

Esercizio 1. Calcolare i seguenti integrali (eventualmente utilizzando la formula di integrazione per sostituzione):

$$\int_0^1 x(x^2 + 4)^5 dx; \quad \int_0^1 \frac{\sin x}{1 + \cos x} dx; \quad \int_0^1 x \sqrt{1 - x^2} dx; \quad \int_1^{e^4} \frac{e^{\sqrt{\ln x}}}{x \sqrt{\ln x}} dx;$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan x dx; \quad \int_1^2 \tan^2 x (1 + \tan^2 x) dx; \quad \int_0^{\sqrt{\ln 2}} 3x e^{x^2} dx; \quad \int_0^{\frac{\pi^2}{4}} \frac{\sin \sqrt{x}}{\sqrt{x}} dx;$$

$$\int_0^1 \cosh^2 x dx; \quad \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1 - \sin x}{x + \cos x} dx; \quad \int_0^{\frac{\pi^3}{64}} \frac{dx}{x^{\frac{2}{3}} \cos^2(x^{\frac{1}{3}})}; \quad \int_1^2 \frac{dx}{x(1 - \ln^2 x)^{\frac{1}{2}}};$$

$$\int_1^{e^3} \frac{dx}{x \sqrt{1 + \ln x}}; \quad \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1 + \sin x}{(x - \cos x)^3} dx; \quad \int_0^{\frac{\pi^2}{16}} \frac{dx}{\sqrt{x} \cos^2(\sqrt{x})}; \quad \int_1^2 \frac{dx}{x \sqrt{x^2 - 1}};$$

$$\int_2^{e^2} \frac{dx}{x (\ln x)^3}; \quad \int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{\arcsin^2 x}{\sqrt{1 - x^2}} dx; \quad \int_0^1 e^{(x^2 - x)}(2x - 1) dx; \quad \int_{\frac{\sqrt{\pi}}{2}}^{\sqrt{\frac{\pi}{3}}} \frac{x \cos^2 x}{\sin^2 x} dx.$$

Esercizio 2. Calcolare i seguenti integrali (utilizzando la formula di integrazione per parti):

$$\int_0^1 x \sin x dx; \quad \int_1^2 \arctan x dx; \quad \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^x \sin x dx; \quad \int_0^1 x \arctan^2 x dx;$$

$$\int_0^2 x^2 e^x dx; \quad \int_0^{\frac{1}{2}} \arcsin x dx; \quad \int_1^2 \frac{\ln(x+1)}{x^{\frac{3}{2}}} dx; \quad \int_1^2 \frac{x}{\cos^2 x} dx; \quad \int_1^2 \sin^2 x dx;$$

$$\int_1^e \ln^2 x dx; \quad \int_1^2 x^2 \ln x dx; \quad \int_e^{e^e} \frac{\ln(\ln x)}{x} dx; \quad \int_1^{\sqrt{2}} \frac{\sqrt{1 - x^2}}{x^2} dx; \quad \int_0^{\frac{\pi}{2}} x \cos^2 x dx.$$

Esercizio 3. Calcolare i seguenti integrali (utilizzando la formula di integrazione per funzioni razionali):

$$\int_1^2 \frac{1 + x^2}{x + 1} dx; \quad \int_1^2 \frac{x}{(x + 1)(2x + 1)} dx; \quad \int_1^2 \frac{dx}{x^2 + x + 1}; \quad \int_1^2 \frac{dx}{x(x + 1)^2} dx;$$

$$\int_1^2 \frac{1 + x}{x(1 + x^2)} dx; \quad \int_1^2 \frac{2 + x}{2x^2 + 4x + 3} dx; \quad \int_2^3 \frac{dx}{x^3 - x}; \quad \int_5^6 \frac{dx}{(x - 2)(x + 1)^2};$$

$$\int_{\frac{1}{\sqrt{2}}}^{\sqrt{2}} \frac{dx}{x^4 + 1}; \quad \int_1^2 \frac{x + x^3}{x^4 + x^2 + 16} dx; \quad \int_5^6 \frac{x^2 - 1}{(x - 1)(3x + 2)} dx; \quad \int_2^3 \frac{dx}{x^4 - 1};$$

