad$ F
$\exists x : x > 1 \quad$ V
$\exists! x : x > 1 \quad$ F.

NEGARE QUANTIFICATORI.

- $\neg(\forall x, x > 1)$ vuol dire $\exists x : x \leq 1$
- $\neg(\exists x : x > 1)$ vuol dire $\forall x \quad x \leq 1$

COSA È UN INSIEME?

DEF. Raccolta di oggetti (detti elementi o punti dell'insieme)

NOTAZIONE: indicheremo gli insiemi con le maiuscole $A, B, C \dots$

" " elementi " " minuscole $a, b, c \dots$

COME SI ASSEGNA UN INSIEME?

Si intende assegnato quando preso un oggetto a l'espressione

$a \in A$ (a appartiene ad A)

è una PROPOSIZIONE, i.e. è possibile stabilirne il valore di verità.

2 modi per indicare un insieme:

$$A = \{2, 5, 7, 11, \dots\} = \{x \in U : p(x)\}$$

ES $C = \{1, 3, 5, 7, 9\} = \{x \in \mathbb{N} : x \text{ dispari} \wedge x < 10\}$

NOTAZIONE: $a \in A$ APPARTIENE

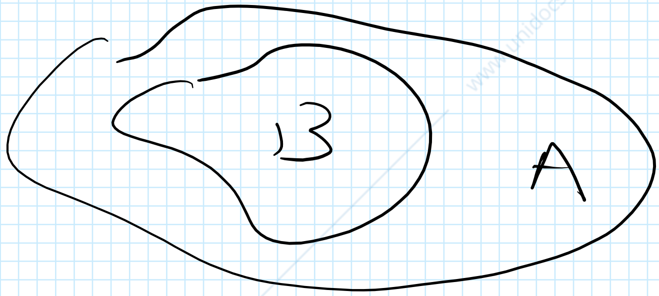
$a \notin A$ NON APPARTIENE.

OSS. Si postula l'esistenza di un insieme privo di elementi

INSIEME VUOTO: $\emptyset$

(i.e. $x \in \emptyset$ è SEMPRE FALSA.)

- SOTTOINSIEMI: B è sottoinsieme di A (B è CONTENUTO in A, $B \subseteq A$) se ogni elemento di B è anche elemento di A:



⊙ OPERAZIONI TRA INSIEMI

a) UNIONE $\cup$: Dati 2 insiemi A e B si definisce $A \cup B$ l'insieme costituito da tutti e soli gli elementi che appartengono ad almeno 1 dei 2 insiemi.

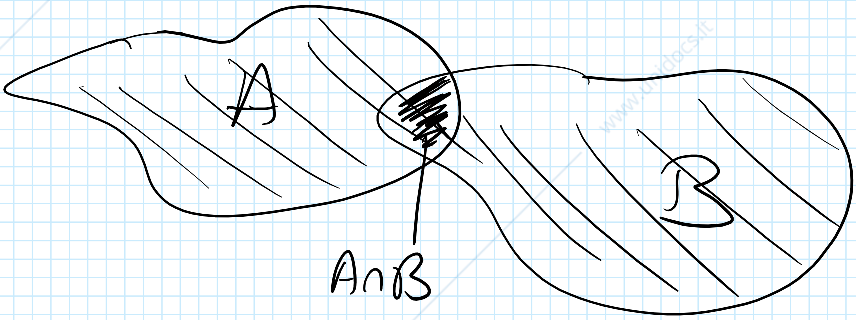
$$x \in A \cup B \iff x \in A \vee x \in B$$

b) INTERSEZIONE $\cap$: " " " " $A \cap B$

" . . . .

che appartengono sia ad A che a B.

$$x \in A \cap B \iff x \in A \wedge x \in B.$$

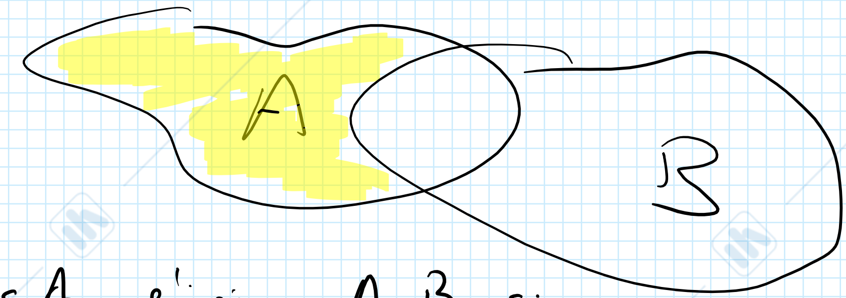


$A \cap B$

\\\\ $A \cup B$

⊙ DEF: Se $A \cap B = \emptyset$ A e B si dicono DISGIUNTI

c) DIFFERENZA $\setminus$ Dati 2 insiemi A e B si definisce l'insieme differenza $A \setminus B$ come l'insieme costituito da tutti quegli elementi che appartengono ad A ma non appartengono a B.



oss Se $B \subseteq A$, l'insieme $A \setminus B$ si dice insieme COMPLEMENTARE di B rispetto ad A.

$$A \setminus B = B^c$$

LEGGI DI DE MORGAN.

1° LEGGE: $(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$

2° LEGGE: $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$

DEF. Dato un insieme A si definisce l'insieme delle parti di A, $P(A)$ l'insieme i cui elementi sono tutti i sottoinsiemi di A

$$P(A) = \{ B : B \subseteq A \}$$

$$A = \{1, 3, e\}$$

$$P(A) = \{ \emptyset, \{1\}, \{3\}, \{e\}, \{1,3\}, \{1,e\}, \{3,e\}, \underbrace{\{1,3,e\}}_{A} \}.$$

DEF: Dati 2 insiemi si definisce il prodotto cartesiano $A \times B$ l'insieme delle coppie ordinate (a,b) con $a \in A$, $b \in B$

$$A \times B = \{ (a,b) : a \in A,\ b \in B \}.$$

DEF **RELAZIONE:**

Si definisce una relazione tra 2 insiemi non vuoti A, B (non necessariamente distinti) come un sottoinsieme R del prodotto cartesiano $A \times B$, e si dice che due elementi $a \in A$, $b \in B$ sono in relazione tra loro secondo la relazione R e si scrive aRb se $(a,b) \in R$.

DEF. Dato $A \neq \emptyset$ ed una relazione R in esso, si dice RELAZIONE D'ORDINE se gode delle proprietà:

1. RIFLESSIVA $\forall a \in A,\ aRa$
2. SIMMETRICA $\forall a,b \in A,\ (aRb \wedge bRa) \Rightarrow a = b$
3. TRANSITIVA $\forall a,b,c \in A\ (aRb \wedge bRc) \Rightarrow aRc.$

Se inoltre vale $\forall a,b \in A,\ aRb \vee bRa$

$\Rightarrow$ la relazione si dice di ORDINE TOTALE.

$\boxed{ES}$ $(\mathbb{R}, \leq)$ è di ordine totale.