Analisi 1

1. Derivate di Ordine Superiore

- **Definizione**: La derivata seconda f″(x)f''(x)f″(x) è la derivata della derivata prima. Analogamente, si possono calcolare derivate di ordine superiore (terza, quarta, ecc.).
- **Interpretazione geometrica**: La derivata seconda indica la concavità della funzione. Se f″(x)>0f''(x) > 0f″(x)>0, la funzione è concava verso l'alto (convessa); se f″(x)<0f''(x) < 0f″(x)<0, è concava verso il basso (concava).
- **Applicazioni**:
  - **Test della derivata seconda**: Se f′(c)=0f'(c) = 0f′(c)=0 e f″(c)>0f''(c) > 0f″(c)>0, allora fff ha un minimo locale in ccc; se f″(c)<0f''(c) < 0f″(c)<0, fff ha un massimo locale.
  - **Punti di flesso**: Si verifica un punto di flesso in ccc se la concavità cambia segno in ccc (passando da positiva a negativa o viceversa).

2. Formula di Taylor e Polinomi di Taylor

- **Polinomio di Taylor**: È un'approssimazione di una funzione attorno a un punto aaa, data da: Pn(x)=f(a)+f′(a)(x−a)+f″(a)2!(x−a)2+⋯+f(n)(a)n!(x−a)nP_n(x) = f(a) + f'(a)(x - a) + \frac{f''(a)}{2!}(x - a)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x - a)^nPn(x)=f(a)+f′(a)(x−a)+2!f″(a)(x−a)2+⋯+n!f(n)(a)(x−a)n
- **Resto di Lagrange**: Serve per stimare l'errore commesso utilizzando il polinomio di Taylor come approssimazione della funzione.
- **Applicazioni**: I polinomi di Taylor sono utili per approssimare funzioni complesse con espressioni più semplici, specialmente nelle vicinanze di un punto dato.

3. Integrali Impropri

- **Definizione**: Gli integrali impropri sono integrali con estremi di integrazione estesi all'infinito o con funzioni non limitate nell'intervallo di integrazione, come ∫1∞1x dx\int_{1}^{\infty} \frac{1}{x} \, dx∫1∞x1dx.
- **Convergenza degli integrali impropri**:
  - Se l'integrale improprio ha un valore finito, diciamo che converge.
  - **Criterio di confronto per integrali impropri**: Se f(x)≥g(x)f(x) \geq g(x)f(x)≥g(x) per x≥ax \geq ax≥a e ∫a∞f(x) dx\int_{a}^{\infty} f(x) \, dx∫a∞f(x)dx converge, allora anche ∫a∞g(x) dx\int_{a}^{\infty} g(x) \, dx∫a∞g(x)dx converge.
- **Esempi comuni**:
  - ∫1∞1xp dx\int_{1}^{\infty} \frac{1}{x^p} \, dx∫1∞xp1dx converge per p>1p > 1p>1.

- ∫011xp dx\int_{0}^{1} \frac{1}{x^p} \, dx∫01xp1dx converge per p<1p < 1p<1.

4. Serie di Taylor

- **Serie di Taylor**: Quando un polinomio di Taylor è esteso all'infinito, otteniamo una serie di Taylor: f(x)=∑n=0∞f(n)(a)n!(x−a)nf(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x - a)^nf(x)=n=0∑∞n!f(n)(a)(x−a)n
- **Convergenza della Serie di Taylor**: La serie di Taylor converge alla funzione originale in un intervallo attorno a aaa (raggio di convergenza), purché la funzione sia sufficientemente regolare (infinitamente derivabile in quell'intervallo).
- **Esempi**:
  - Espansione di exe^xex: ex=∑n=0∞xnn!e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}ex=∑n=0∞n!xn
  - Espansione di sin(x)\sin(x)sin(x): sin(x)=∑n=0∞(−1)nx2n+1(2n+1)!\sin(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}sin(x)=∑n=0∞(−1)n(2n+1)!x2n+1
  - Espansione di cos(x)\cos(x)cos(x): cos(x)=∑n=0∞(−1)nx2n(2n)!\cos(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}cos(x)=∑n=0∞(−1)n(2n)!x2n

5. Teoremi Importanti

- **Teorema del Valore Medio**: Se f(x)f(x)f(x) è continua su [a,b][a, b][a,b] e derivabile su (a,b)(a, b)(a,b), allora esiste c∈(a,b)c \in (a, b)c∈(a,b) tale che f′(c)=f(b)−f(a)b−af'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}f′(c)=b−af(b)−f(a).
- **Teorema di Rolle**: Caso speciale del Teorema del Valore Medio: se f(a)=f(b)f(a) = f(b)f(a)=f(b), allora esiste c∈(a,b)c \in (a, b)c∈(a,b) tale che f′(c)=0f'(c) = 0f′(c)=0.
- **Teorema di L'Hôpital**: Serve per calcolare limiti di forme indeterminate 00\frac{0}{0}00 o ∞∞\frac{\infty}{\infty}∞∞: limx→af(x)g(x)=limx→af′(x)g′(x)\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}x→alimg(x)f(x)=x→alimg′(x)f′(x)
- **Teorema di Weierstrass**: Una funzione continua su un intervallo chiuso [a,b][a, b][a,b] ha massimo e minimo assoluti in quell'intervallo.