8.1. CALCOLO INTEGRALE

45

$$\int_0^3 \frac{5x+4}{(x^2+1)(x+3)} dx; \quad \int_0^3 \frac{3x-1}{(x+5)(x+2)^2} dx; \quad \int_5^6 \frac{2x^2+3}{(x-1)(x^2+3)} dx;$$

$$\int_3^4 \frac{x^2+3x}{(x-7)(x+2)^2} dx; \quad \int_{\frac{-1-\sqrt{5}}{2}}^{\frac{-1+\sqrt{5}}{2}} \frac{x^2+2x+2}{x(x+1)(x+2)} dx; \quad \int_2^3 \frac{x+1}{x^2(x-1)^2} dx.$$

Esercizio 4. Calcolare i seguenti integrali (utilizzando opportunamente la formula di integrazione per sostituzione, la formula di integrazione per parti e la formula di integrazione delle funzioni razionali):

$$\int_0^1 \frac{e^x - e^{-x}}{e^{2x} + 2} dx; \quad \int_0^1 \sqrt{x} \arctan(\sqrt{x} - 4) dx; \quad \int_1^e x \frac{\ln x}{x(2 + \ln x)(1 + \ln x)} dx;$$

$$\int_0^{16} \frac{dx}{x\sqrt{x+9}}; \quad \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{\sin x (\cos^2 x + 1)}; \quad \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{(3 - \sin x)(4 - \cos^2 x)} dx;$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{dx}{1 + \tan x}; \quad \int_1^2 \frac{dx}{\sinh^2(5x+1)}; \quad \int_0^1 \sqrt{2-x^2} dx; \quad \int_0^1 \sqrt{x^2+2x+3} dx;$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{dx}{1 + \sin x}; \quad \int_0^1 \arctan \sqrt{x} dx; \quad \int_0^{\log_3 2} \sqrt{3^x - 1} dx; \quad \int_0^1 \frac{dx}{1 + e^x};$$

$$\int_0^{e^{\frac{\pi}{2}}} \sin(\ln x); \quad \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{\sin x}; \quad \int_1^3 \frac{\ln x}{\sqrt{x}(\sqrt{x}+1)^2} dx; \quad \int_0^1 \frac{dx}{\cosh^2(2x)};$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{1 + \cos^2 x}; \quad \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{\cos x - 1}; \quad \int_0^1 \frac{x \arcsin x}{\sqrt{1-x^2}} dx; \quad \int_1^2 \frac{\ln(1+3x^2)}{x^3} dx.$$

Esercizio 5. Calcolare i seguenti integrali:

$$\int_{-1}^2 \operatorname{sgn}(x) dx; \quad \int_{-1}^3 \ln(1 + |x-1|) dx; \quad \int_{-1}^3 \ln(1 + |x-1|) \cdot \operatorname{sgn}(x-1) dx;$$

$$\int_{-1}^{2.1} [x] dx; \quad \int_0^3 \sqrt{9-x^2} \cdot \operatorname{sgn}(x-2) dx; \quad \int_{-1}^3 \frac{|x^2-2x|}{x-2} dx;$$

$$\int_{-\sqrt{2}}^1 f(x) dx \quad \text{dove} \quad f(x) = \begin{cases} 2-x^2 & \text{se } x < 0, \\ e^{-x} & \text{se } x \geq 0; \end{cases}$$

$$\int_0^{2\pi} g(x) dx \quad \text{dove} \quad g(x) = \begin{cases} \sin x & \text{se } x < \frac{\pi}{2}, \\ \cos x & \text{se } x \geq \frac{\pi}{2}; \end{cases}$$

(come nell'esercizio 3 del Cap. 5, il simbolo $[\alpha]$ denota la parte intera di α).

Esercizio 6. Stabilire per quali valori del parametro α convergono i seguenti integrali generalizzati:

$$\int_1^{+\infty} \frac{x}{x^\alpha + 1} dx; \quad \int_0^{+\infty} x^\alpha (x+1)^3 dx; \quad \int_0^1 \frac{\sin x}{x^\alpha} dx; \quad \int_0^{+\infty} \frac{\sqrt{x+1} - 1}{(x^2 + x)^\alpha} dx;$$

$$\int_0^1 \frac{\sin(x^\alpha)}{e^x - 1} dx; \quad \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{dx}{x(\ln x)^\alpha}; \quad \int_0^{+\infty} \frac{x(x+1)^\alpha}{(1+x)^5 - 1} dx; \quad \int_0^1 \frac{dx}{x^2(\sin x)^\alpha}.$$

Esercizio 7. Calcolare l'area della regione piana limitata compresa tra i grafici delle seguenti coppie di funzioni (si ricordi che, date due funzioni continue f, g , se poniamo $a \doteq \min\{x : f(x) = g(x)\}$, $b \doteq \max\{x : f(x) = g(x)\}$, allora l'area della regione piana limitata compresa tra i grafici di f e g è data da $\int_a^b |f(x) - g(x)| dx$):

- (a) $f(x) = x$, $g(x) = x^3$, $x \in [0, +\infty[$;
- (b) $f(x) = \sqrt{x}$, $g(x) = x^2$, $x \in [0, +\infty[$;
- (c) $f(x) = x^3 - x$, $g(x) = 0$, $x \in \mathbb{R}$;
- (d) $f(x) = x^3$, $g(x) = 3x - 2$, $x \in \mathbb{R}$;
- (e) $f(x) = \frac{1}{x}$, $g(x) = -\frac{x}{2} + 3$, $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$;
- (f) $f(x) = \sin x$, $g(x) = \pi^2 - x^2$, $x \in \mathbb{R}$;
- (g) $f(x) = \sin x$, $g(x) = \cos x$, $x \in [0, 2\pi]$.

Esercizio 8. Usando il secondo teorema fondamentale del calcolo integrale, determinare le derivate delle seguenti funzioni:

- (a) $f(x) = \int_1^x \frac{\ln t}{t} dt$, $x \in]0, +\infty[$;
- (b) $f(x) = \int_{-x}^2 e^{-t} dt$, $x \in \mathbb{R}$;
- (c) $f(x) = \int_0^{e^x} \ln t dt$, $x \in \mathbb{R}$;
- (d) $f(x) = \int_0^x |t| dt$, $x \in \mathbb{R}$;

8.1. CALCOLO INTEGRALE

47

$$(e) \quad f(x) = \int_1^{\sqrt{|x|}} \frac{e^{-t}}{1+t^2} dt, \quad x \in \mathbb{R} \setminus \{0\};$$

$$(f) \quad f(x) = \int_1^{\ln x} \frac{e^{2t}}{t} dt, \quad x > 1;$$

$$(g) \quad f(x) = \int_{\sin x}^{\cos x} \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}, \quad x \in]0, \pi/2[;$$

$$(h) \quad f(x) = \frac{1}{x} \int_0^x t \sin^2 t dt, \quad x \in \mathbb{R} \setminus \{0\};$$

$$(i) \quad f(x) = \int_0^x \sin\left(\frac{1}{t}\right) dt, \quad x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}.$$

Esercizio 9. Calcolare il valore dei seguenti limiti:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^x \sin(t^2) dt}{x^2}; \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^x \sin(t^2) dt}{\sin^3 x}; \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \int_0^x \cos^2 t dt}{x^3}; \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \int_0^x \cos t^2 dt}{1 - \cos x};$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^{x^2} t e^t dt}{e^{x^2} - x^2}; \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^{x^2} t e^t dt}{e^{x^2} - x^2 - 1}; \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\int_0^x t e^{-\frac{1}{t^2}} dt}{x^2}; \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-2x} \int_0^x \frac{e^t}{1+t^2} dt;$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-x} \int_0^x \frac{e^{-t}}{1+t^2} dt; \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} \int_0^x t \sin\left(\frac{1}{t}\right) dt; \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \int_1^x \frac{\arctan t}{t^2} dt;$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \int_0^x \frac{e^{2t}}{1+e^{4t}} dt;$$

(per calcolare gli ultimi due limiti si suggerisce di studiare il limite della funzione integrale dopo averne determinato l'espressione).

Esercizio 10. Studiare il grafico di ciascuna delle seguenti funzioni (discutendo i punti (i)-(vii) elencati nell'esercizio 13 del Cap. 7)

(a)

$$f(x) = \int_0^x \sqrt{t} e^{-t} dt.$$

(b)

$$f(x) = \int_0^x \frac{t^2}{1-e^{-t}} dt.$$

48

CAPITOLO 8. CALCOLO INTEGRALE

(c)

$$f(x) = \int_0^x t^2 e^{-t^2} dt.$$

(d)

$$f(x) = \int_x^{2x} e^{-t^2} dt.$$

(e)

$$f(x) = \int_0^x e^{-\frac{1}{t^2}} dt.$$

(f)

$$f(x) = \int_1^x \frac{t}{1+t^6} dt.$$

(g)

$$f(x) = \int_0^x \frac{\sin^2 t}{t^2} dt.$$

Esercizio 11. Si consideri la funzione $f(x) = \int_0^x \frac{\sin t}{t} dt$. Stabilire quale delle seguenti affermazioni è corretta.

- A f è derivabile in $x = 0$ e $f'(0) = 0$.
- B f è derivabile in $x = 0$ e $f'(0) = 1$.
- C f non è derivabile in $x = 0$.
- D $\lim_{x \rightarrow 0^+} f'(x) = +\infty$.

8.1. CALCOLO INTEGRALE

49

Esercizio 12. Si consideri la funzione $f(x) = \int_0^x e^{-|t|} dt$. Stabilire quale delle seguenti affermazioni è corretta.

- A f non è derivabile in $x = 0$.
- B f è derivabile in ogni $x \in \mathbb{R}$, e $f'(x) = -e^{-|x|} \operatorname{sgn}(x)$.
- C f è derivabile in ogni $x \in \mathbb{R}$ e $f'(x) = e^{-x}$.
- D f è derivabile in $x = 0$ e $f'(0) = 1$.

Esercizio 13. Data una funzione continua $f : [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ tale che $\int_{-1}^1 f(x) dx = 0$, stabilire quale delle seguenti affermazioni è corretta.

- A se f è pari, allora deve essere $\int_0^1 f(x) dx = 0$.
- B f deve essere dispari.
- C se denotiamo $m \doteq \min f$, $M \doteq \max f$, allora può essere $m \cdot M > 0$.
- D se f è pari, allora deve essere $f(x) = 0$ per ogni $x \in [-1, 1]$.

Esercizio 14. Data la funzione

$$f(t) = \begin{cases} 2 - t^2 & \text{se } x > 0, \\ 1 + t + e^{-t} & \text{se } x \leq 0, \end{cases}$$

si consideri la funzione $F(x) = \int_0^x f(t) dt$. Stabilire quale delle seguenti affermazioni è corretta.

- A F non è continua in $x = 0$.
- B F non è derivabile in $x = 0$.
- C F è derivabile due volte in $x = 0$.
- D F ammette derivata destra e sinistra in $x = 0$ e $F'_-(0) \neq F'_+(0)$.

Esercizio 15. Si consideri la funzione $f(x) = \int_0^x t \ln t dt$, e si denoti con $P_3(x)$ il polinomio di Taylor di terzo grado, di punto iniziale $x_0 = 1$, che approssima f . Si ha:

- A $P_3(x) = \frac{(x-1)^2}{2} + \frac{(x-1)^3}{6}$.
- B $P_3(x) = -\frac{1}{4} + \frac{(x-1)^2}{2} + \frac{(x-1)^3}{6}$.
- C $P_3(x) = \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6}$.
- D $P_3(x) = (x-1) + \frac{(x-1)^2}{2} + \frac{(x-1)^3}{6}$.

Esercizio 16. Si consideri la funzione $f(x) = \int_0^x t^2 e^{-\frac{1}{t^2}} dt$, e si denoti con $P_3(x)$ il polinomio di Taylor di terzo grado, di punto iniziale $x_0 = 0$, che approssima f . Si ha:

- A $P_3(x) = -x - \frac{1}{2x} + \frac{x^3}{3}$.
- B $P_3(x) = -x + \frac{x^3}{3}$.
- C $P_3(x) = -x + x^2$.
- D $P_3(x) = 0$.

Esercizio 17. Data la funzione $f(x) = \int_0^x \frac{\cos^2 t}{2+t^2} dt$, stabilire quale delle seguenti affermazioni è corretta.

- A f è invertibile, f^{-1} è derivabile in zero e si ha $(f^{-1})'(0) = 2$.
- B f è invertibile, f^{-1} è derivabile in zero e si ha $(f^{-1})'(0) = \frac{1}{2}$.
- C f non è invertibile.
- D f è invertibile e f^{-1} non è derivabile in zero.

Esercizio 18. Data la funzione $f(x) = \int_0^{e^{x^2}} \left(1 + \ln\left(\frac{1+t}{t}\right)\right) dt$, stabilire quale delle seguenti affermazioni è corretta.

- A f ha un asintoto orizzontale.
- B f ha massimo assoluto.
- C f ha minimo assoluto.
- D f ha un asintoto obliquo.

Esercizio 19. Data la funzione $f(x) = \int_0^{x^2 - (\ln 4)x} \frac{1}{\cosh^2 t} dt$, stabilire quale delle seguenti affermazioni è corretta.

- A f ha massimo e minimo assoluto.
- B f ha minimo assoluto e $\min f = \frac{3}{5}$.
- C f ha minimo assoluto e $\min f = 0$.
- D f ha un asintoto obliquo.

8.1. CALCOLO INTEGRALE

51

Esercizio 20. Data una funzione continua $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, si consideri la funzione integrale $F(x) = \int_0^x f(t) dt$. Stabilire quale delle seguenti affermazioni è corretta.

- A Se f è derivabile e $f'(x) > 0$ per ogni $x \in \mathbb{R}$, allora $F(x) = \int_0^x f(t) dt$ è una funzione strettamente crescente.
- B Se f è dispari, allora $F(x) = \int_0^x f(t) dt$ è una funzione dispari.
- C Se $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ è dispari, allora $F(x) = \int_0^{g(x)} f(t) dt$ è una funzione dispari.
- D Se $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ è pari, allora $F(x) = \int_0^{g(x)} f(t) dt$ è una funzione pari.

Esercizio 21. Data una funzione continua $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, si consideri la funzione integrale $F(x) = \int_0^x f(t) dt$. Stabilire quale delle seguenti affermazioni è corretta.

- A Se $F(x) = \int_0^x f(t) dt$ ha un asintoto orizzontale, allora $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$.
- B Se f è dispari, allora $F'(0) = 0$.
- C Se $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$, allora $F(x) = \int_0^x f(t) dt$ ha un asintoto orizzontale.
- D Se f è pari, allora $F'(0) = 0$.

Esercizio 22. Data una funzione due volte derivabile $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ tale che $f(1) = 1$, $f'(1) = 3$, $\int_0^1 f(x) dx = 0$, stabilire quale delle seguenti affermazioni è corretta.

- A $\int_0^1 x^2 f''(x) dx = 0$.
- B $\int_0^1 x^2 f''(x) dx = 1$.
- C $\int_0^1 x^2 f''(x) dx = -1$.
- D $\int_0^1 x^2 f''(x) dx = 2$.

Esercizio 23. Data una funzione due volte derivabile $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ tale che $f(1) = -f(0)$, $\int_0^1 f(x) dx \neq 0$, $\int_0^1 f(x) dx \neq f(1)$, stabilire quale delle seguenti affermazioni è corretta.

- A $\int_0^1 x(x-1) f''(x) dx = 2 \int_0^1 f(x) dx$.
- B $\int_0^1 x(x-1) f''(x) dx = 0$.
- C $\int_0^1 x(x-1) f''(x) dx = 2 \int_0^1 f'(x) dx$.
- D $\int_0^1 x(x-1) f''(x) dx = -2 f(1)$.

Esercizio 24. Date due funzioni due volte derivabili con derivata continua $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, tali che $f(a) = f(b) = g(a) = g(b) = 0$, $\int_a^b f''(x)g(x) dx \neq 0$, $\int_a^b f''(x)g(x) dx \neq \int_a^b f(x)g(x) dx$, stabilire quale delle seguenti affermazioni è corretta.

A $\int_a^b f(x)g''(x) dx = \int_a^b (f \cdot g)'(x) dx$.

B $\int_a^b f(x)g''(x) dx = 0$.

C $\int_a^b f(x)g''(x) dx = \int_a^b f(x)g(x) dx$.

D $\int_a^b f(x)g''(x) dx = \int_a^b f''(x)g(x) dx$.

Esercizio 25. Data una funzione continua $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ che soddisfa la disuguaglianza $\int_0^1 (f(t))^2 dt \neq (\int_0^1 f(t) dt)^2$, si consideri la funzione $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definita da $g(x) = \int_0^1 (f(t) - x)^2 dt$. Stabilire quale delle seguenti affermazioni è corretta.

A g ha un punto di minimo assoluto in $x = \int_0^1 (f(t))^2 dt$.

B g non ammette minimo assoluto.

C g ha un punto di minimo assoluto in $x = \int_0^1 f(t) dt$.

D Il minimo assoluto di g è zero.

8.2 Soluzioni degli esercizi a risposta multipla

Es. 11 B.

Es. 12 D.

Es. 13 A.

Es. 14 C.

Es. 15 B.

Es. 16 D.

Es. 17 A.

Es. 18 C.

Es. 19 B.

Es. 20 D.

Es. 21 B.

Es. 22 B.

Es. 23 A.

Es. 24 D.

Es. 25 C.